ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

4

79

NAKLADATELSTVÍ ČSAV

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 79 • Č. 4 • STR. 297—386 • PRAHA 30. XII. 1954

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky")

SVAZEK 79 (1954)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Obsah:

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV
SVAZEK 79 * PRAHA, 30. XII. 1954 * ČÍSLO 4

ČLÁNKY

GEOMETRIE SIMPLEXU V E_n
(první část)

MIROSLAV FIEDLER, Praha.

(Došlo dne 25. listopadu 1953.) DT 513.821.2

V této první části práce, která užívá barycentrických souřadnic ke studiu simplexů v E_n, jsou jednak studovány geometrické vlastnosti simplexů (jejich existence a unicita až na shodnost při daných velikostech hran nebo vnitřních úhlů), jednak jsou uvedeny vzorce v barycentrických souřadnicích, kterých bude třeba v dalších částech. Mimo to jsou uvedeny věty o minimálním počtu ostrých vnitřních úhlů, jejich rozložení v simplexu, a definuje se pojem pravoúhlého simplexu.

1. Úvod. Eukleidovským n-rozměrným prostorem E_n, kde n je přirozené číslo, rozumíme metrický prostor, isometrický s prostorem E_n^* všech uspořádaných n-tic reálných čísel (prvkům prostoru říkáme body a značíme je velkými latinskými písmeny) tvaru $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, se vzdáleností definovanou vztahem

$$\varrho(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}\,. \tag{1,1}$$

Budeme dále užívat pojmů přímka, nadrovina, m-rozměrný lineární podprostor, úhel, koule a j., zaváděných v učebnicích geometrie (na př. E. Čech, Základy analytické geometrie, zkráceně AG).

Simplexem v E_n rozumíme útvar složený z $n + 1$ lineárně nezávislých bodů v E_n (t. j. bodů, které neleží v nadrovině), kterým říkáme vrcholy simplexu, a pro $n > 1$ ze všech m-rozměrných lineárních prostorů, $0 < m \leq n - 1$, spojujících vždy $m + 1$ z těchto bodů; těmto lineárním prostorům říkáme pro $m = 1$ hrany simplexu, pro $m = n - 1$ (a $n > 2$) stěny simplexu.

2. Barycentrické souřadnice; vyjádření vzdálenosti v těchto souřadnicích. Shodnost simplexů. Nechť v E_n je dáno $n + 1$ lineárně nezávislých bodů

$O_1, O_2, \dots, O_{n+1}$, jejichž vzájemné vzdálenosti označme $\sqrt{e_{ij}}$, t. j. pro $i, j = 1, \dots, n + 1$ platí

$$e_{ij} = [\varrho(O_i, O_j)]^2 . \tag{2,1}$$

Nechť v pevně zvoleném E_n^*, isometrickém s E_n, mají body O_i^*, odpovídající bodům O_i, tvar $O_i^* = (\overset{i}{a}_1, \overset{i}{a}_2, \dots, \overset{i}{a}_n)$ pro $i = 1, 2, \dots n + 1$, takže

$$e_{ij} = (\overset{j}{a}_1 - \overset{i}{a}_1)^2 + (\overset{j}{a}_2 - \overset{i}{a}_2)^2 + \dots + (\overset{j}{a}_n - \overset{i}{a}_n)^2 . \tag{2,2}$$

Vzhledem k lineární nezávislosti bodů O_i platí, že matice

$$A = \left\| \begin{matrix} \overset{1}{a}_1, & \overset{1}{a}_2, & \dots, & \overset{1}{a}_n, & 1 \\ \overset{2}{a}_1, & \overset{2}{a}_2, & \dots, & \overset{2}{a}_n, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overset{n+1}{a}_1, & \overset{n+1}{a}_2, & \dots, & \overset{n+1}{a}_n, & 1 \end{matrix} \right\|$$

je regulární. Definujme $\overset{i}{a}_{n+1} = 1$ pro $i = 1, 2 \dots, n + 1$, takže lze psát $A = \|\overset{i}{a}_k\|$, $i, k = 1, \dots, n + 1$. Označme ještě $\overset{i}{\alpha}_j$ doplněk prvku $\overset{i}{a}_j$ v matici A. Potom platí

$$\sum_{j=1}^{n+1} \overset{j}{\alpha}_i \overset{j}{a}_k = \sum_{j=1}^{n+1} \overset{i}{a}_j \overset{k}{\alpha}_j = |A| . \delta_{ik} , \tag{2,3}$$

kde $|A|$ je determinant matice A, takže

$$|A| \neq 0 , \tag{2,4}$$

a $\delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ pro } i \neq k \\ 1 \text{ pro } i = k \end{cases}$ je Kroneckerovo delta, kterého budeme často užívat.

Nyní budiž X bod v E_n, $X^* = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ odpovídající mu bod v E_n^*. Bodu X přiřadíme bod $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ projektivního prostoru P_n vztahem $(i = 1, 2, \dots, n + 1)$

$$x_i = \overset{i}{\alpha}_1 X_1 + \overset{i}{\alpha}_2 X_2 + \dots + \overset{i}{\alpha}_n X_n + \overset{i}{\alpha}_{n+1} . \tag{2,5}$$

Soustava $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ skutečně není pro žádný bod X z E_n nulová (t. j. není $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = 0$), neboť podle (2,3) je (položíme-li $X_{n+1} = 1$)

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \sum_i \overset{i}{a}_{n+1} x_i = \sum_{i,k=1}^{n+1} \overset{i}{a}_{n+1} \overset{i}{\alpha}_k X_k = |A| \sum_k \delta_{k,n+1} X_k = X_{n+1} |A| = |A| \neq 0 ,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i \neq 0 . \tag{2,6}$$

Obdobně se snadno zjistí, že pro $k = 1, \dots, n$ je

$$\sum_{i=1}^{n+1} \overset{i}{a}_k x_i = |A| . X_k . \tag{2,7}$$

Poněvadž $\sum_i x_i = |A|$, plyne z (2,6) a (2,7), že naopak každému bodu $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ z P_n, pro který platí (2,6), lze přiřadit bod $X^* = (X_1, \ldots, X_n)$ prostoru E_n^*, a tedy i bod X prostoru E_n, vztahem $(k = 1, \ldots, n)$

$$X_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} \overset{i}{a}_k x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_1} . \tag{2,8}$$

Je tedy (2,5) a (2,8) jednojednoznačné přiřazení E_n^* (a tedy i E_n) a $P_n - N$, označíme-li N množinu těch bodů $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ z P_n, pro něž je $\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i = 0$. V tomto přiřazení odpovídají bodům O_i z E_n body $(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{i,n+1})$ z $P_n - N$, lineárním prostorům v E_n lineární prostory v $P_n - N$.

Než odvodíme další vlastnosti tohoto přiřazení, dokážeme tuto větu:

Věta 1. *Nechť X resp. Y jsou body v E_n a nechť jim uvedeným přiřazením odpovídají body $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ resp. $(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ v $P_n - N$. Potom platí, že čtverec vzdálenosti bodů X a Y je roven*

$$[\varrho(X, Y)]^2 = -\frac{(exx)}{2(\Sigma x_i)^2} + \frac{(exy)}{\Sigma x_i \, \Sigma y_i} - \frac{(eyy)}{2(\Sigma y_i)^2}, \tag{2,9}$$

čili

$$[\varrho(X, Y)]^2 = \frac{1}{2(\Sigma x_i)^2(\Sigma y_i)^2} \begin{vmatrix} 0, & \Sigma x_i, & \Sigma y_i \\ \Sigma x_i, & (exx), & (exy) \\ \Sigma y_i, & (eyx), & (eyy) \end{vmatrix}, \tag{2,9'}$$

kde $(exy) = \sum\limits_{i,j=1}^{n+1} e_{ij} x_i y_j$ atp. a $e_{ij} = e_{ji}$ jsou dány vztahy (2,1).

Důkaz. Jsou-li $X^* = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ resp. $Y^* = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ body v E_n odpovídající bodům X resp. Y, platí podle (2,8) a (2,2) postupně

$$[\varrho(X, Y)]^2 = [\varrho(X^*, Y^*)]^2 = \sum_{k=1}^{n} (X_k - Y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{\sum\limits_i \overset{i}{a}_k x_i}{\sum\limits_i x_i} - \frac{\sum\limits_i \overset{i}{a}_k y_i}{\sum\limits_i y_i} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{(\sum\limits_i x_i)^2 (\sum\limits_i y_i)^2} \sum_k \Big(\sum_i \overset{i}{a}_k x_i \, . \sum_m y_m - \sum_m \overset{m}{a}_k y_m \, . \sum_i x_i\Big)^2 =$$

$$= \frac{1}{(\sum\limits_i x_i)^2 (\sum\limits_i y_i)^2} \sum_k \Big[\sum_{i,m} (\overset{i}{a}_k - \overset{m}{a}_k)\, x_i y_m\Big] . \Big[\sum_{j,l} (\overset{j}{a}_k - \overset{l}{a}_k)\, x_j y_l\Big] =$$

$$= \frac{1}{2(\sum\limits_i x_i)^2 (\sum\limits_i y_i)^2} \cdot \sum_{i,j,k,l,m} 2(\overset{i}{a}_k - \overset{m}{a}_k)(\overset{j}{a}_k - \overset{l}{a}_k)\, x_i x_j y_l y_m =$$

$$= \frac{1}{2(\sum\limits_i x_i)^2(\sum\limits_i y_i)^2}\Big[-\sum_{i,j,k,l,m}(\overset{l}{a}_k - \overset{m}{a}_k)^2\, x_i x_j y_l y_m + \sum_{i,j,k,l,m}(\overset{i}{a}_k - \overset{l}{a}_k)^2\, x_i x_j y_l y_m +$$

$$+ \sum_{i,j,k,l,m}(\overset{j}{a}_k - \overset{m}{a}_k)^2\, x_i x_j y_l y_m - \sum_{i,j,k,l,m}(\overset{i}{a}_k - \overset{j}{a}_k)^2\, x_i x_j y_l y_m\Big] =$$

$$= \frac{1}{2(\Sigma x_i)^2(\Sigma y_i)^2}\left[-(eyy)(\Sigma x_i)^2 + 2(exy)\Sigma x_i\, \Sigma y_i - (exx)(\Sigma y_i)^2\right].$$

Tím je dokázán vztah (2,9) i (2,9').

Již jsme ukázali, že bodu O_1 v E_n odpovídá bod $(1, 0, \ldots, 0)$ v $P_n - N$, bodu O_2 bod $(0, 1, 0, \ldots, 0)$ atd., a to nezávisle na tom, pomocí kterého E_n^* provádíme přiřazení (2,5) a (2,8). Tento výsledek zobecníme v této větě:

Věta 2. *Popsané přiřazení bodů v E_n a v $P_n - N$ nezávisí na volbě E_n^*.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že platí tato pomocná věta:

Bod v E_n je jednoznačně určen vzdálenostmi od bodů O_i, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$.

Nechť totiž jsou P a Q dva body v E_n takové, že pro $k = 1, 2, \ldots, n + 1$ platí $\varrho(P, O_k) = \varrho(Q, O_k)$. Bodu P resp. Q nechť odpovídají v $P_n - N$ (prostřednictvím E_n^*) body $(p_1, \ldots, p_{n+1})$ resp. $(q_1, \ldots, q_{n+1})$, takže podle (2,9) platí $[\varrho(P, O_k)]^2 = \dfrac{\sum\limits_i e_{ik}p_i}{\sum\limits_i p_i} - \dfrac{(epp)}{2(\sum\limits_i p_i)^2}$, a obdobně pro Q. Z $\varrho(P, O_k) = \varrho(Q, O_k)$ plyne pro $k = 1, 2, \ldots, n + 1$

$$\frac{\sum\limits_i e_{ik}p_i}{\sum\limits_i p_i} - \frac{(epp)}{2(\sum\limits_i p_i)^2} - \frac{\sum\limits_i e_{ik}q_i}{\sum\limits_i q_i} + \frac{(eqq)}{2(\sum\limits_i q_i)^2} = 0\,.$$

Násobíme-li k-tou rovnici $\dfrac{q_k}{\sum\limits_i q_i}$ a sečteme-li, dostaneme

$$-\frac{(epp)}{2(\sum\limits_i p_i)^2} + \frac{(epq)}{\sum\limits_i p_i \sum\limits_i q_i} - \frac{(eqq)}{2(\sum\limits_i q_i)^2} = 0\,,$$

t. j. podle (2,9) $\varrho(P, Q) = 0$, takže oba body P a Q splývají.

Nyní snadno dokážeme větu 2. Nechť E_n^* a $\overline{E}_n^*$ jsou prostory uspořádaných n-tic a nechť bodu X z E_n je pomocí E_n^* přiřazen bod $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ z $P_n - N$, pomocí $\overline{E}_n^*$ bod $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+1})$ v prostoru $\overline{P}_n - \overline{N}$. Bodu v $P_n - N$ o souřadnicích $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+1})$ (je totiž $\Sigma\bar{x}_i \neq 0$) odpovídá v E_n (pomocí E_n^*) bod $\overline{X}$. Z (2,9) však ihned plyne, že $\varrho(X, O_k) = \varrho(\overline{X}, O_k)$ pro $k = 1, 2, \ldots, n + 1$, jestliže $\varrho(X, O_k)$ počítáme pomocí souřadnic v $\overline{P}_n - \overline{N}$, $\varrho(\overline{X}, O_k)$ pomocí souřadnic v $P_n - N$. Odtud vyplývá, že body X a $\overline{X}$ jsou totožné, t. j. také body $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ a $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+1})$ v $P_n - N$ resp. v $\overline{P}_n - \overline{N}$ mají (až příp. na faktor) tytéž souřadnice, které tedy nezávisí na volbě E_n^*.

Tím jsme přiřadili každé soustavě $n + 1$ lineárně nezávislých bodů v E_n určitou význačnou soustavu souřadnic. Tyto souřadnice se nazývají barycentrické souřadnice vzhledem k simplexu, určenému těmito body.

Definujme nyní, že simplex s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ (v tomto pořadí) v prostoru E_n je shodný se simplexem $O'_1, O'_2, \ldots, O'_{n+1}$ (v tomto pořadí) v prostoru E'_n, existuje-li isometrické jednojednoznačné přiřazení bodů v E_n a E'_n tak, že bodům O_i odpovídají body O'_i pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Prostory E_n a E'_n mohou ovšem splývat; protože jsou isometrické, lze to dokonce předpokládat. Potom je zřejmé, že shodnost dvou simplexů v E_n je relace ekvivalence, takže množina všech simplexů v E_n se rozpadá ve třídy navzájem shodných simplexů.

Platí věta:

Věta 3. *Simplexy s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ resp. $O'_1, O'_2, \ldots, O'_{n+1}$ v E_n jsou shodné právě tehdy, platí-li $\varrho(O_i, O_j) = \varrho(O'_i, O'_j)$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$, t. j., jsou-li velikosti odpovídajících si hran*) stejné.*

Důkaz. Zaveďme jako v (2,1) čísla e_{ij} resp. e'_{ij}.

Jsou-li simplexy shodné, platí zřejmě $\varrho(O_i, O_j) = \varrho(O'_i, O'_j)$, t. j. $e_{ij} = e'_{ij}$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$.

Nechť obráceně platí, že $e_{ij} = e'_{ij}$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$. Přiřaďme každému bodu X z E_n bod X' v E_n tímto předpisem: odpovídá-li bodu X bod z P_n — — N o barycentrických souřadnicích $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ vzhledem k prvnímu simplexu, pak bod X' nechť je ten bod z E_n, jehož barycentrické souřadnice vzhledem k druhému simplexu jsou opět $(x_1, \ldots, x_{n+1})$. Snadno se zjistí, že toto přiřazení je vzájemně jednoznačné, a že bodům O_i odpovídají body O'_i. Z (2,9) pak plyne, že přiřazení zachovává vzdálenost, t. j., že je isometrické. Oba simplexy jsou tedy shodné.

Tím jsme dokázali, že čísly e_{ij} ($e_{ii} = 0$, $e_{ij} = e_{ji}$) je určen (až na simplexy shodné) nejvýše jeden simplex. V další větě uvedeme nutnou a postačující podmínku pro existenci takového simplexu, která nám bude velmi užitečná.

Věta 4. *Budiž dána soustava reálných čísel e_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$, tak, že*

$$e_{ii} = 0 \, , \quad e_{ij} = e_{ji} \, . \tag{2,10}$$

Nutná a postačující podmínka, aby existoval alespoň jeden simplex v E_n s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ tak, že pro $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$

$$e_{ij} = [\varrho(O_i, O_j)]^2 \, , \tag{2,11}$$

je, aby kvadratická forma $(exx) = \sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij}x_ix_j$ měla tuto vlastnost:

je-li $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$ pro nenulovou soustavu reálných čísel x_i, potom je $(exx) < 0$.

*) Velikostí hrany simplexu, spojující jeho vrcholy O_i a O_j pro $i \neq j$, rozumíme vzdálenost bodů O_i a O_j.

Důkaz. Nechť předně v E_n existuje simplex s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ tak, že platí (2,11) a nechť pro nenulovou soustavu reálných čísel $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ je $\sum_{i=1}^{n+1} r_i = 0$. Zvolme v E_n libovolný pevný bod P, jehož barycentrické souřadnice vzhledem k danému simplexu nechť jsou $(p_1, \ldots, p_{n+1})$, takže $\Sigma p_i \neq 0$. Bod Q, jehož barycentrické souřadnice jsou $q_i = p_i + r_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, existuje (je $\Sigma q_i = \Sigma p_i \neq 0$) a je různý od P (kdyby $q_i = \varrho p_i$, pak $r_i = (\varrho - 1) p_i$, z $\Sigma r_i = 0$ by plynulo $\varrho = 1$, $r_i = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, což je spor). Vzdálenost $\varrho(P, Q)$ je tedy kladná a podle (2,9) platí

$$0 < [\varrho(P, Q)]^2 = \frac{1}{2(\sum_i p_i)^2} [-(epp) + 2(epp) + 2(epr) -$$

$$-(epp) - 2(epr) - (err)] = -\frac{(err)}{2(\Sigma p_i)^2},$$

takže vskutku $(err) < 0$. Uvedená podmínka je tedy nutná.

Nechť obráceně pro kvadratickou formu (exx) platí (2,10) a podmínka věty. Snadno se přesvědčíme, že tato podmínka je ekvivalentní s podmínkou: je-li $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nenulová soustava, pak platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} e_{i,n+1} x_i - \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} x_i x_j > 0 .$$

Podle známé věty z algebry*) existuje k matici $M = \|\tfrac{1}{2}(e_{i,n+1} + e_{j,n+1} - e_{ij})\|$ této positivně definitní kvadratické formy regulární čtvercová matice s reálnými prvky $A = \|a_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, tak, že $M = A \cdot A'$, kde A' je matice transponovaná k matici A, t. j. platí

$$\tfrac{1}{2}(e_{i,n+1} + e_{j,n+1} - e_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} . \tag{2,12}$$

Budiž nyní E_n^* prostor n-tic z odst. 1, isometrický s daným E_n. Označme pro $i = 1, 2, \ldots, n$ O_i^* body $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, O_{n+1}^* bod $(0, 0, \ldots, 0)$. Je pak $[\varrho(O_i^*, O_{n+1}^*)]^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = e_{i,n+1}$ podle (2,12) pro $i < n + 1$; pro $i, j < n + 1$ je dále

$$[\varrho(O_i^*, O_j^*)]^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_{jk} - a_{ik})^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 =$$

$$= e_{j,n+1} - 2 \cdot \tfrac{1}{2}(e_{i,n+1} + e_{j,n+1} - e_{ij}) + e_{i,n+1} = e_{ij} .$$

Tudíž pro body O_i v E_n, odpovídající bodům O_i^* v E_n^*, platí (2,11), a přitom body O_i^*, a tedy i O_i, jsou lineárně nezávislé, jak plyne odtud, že determinant $|a_{ij}| \neq 0$. Je proto podmínka věty 4 také postačující.

*) Na příklad *Gelfand*: Lineární algebra, Praha 1953, str. 201.

Vrátíme se teď ke studiu pevného simplexu v E_n s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$. Opět definujme pro $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$ čísla e_{ij} vztahy (2,1), dále definujme

$$e_{00} = 0 \,, \quad e_{0i} = e_{i0} = 1 \tag{2,13}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$ a umluvme se, že indexy i, j, k, l označují sčítání resp. jiné operace mezi indexy $1, 2, \ldots, n + 1$, indexy r, s, t mezi indexy $0, 1, 2, \ldots, n + 1$. Tak na př. matici (kde ovšem $e_{ii} = 0$ a $e_{ij} = e_{ji}$)

$$\mu = \begin{Vmatrix} 0, & 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & e_{11}, & e_{12}, & \ldots, & e_{1,n+1} \\ 1, & e_{21}, & e_{22}, & \ldots, & e_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & e_{n+1,1}, & e_{n+1,2}, & \ldots, & e_{n+1,n+1} \end{Vmatrix}$$

budeme psát stručně $\mu = \begin{Vmatrix} 0, & 1 \\ 1, & e_{ij} \end{Vmatrix}$ nebo $\mu = \|e_{rs}\|$.

Věta 5. *Matice* $\mu = \|e_{rs}\|$ *i matice* $\bar{\mu} = \|e_{ij}\|$ *jsou regulární.*

Důkaz. Kdyby totiž $|e_{rs}| = 0$, pak by existovalo $n + 2$ čísel $p_0, p_1, \ldots, p_{n+1}$ ne vesměs rovných nule tak, že $\sum\limits_i p_i = 0$ (z prvého řádku) a že $p_0 + \sum\limits_k e_{ik} p_k = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Násobením posledních rovnic vždy p_i a sečtením plyne $\sum\limits_{i,k} e_{ik} p_i p_k = 0$, takže podle věty 4 je $p_1 = p_2 = \ldots = p_{n+1} = 0$, a tedy i $p_0 = 0$, což je spor.

Kdyby pak $|e_{ij}| = 0$, existovalo by $n + 1$ čísel $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ ne vesměs nulových tak, že $\sum\limits_j e_{ij} p_j = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Je $\sum\limits_i p_i \neq 0$ (neboť $(epp) = 0$) podle věty 4, takže existuje bod P v E_n tak, že jeho barycentrické souřadnice jsou (p_i). Avšak z (2,9) se snadno zjistí, že pak P splyne se všemi O_i (že totiž $\varrho(P, O_i) = 0$) pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, což je spor, neboť $n \geqq 1$ a body O_i jsou navzájem různé.

Označme nyní doplňky prvků e_{rs} v matici $\mu = \|e_{rs}\|$ (t. j. determinanty $(n + 1)$-ho stupně) znaky g_{rs}, takže na př. $g_{00} = |e_{ij}|$, dále determinant matice μ znakem Δ, takže podle věty 5 je

$$\Delta = |e_{rs}| \neq 0 \,, \quad g_{00} \neq 0 \,. \tag{2,14}$$

Platí tedy

$$\sum_s e_{rs} g_{st} = \Delta \delta_{rt} \,; \tag{2,15}$$

podrobněji

$$g_{00} + \sum_i e_{ik} g_{0i} = 0 \,, \tag{2,15a}$$

$$g_{0k} + \sum_i e_{ij} g_{ik} = \Delta \delta_{jk} \,, \tag{2,15b}$$

$$\sum_i g_{0i} = \Delta\,, \tag{2,15c}$$

$$\sum_i g_{ik} = 0\,. \tag{2,15d}$$

Význam čísel g_{rs} objasníme později. Závěrem tohoto odstavce dokážeme ještě tuto pomocnou větu:

Pro libovolnou $(n + 1)$-tici reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ platí

$$(exx) \leqq -\frac{g_{00}}{\Delta}(\sum_i x_i)^2\,, \tag{2,16}$$

a přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li $x_i = \varrho g_{0i}$ pro $i = 1, \ldots, n + 1$.

Důkaz. Že pro $x_i = \varrho g_{0i}$ platí (2,16) se znamením rovnosti, plyne z (2,15a) a (2,15c).

Nechť tedy $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ je taková soustava, že $x_i = \varrho g_{0i}$ neplatí současně pro žádné ϱ; potom čísla $y_k = g_{0k}\sum_i x_i - \Delta x_k$ nejsou vesměs rovna nule, dále $\sum_i y_i = 0$, takže podle věty 4 je $(eyy) < 0$:

$$(\sum_i x_i)^2 \sum_{i,j} e_{ij}g_{0i}g_{0j} - 2\Delta \sum_i x_i \sum_{i,j} e_{ij}g_{0i}x_j + \Delta^2(exx) = \Delta^2(exx) + g_{00}\Delta(\sum_i x_i)^2 < 0\,,$$

a odtud

$$(exx) < -\frac{g_{00}}{\Delta}(\sum_i x_i)^2\,.$$

Tím je pomocná věta dokázána.

3. Vyjádření úhlu. Eukleidovský prostor E_n se doplňuje v geometrii v prostor $\overline{E}_n$, složený jednak ze všech bodů E_n, které se pak nazývají vlastní body a mezi nimiž existuje pojem vzdálenosti ve shodě se vzdáleností v E_n, jednak ze všech směrů E_n, přiřazených třídám nenulových a navzájem rovnoběžných vektorů (nebo, což je totéž, třídám rovnoběžných přímek). Těmto směrům se pak říká nevlastní body $\overline{E}_n$. Mezi dvěma nevlastními body (čili směry) nebo mezi bodem vlastním a nevlastním není pojem vzdálenosti definován, avšak mezi dvěma nevlastními body čili směry je definován pojem úhlu. Dále se zavádí pojem orientovaného směru, který odpovídá třídám nenulových a souhlasně rovnoběžných vektorů v E_n (nebo třídám souhlasně rovnoběžných polopřímek).

Lze bez obtíží ukázat, že konstrukce doplnění E_n v $\overline{E}_n$ odpovídá pro barycentrické souřadnice doplnění $P_n - N$ v P_n, t. j., že směrům v E_n odpovídají jednojednoznačně takové homogenní nenulové $(n + 1)$-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, pro něž je $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$, tedy body N. V P_n jsou tedy jednak body vlastní, které neleží v N, jednak body nevlastní, které leží v N. N je nadrovina prostoru P_n

a nazývá se nevlastní nadrovina, zatím co každá jiná nadrovina se nazývá vlastní. Dále orientovaným směrům odpovídají kladně homogenní nenulové $(n+1)$-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, pro něž je $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$, považujeme-li totiž za totožné nenulové $(n+1)$-tice $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ a $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ $(\Sigma x_i = \Sigma y_i = 0)$, jestliže existuje $\varrho > 0$ tak, že pro $i = 1, \ldots, n+1$ je $x_i = \varrho y_i$. Body $(x_1, \ldots, x_{n+1})$, $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$ a $(-x_1, \ldots, -x_{n+1})$ pak odpovídají opačným směrům.

Jsou-li v barycentrických souřadnicích $A = (a_1, \ldots, a_{n+1})$, $B = (b_1, \ldots, b_{n+1})$ dva různé vlastní body, pak body (uzavřené) úsečky AB mají (až na nenulový faktor) tvar $X = (x_1, \ldots, x_{n+1})$

$$x_k = \frac{a_k}{\sum_i a_i} + \lambda \left(\frac{b_k}{\sum_i b_i} - \frac{a_k}{\sum_i a_i} \right), \tag{3,1}$$

kde $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Body polopřímky AB (s počátkem A) mají tvar (3,1), kde $\lambda \geqq 0$, t. j. tvar (až na nenulový faktor) $x_k = \frac{a_k}{\Sigma a_i} + \lambda p_k$, kde $\lambda \geqq 0$ a $\sum_{i=1}^{n+1} p_i = 0$ (a ne všechna p_i jsou rovna nule). Bod $(p_1, \ldots, p_{n+1})$ tedy je nevlastní, je to (orientovaný) směr polopřímky AB.

Úhlem dvou orientovaných směrů $P = (p_1, \ldots, p_{n+1})$, $Q = (q_1, \ldots, q_{n+1})$, $\sum_i p_i = \sum_i q_i = 0$ je pak úhel φ, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, pro který je

$$\cos \varphi = \frac{-(epq)}{\sqrt{-(epp)}\sqrt{-(eqq)}} \tag{3,2}$$

(pravá strana (3,2) je skutečně v absolutní hodnotě nejvýše rovna jedné: kdyby totiž $(epq)^2 > (epp)(eqq)$, pak body P, Q jsou různé, takže pro bod $R = (r_1, \ldots, r_{n+1})$, $r_k = (epq)\, p_k - (epp)\, q_k$, je $\sum_i r_i = 0$, t. j. $(err) < 0$ podle věty 4; avšak je $(err) = (epp)[(epp)(eqq) - (epq)^2] > 0$, neboť $(epp) < 0$ a $(epp) \cdot (eqq) - (epq)^2 < 0$ podle předpokladu, což je spor).

Úhel φ neorientovaných směrů P, Q je pak dán vztahy

$$\cos^2 \varphi = \frac{(epq)^2}{(epp)(eqq)}, \quad 0 \leqq \varphi \leqq \tfrac{1}{2}\pi. \tag{3,3}$$

Odtud plyne, že směry $P = (p_1, \ldots, p_{n+1})$ a $Q = (q_1, \ldots, q_{n+1})$, $\sum_i p_i = \sum_i q_i = 0$, jsou kolmé právě tehdy, je-li $(epq) = 0$. Lze dále ukázat, že směr P, kolmý k dané vlastní nadrovině α o rovnici $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$ (který existuje a je jediný) má barycentrické souřadnice

$$p_i = \sum_{j=1}^{n+1} g_{ij} \alpha_j \tag{3,4}$$

(podle (2,15d) je skutečně $\sum_i p_i = 0$)*). Je-li obráceně $P = (p_1, \ldots, p_{n+1})$, $\sum_i p_i = 0$ daný směr, pak nadrovina α je kolmá ke směru P právě tehdy, existuje-li reálné číslo λ tak, že α je (až na nenulový faktor) tvaru

$$(epx) + \lambda \sum_i x_i = 0 \tag{3,5}$$

(přitom všechny nadroviny tvaru (3,5) existují a jsou vlastní, neboť pro bod P je $(epp) + \lambda \sum p_i = (epp) \neq 0$).

Poněvadž úhel φ dvou vlastních nadrovin $\alpha \equiv \sum_i \alpha_i x_i = 0$ a $\beta \equiv \sum_i \beta_i x_i = 0$ lze definovat jako úhel k nim kolmých směrů, je po snadném výpočtu

$$\cos^2 \varphi = \frac{(g\alpha\beta)^2}{(g\alpha\alpha)(g\beta\beta)}, \quad 0 \leqq \varphi \leqq \tfrac{1}{2}\pi, \tag{3,6}$$

kde je psáno stručně $(g\alpha\beta) = \sum_{i,j} g_{ij}\alpha_i\beta_j$ atp.

To plyne ihned ze (3,3) a ze vztahu

$$(epq) = \Delta(g\alpha\beta), \tag{3,7}$$

kde

$$p_k = \sum_{i=1}^{n+1} g_{ik}\alpha_i, \quad q_k = \sum_{i=1}^{n+1} g_{ik}\beta_i$$

(je $(epq) = \sum_{k,l,i,j=1}^{n+1} e_{kl} g_{ik} g_{jl} \alpha_i \beta_j = - \sum_{i,j,l=1}^{n+1} e_{0l} g_{jl} g_{0i} \alpha_i \beta_j + \Delta \sum_{i,j,l=1}^{n+1} \delta_{il} g_{jl} \alpha_i \beta_j = \Delta(g\alpha\beta)$);
přitom nejsou všechna p_k rovna nule, neboť podle vět o minorech adjungovaného determinantu má matice $\|g_{ij}\|$ hodnost právě n, t. j. soustava $\sum_{k=1}^{n+1} g_{ik} x_k = 0$, $i = 1, \ldots, n + 1$ má (až na faktor) jediné řešení $x_k = 1$, $k = 1, \ldots, n + 1$.

Z (3,7) dále plyne: definujeme-li

$$\gamma = - \operatorname{sign} \Delta, \tag{3,8}$$

potom pro každou vlastní nadrovinu $\alpha \equiv \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$ je

$$\gamma(g\alpha\alpha) > 0. \tag{3,9}$$

Je-li totiž směr $P = (p_1, \ldots, p_{n+1})$ dán vztahem (3,4), potom je podle věty 4 $(epp) < 0$, takže vzhledem k (2,14), (3,7) a (3,8) platí (3,9).

*) Můžeme teď najít význam čísel g_{ij}. Protože bod P je podle (3,4) polárně sdružen s nadrovinou α (lépe se všemi směry v α, neboť P je sdružen i s nadrovinou $\Sigma\alpha_i x_i + \lambda \Sigma x_i = 0$, která obsahuje tytéž směry jako α) vzhledem ke kvadrice v nadrovinných souřadnicích $\Gamma \equiv \Sigma g_{ij}\xi_i\xi_j = 0$, je kolmost konjugovaností dle Γ, t. j. Γ je absolutní kvadrikou prostoru E_n (AG II, str. 160).

Zavedeme-li ještě pojem úhlu φ dvou vlastních nadrovin $\alpha \equiv \sum_i \alpha_i x_i = 0$, $\beta \equiv \sum_i \beta_i x_i = 0$ vzhledem k vlastnímu bodu $C = (c_1, c_2, \ldots, c_{n+1})$, který neleží na žádné z nich, jako úhel výplňkový (úhly φ a ψ jsou výplňkové, je-li $\varphi + \psi = \pi$) k úhlu orientovaných kolmic z bodu C k nadrovinám α a β; orientovaná kolmice z bodu k nadrovině je polopřímka s počátkem v tomto bodě, kolmá k dané nadrovině a protínající tuto nadrovinu. Snadno se zjistí, že směr orientované kolmice z C k α je (až na kladný faktor)

$$p_k = \varepsilon \sum_i g_{ik} \alpha_i ,$$

kde $\varepsilon = -\operatorname{sign} (\gamma \sum_i \alpha_i c_i \, . \sum_i c_i)$.

Najdeme-li obdobně směr orientované kolmice z C k β, dostaneme ze (3,2), (3,7) a (3,8), že úhel β je dán vztahem

$$\cos \varphi = \frac{\eta (g\alpha\beta)}{\sqrt{(g\alpha\alpha)(g\beta\beta)}} , \quad 0 \leqq \varphi \leqq \pi , \tag{3,10}$$

kde $\eta = -\operatorname{sign} (\gamma \sum_i \alpha_i c_i \, . \sum_i \beta_i c_i)$.

Budeme ještě potřebovat, jak se vyjádří v barycentrických souřadnicích (pro $n > 2$) $(n - 1)$-dimensionální obsah stěny simplexu. To však vyplyne jako speciální případ tohoto vztahu, který lze bez obtíží dokázat ze známých vzorců z analytické geometrie v E_n*):

Jsou-li $\overset{1}{P}, \overset{2}{P}, \ldots, \overset{m+1}{P}$ vlastní body o barycentrických souřadnicích $\overset{\alpha}{P} = (\overset{\alpha}{p}_1, \overset{\alpha}{p}_2, \ldots, \overset{\alpha}{p}_{n+1})$, $\alpha = 1, \ldots, m + 1$, které jsou lineárně nezávislé, potom m-dimensionální obsah simplexu (v E_m, obsahujícím tyto body), který je má za vrcholy, je roven nezápornému $\varrho(\overset{1}{P}, \overset{2}{P}, \ldots, \overset{m+1}{P})$, jehož čtverec je

$$[\varrho(\overset{1}{P}, \overset{2}{P}, \ldots, \overset{m+1}{P})]^2 = \frac{1}{2^m (m!)^2} \frac{e[\overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \ldots, \overset{m+1}{p}]}{e[\overset{1}{p}] \, . \, e[\overset{2}{p}] \ldots e[\overset{m+1}{p}]} , \tag{3,11}$$

kde je označeno

$$e[p, q, \ldots, v] = \begin{vmatrix} 0, & \sum_i p_i, & \sum_i q_i, & \ldots, & \sum_i v_i \\ \sum_i p_i, & (epp), & (epq), & \ldots, & (epv) \\ \sum_i q_i, & (eqp), & (eqq), & \ldots, & (eqv) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_i v_i, & (evp), & (evq), & \ldots, & (evv) \end{vmatrix} ,$$

*) *K. Borsuk*: Geometria analityczna, 1950, str. 105.

takže $e[p] = -(\sum_i^{\alpha} p_i)^2$. Vzorec (2,9′) je skutečně speciálním případem (3,11) pro $m = 1$.

Snadno se také najde vyjádření vzdálenosti vlastního bodu $A = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ od vlastní nadroviny $\alpha \equiv \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$: čtverec této vzdálenosti je

$$[\varrho(A, \alpha)]^2 = -\frac{\Delta}{2} \cdot \frac{(\sum_i \alpha_i a_i)^2}{(g\alpha\alpha) \cdot (\sum_i a_i)^2} . \tag{3,12}$$

4. Vnitřní úhly simplexu. Další věty o shodnosti simplexů. V našem základním simplexu o vrcholech $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ a o stranách velikosti $\sqrt{e_{ij}}$ najdeme teď velikost t. zv. vnitřních úhlů. Nejprve nazveme jako obvykle vnitřním bodem simplexu každý vlastní bod A, který neleží v žádné ze stěn $\omega_i \equiv \equiv x_i = 0$ simplexu, který však leží ve všech poloprostorech*) $\omega_i O_i$ pro $i = = 1, \ldots, n + 1$. Snadno se zjistí, že v barycentrických souřadnicích je bod $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ vnitřní bod simplexu právě tehdy, existuje-li číslo $\varepsilon = \pm 1$ tak, že pro $i = 1, \ldots, n + 1$ je

$$\varepsilon a_i > 0 . \tag{4,1}$$

Vnitřními úhly φ_{ij}, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n + 1$, $n > 1$, našeho simplexu pak rozumíme úhly nadrovin ω_i, ω_j vzhledem k pevnému vnitřnímu bodu A. Z vyjádření (3,10) je zřejmé, že φ_{ij} nezávisí na volbě vnitřního bodu A a že platí

$$\cos \varphi_{ij} = \frac{-\gamma g_{ij}}{\sqrt{\gamma g_{ii}}\sqrt{\gamma g_{jj}}} , \quad 0 < \varphi_{ij} < \pi , \tag{4,2}$$

kde γ je definováno v (3,8) a přitom podle (3,9) je

$$\gamma g_{ii} > 0 . \tag{4,3}$$

Nemůže být ovšem $\varphi_{ij} = 0$ nebo $\varphi_{ij} = \pi$, t. j. $\cos^2 \varphi_{ij} = 1$, neboť pak by $g_{ij}^2 = g_{ii} g_{jj}$ a existovala by nenulová reálná dvojice c_i, c_j tak, že $g_{ii}c_i^2 + 2g_{ij}c_ic_j + + g_{jj}c_j^2 = 0$, t. j. pro vlastní nadrovinu $c_ix_i + c_jx_j = 0$ (je $n > 1$) by platilo $\gamma(gcc) = 0$ (kde $c_k = 0$ pro $k \neq i, j$, $k = 1, \ldots, n + 1$) ve sporu s (3,9).

Podle (3,11) je čtverec n-dimensionálního obsahu daného simplexu roven

$$V^2 = \frac{(-1)^{n+1} \Delta}{2 (n!)^2} , \tag{4,4}$$

takže pro každý simplex v E_n je

$$\gamma = (-1)^n . \tag{4,5}$$

---

*) Poloprostor αA, kde $\alpha \equiv \Sigma \alpha_i x_i = 0$ je vlastní nadrovina a $A = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ vlastní bod, který neleží v α, je množina všech vlastních bodů X takových, že úsečka AX nemá s α společný žádný vnitřní bod. Je-li $X = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, leží X v αA právě tehdy, je-li $\Sigma_i x_i \neq 0$ a je-li $\varepsilon \Sigma_i \alpha_i x_i \Sigma_i x_i \geq 0$, kde $\varepsilon = \text{sign} \Sigma_i \alpha_i a_i \Sigma_i a_i$.

Abychom mohli snáze formulovat větu 6, zavedeme si tuto úmluvu: definujeme pro $i = 1, \ldots, n + 1$ vnitřní úhel

$$\varphi_{ii} = \pi \,, \tag{4,6}$$

takže pak na př. platí (4,2) i pro $i = j$.

Věta 6. *Jsou-li φ_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n + 1$ vnitřní úhly simplexu, potom pro libovolná reálná čísla $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ platí*

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} \xi_i \xi_j \cos \varphi_{ij} \leqq 0 \,; \tag{4,7}$$

přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li

$$\xi_i = \varrho \sigma_i \,, \tag{4,8}$$

kde $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n+1}$ je pevná soustava kladných čísel,

$$\sigma_i > 0 \,. \tag{4,9}$$

Nechť obráceně je dána soustava reálných čísel a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n + 1$, tak, že

1. $$a_{ii} = -1 \,, \quad a_{ij} = a_{ji} \,, \tag{4,10}$$

2. *pro každou soustavu $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ je*

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} \xi_i \xi_j \leqq 0 \,, \tag{4,11}$$

3. *existuje soustava kladných čísel $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})$, $\sigma_i > 0$, tak, že ve (4,11) nastane rovnost právě tehdy, je-li $\xi_i = \varrho \sigma_i$ pro $i = 1, \ldots, n + 1$.*

Potom existuje simplex v E_n, jehož vnitřní úhly φ_{ij} vyhovují vztahům ($i, j = 1, \ldots, n + 1$)

$$\cos \varphi_{ij} = a_{ij} \,. \tag{4,12}$$

D ů k a z. Ze vztahů (3,9), (2,15d), (4,2) a (4,3) plyne ihned první část věty pro $\sigma_i = \sqrt{\gamma g_{ii}}$.

Nechť tedy pro soustavu čísel a_{ij} platí 1, 2, 3. Definujme čísla e'_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n + 1$, vztahy

$$e'_{ij} = 1 + a_{ij} \,. \tag{4,13}$$

Snadno se přesvědčíme, že tato čísla vyhovují předpokladům věty 4, takže existuje simplex v E_n s vrcholy $O'_1, \ldots, O'_{n+1}$ tak, že $[\varrho(O'_i, O'_j)]^2 = e'_{ij}$. Označme ω_i nadroviny, jejichž rovnice v barycentrických souřadnicích vzhledem k simplexu $O'_1, \ldots, O'_{n+1}$ jsou

$$\omega_i \equiv e'_{i1} x_1 + e'_{i2} x_2 + \ldots + e'_{i,n+1} x_n = 0 \,.$$

Jestliže zavedeme opět čísla g'_{ij}, g'_{0i}, g'_{00}, Δ' jako v 2, platí podle věty 5, že

$|e'_{ij}| \neq 0$, t. j. nadroviny ω_i jsou lineárně nezávislé. Snadno se podle (2,15) dosazením přesvědčíme, že průsečík O_i nadrovin ω_j, $j \neq i$, má souřadnice

$$O_i \equiv (g'_{00}g'_{i1} - g'_{01}g'_{0i}, \ldots, g'_{00}g'_{i,n+1} - g'_{0,n+1}g'_{0i}) \,.$$

Body $O_1, \ldots, O_{n+1}$ tvoří vrcholy simplexu. Dokážeme, že tento simplex má vnitřní úhly φ_{ij}, pro něž platí (4,12).

Podle pomocné věty z 2 (vztah (2,16)) platí

$$(e'xx) \leqq -\frac{g'_{00}}{\Delta'}(\Sigma x'_i)^2 \,,$$

a přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li $x_i = \varrho g'_{0i}$. Dosazením z (4,13) je tedy pro $c = -1 - \frac{g'_{00}}{\Delta'}$

$$\Sigma a_{ij}x_ix_j \leqq c(\Sigma x_i)^2 \,, \tag{4,14}$$

a přitom rovnost nastane právě pro $x_i = \varrho g'_{0i}$. Dokážeme, že $c = 0$: kdyby $c > 0$, pak by $\sum\limits_{i,j} a_{ij}g'_{0i}g'_{0j} = c(\Sigma g'_{0i})^2 = c\Delta'^2 > 0$, což je spor s (4,11); kdyby $c < 0$, potom by pro čísla σ_i z 3 $\sum\limits_{i,j} a_{ij}\sigma_i\sigma_j \leqq c(\sum\limits_i \sigma_i)^2 < 0$, což je spor s 3. Odtud $c = 0$, takže

$$g'_{00} + \Delta' = 0 \,; \tag{4,15}$$

srovnáním obou případů, kdy nastane ve (4,11) a (4,14) rovnost, dostáváme, že

$$g'_{0i} = \varrho\sigma_i \,, \tag{4,16}$$

kde

$$\Delta'\varrho > 0 \,, \tag{4,17}$$

jak plyne sečtením rovnic (4,16).

Jednoduchým výpočtem se přesvědčíme, že vlastní bod $s = (g'_{01}, \ldots, g'_{0,n+1})$ je vnitřním bodem simplexu $O_1, \ldots, O_{n+1}$. Vnitřní úhel φ_{ij}, $i \neq j$, nadrovin ω_i, ω_j tohoto simplexu je tedy podle (3,10) vyjádřen vztahem

$$\cos \varphi_{ij} = \frac{\eta_{ij}(g'_{00} + \Delta' e'_{ij})}{\sqrt{g'^2_{00}}} = \frac{\eta_{ij}\Delta'(e'_{ij} - 1)}{|\Delta'|} = \eta_{ij}a_{ij} \operatorname{sign} \Delta' = a_{ij} \,,$$

neboť $\eta_{ij} = \operatorname{sign}(\Delta' \,.\, \sum\limits_k e'_{ik}g'_{0k} \,.\, \sum\limits_k e'_{jk}g'_{0k}) = \operatorname{sign}(\Delta' g'^2_{00}) = \operatorname{sign} \Delta'$. Tím je věta dokázána, neboť jsme takový simplex zkonstruovali.

Z rovnice (2,15d) plyne, že je pro čísla g_{ij} v simplexu

$$|g_{ij}| = 0 \,. \tag{4,18}$$

Vzhledem ke (4,2) a úmluvě (4,6) proto platí

$$|\cos \varphi_{ij}| = 0 \,. \tag{4,19}$$

Vnitřní úhly $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$, $i \neq j$, jsou tedy vázány rovnicí (4,19). Je-li N počet těchto úhlů, t. j.

$$N = \binom{n+1}{2}, \tag{4,20}$$

pak platí tato věta:

Věta 7. *Libovolnými $N - 1$ vnitřními úhly simplexu je zbylý vnitřní úhel jednoznačně určen.*

Důkaz. Předpokládejme totiž, že pro dva simplexy (čárkovaný a nečárkovaný) v E_n s vnitřními úhly φ_{ij}, φ'_{ij} platí (s úmluvou $\varphi_{ii} = \varphi'_{ii} = \pi$)

$$\varphi_{ij} = \varphi'_{ij} \text{ pro } i + j > 3,\ i, j = 1, \ldots, n + 1, \text{ avšak } \varphi_{12} \neq \varphi'_{12}.$$

Potom je podle věty 6 pro každou soustavu $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ $\sum_{i,j} \xi_i \xi_j \cos \varphi_{ij} \leqq 0$, a přitom $\sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j \cos \varphi_{ij} = 0$, $\sigma_i > 0$; rovněž $\sum_{i,j} \xi_i \xi_j \cos \varphi'_{ij} \leqq 0$, $\sum_{i,j} \sigma'_i \sigma'_j \cos \varphi'_{ij} = 0$, $\sigma'_i > 0$. Platí proto také $\sum_{i,j} \xi_i \xi_j (\cos \varphi_{ij} + \cos \varphi'_{ij}) \leqq 0$. Speciálně

$$\sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j (\cos \varphi_{ij} + \cos \varphi'_{ij}) = 2(\cos \varphi'_{12} - \cos \varphi_{12})\, \sigma_1 \sigma_2 \leqq 0,$$

t. j. $\cos \varphi_{12} \geqq \cos \varphi'_{12}$, a obdobně $\sum_{i,j} \sigma_i' \sigma_j' (\cos \varphi_{ij} + \cos \varphi'_{ij}) = 2(\cos \varphi_{12} - \cos \varphi'_{12})\, \sigma'_1 \sigma'_2 \leqq 0$, t. j. $\cos \varphi_{12} \leqq \cos \varphi'_{12}$, $\varphi_{12} = \varphi'_{12}$, což je spor. Plyne tedy z $\varphi_{ij} = \varphi'_{ij}$ pro $i + j > 3$, že také $\varphi_{12} = \varphi'_{12}$. Protože přečíslováním vždy můžeme dosáhnout toho, že zbylý úhel je φ_{12}, je tím věta dokázána.

Věta 8. *Dva simplexy v E_n, $n \geqq 2$, jsou shodné, shodují-li se ve velikosti jedné hrany*) a ve velikostech $N - 1$ vnitřních úhlů.*

Důkaz. Podle věty 7 jsou všechny odpovídající si vnitřní úhly obou simplexů rovny, t. j.

$$\varphi_{ij} = \varphi'_{ij},\quad i, j = 1, 2, \ldots, n + 1;$$

nechť dále $e_{12} = e'_{12}$.

Vzhledem k (4,2) a (4,5) platí

$$\frac{g_{ij}}{\sqrt{\gamma g_{ii}}\sqrt{\gamma g_{jj}}} = \frac{g'_{ij}}{\sqrt{\gamma g'_{ii}}\sqrt{\gamma g'_{jj}}}.$$

Poněvadž podle (4,3) a (4,5) jsou g_{ii} a g'_{ii} téhož znamení, existují kladná čísla σ_i, $i = 1, \ldots, n + 1$, tak, že $g_{ii} = \sigma_i^2 g'_{ii}$. Vzhledem k předchozímu vztahu je pro $i, j = 1, \ldots, n + 1$

$$g_{ij} = \sigma_i \sigma_j g'_{ij}.$$

*) Ve formulacích vět 8, 9, 10 vynecháváme pro stručnost označení simplexů a rčení „které si odpovídají".

Avšak podle (2,15d) je $\sum_j g_{ij} = 0$, tedy $\sum_j g'_{ij}\sigma_j = 0$ pro $i = 1, \ldots, n + 1$; proto je $\sum_{i,j=1}^{n+1} g_{ij}\sigma_i\sigma_j = 0$. Vzhledem k (3,9) nemůže v barycentrických souřadnicích čárkovaného simplexu existovat vlastní nadrovina $\Sigma\sigma_i x_i = 0$, je tedy $\sigma_i = \sigma$ pro $i = 1, \ldots, n + 1$, t. j.

$$g_{ij} = \sigma^2 g'_{ij}\,. \tag{4,21}$$

Užijeme teď této věty z theorie determinantů*):

Je-li $|a_{ij}|$ nenulový determinant n-tého řádu, $|A_{ij}|$ determinant vytvořený z doplňků jeho prvků, pak každý subdeterminant m-tého řádu, $1 \leqq m \leqq n$ determinantu $|A_{ij}|$ je až na nenulový faktor (na volbě tohoto subdeterminantu nezávislý) roven doplňku stejnolehlého subdeterminantu v determinantu $|a_{ij}|$.

V našem případě je $|g_{rs}|$ skutečně determinant doplňků nenulového determinantu $|e_{rs}|$, takže (pro $m = n - 1$) platí pro $i \neq j$ a $\lambda \neq 0$ (podle 2,13)

$$\lambda \begin{vmatrix} e_{00}, & e_{0i}, & e_{0j} \\ e_{0i}, & e_{ii}, & e_{ij} \\ e_{0j}, & e_{ij}, & e_{jj} \end{vmatrix} = 2\lambda e_{ij} = |g_{rs}|_{\substack{r \neq 0,i,j \\ s \neq 0,i,j}} = |g_{kl}|_{\substack{k \neq i,j \\ l \neq i,j}}\,. \tag{4,22}$$

Obdobně pro $\lambda' \neq 0$

$$2\lambda' e'_{ij} = |g'_{kl}|_{\substack{k \neq i,j \\ l \neq i,j}}\,, \tag{4,22'}$$

takže vzhledem k (4,21) a (4,22)

$$2\lambda e_{ij} = \sigma^{2(n-1)} |g'_{kl}|_{\substack{k \neq i,j \\ l \neq i,j}} = 2\lambda' \sigma^{2(n-1)} e'_{ij}\,.$$

Poněvadž podle předpokladu je $e_{12} = e'_{12}$, je $2\lambda = 2\lambda'\sigma^{2(n-1)}$ a $e_{ij} = e'_{ij}$ pro $i, j = 1, \ldots, n + 1$. Podle věty 3 jsou tedy oba simplexy shodné.

Věta 9. *Dva simplexy v E_n, $n \geqq 2$, jsou shodné, shodují-li se ve velikostech všech hran s jedním společným vrcholem a ve vzájemných vnitřních úhlech všech stěn, které procházejí tímto vrcholem.*

Důkaz. Nechť uvedený vrchol je O_{n+1}, takže platí $e_{i,n+1} = e'_{i,n+1}$, $\varphi_{ij} = \varphi'_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom podle (4,22) a (4,2) je pro $\lambda \neq 0$ a $i < n + 1$

$$2\lambda e_{i,n+1} = (-\gamma)^{n-1}\Big(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} g_{jj}\Big)|\cos\varphi_{kl}|_{\substack{k \neq i,\, n+1 \\ l \neq i,\, n+1}}$$

a obdobně pro čárkovaný simplex; srovnáním plyne pro $i = 1, \ldots, n$

$$g_{ii} = \sigma g'_{ii}\,, \quad \sigma > 0\,,$$

takže ze (4,2) pro $i, j = 1, \ldots, n$

$$g_{ij} = \sigma g'_{ij}\,.$$

*) *B. Bydžovský*: Úvod do theorie determinantů, Praha 1947, str. 129.

Vzhledem k (2,15d) však platí také

$$g_{i,n+1} = \sigma g'_{i,n+1} \quad \text{a} \quad g_{n+1,n+1} = \sigma g'_{n+1,n+1} .$$

Podle (4,2) je tedy $\varphi_{ij} = \varphi'_{ij}$ pro $i, j = 1, \ldots, n + 1$, a protože $e_{1,n+1} = e'_{1,n+1}$, jsou podle věty 9 oba simplexy shodné.

Věta 10. *Dva simplexy v E_n, $n \geqq 2$, jsou shodné, shodují-li se ve velikostech všech hran v jedné stěně a ve všech vnitřních úhlech k této stěně přilehlých.*

Důkaz. Je-li uvedená stěna ω_{n+1}, platí tedy

$$e_{ij} = e'_{ij}, \quad \varphi_{i,n+1} = \varphi'_{i,n+1}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n .$$

Je předně

$$g_{n+1,n+1} = |e_{rs}|_{\substack{r\neq n+1\\ s\neq n+1}} = |e'_{rs}|_{\substack{r\neq n+1\\ s\neq n+1}} = g'_{n+1,n+1} ,$$

takže z (4,2)

$$\frac{g_{i,n+1}}{\sqrt{\gamma g_{ii}}} = \frac{g'_{i,n+1}}{\sqrt{\gamma g'_{ii}}} .$$

Pro $i = 1, \ldots, n$ existují kladná čísla σ_i tak, že

$$g_{ii} = \sigma_i^2 g'_{ii} ; \tag{4,23}$$

podle předchozí rovnice je tedy

$$g_{i,n+1} = \sigma_i g'_{i,n+1} . \tag{4,24}$$

Užijeme-li opět uvedené věty z theorie determinantů, platí pro $i, j = 1, \ldots, n$ a $\lambda \neq 0$

$$\begin{vmatrix} g_{ij}, & g_{i,n+1} \\ g_{i,n+1}, & g_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \lambda |e_{rs}|_{\substack{r\neq i,\, n+1\\ s\neq j,\, n+1}} , \tag{4,25}$$

a obdobně pro čárkovaný simplex. Podle (4,23), (4,24) a (4,25) pro $i = j$

$$\lambda |e_{rs}|_{\substack{r\neq i,\, n+1\\ s\neq i,\, n+1}} = \sigma_i^2 \begin{vmatrix} g'_{ii}, & g'_{i,n+1} \\ g'_{i,n+1}, & g_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = \lambda' \sigma_i^2 |e'_{rs}|_{\substack{r\neq i,\, n+1\\ s\neq i,\, n+1}} = \lambda' \sigma_i^2 |e_{rs}|_{\substack{r\neq i,\, n+1\\ s\neq i,\, n+1}} .$$

Je (jako za rovnicí (4,2)) $g_{ii} g_{n+1,n+1} - g_{i,n+1}^2 \neq 0$, tedy $|e_{rs}|_{\substack{r\neq i,\, n+1\\ s\neq i,\, n+1}} \neq 0$, a proto $\sigma_i^2 = \frac{\lambda}{\lambda'} = \sigma^2$, $\sigma_i = \sigma$. Podle (2,15d) a (4,24) však platí $0 = \sum_{i=1}^{n+1} g_{i,n+1} = \sigma \sum_{i=1}^{n} g'_{i,n+1} + g'_{n+1,n+1} = (1 - \sigma) g'_{n+1,n+1}$, takže $\sigma = 1$, celkem pro $i = 1, \ldots, n$

$$\sigma_i = 1 \quad \text{a} \quad \lambda = \lambda' .$$

Vzhledem k těmto vztahům plyne z (4,25) a analogické rovnice pro čárkovaný simplex, že i pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$g_{ij} = g'_{ij} ;$$

oba simplexy se tedy shodují ve všech vnitřních úhlech a alespoň v jedné hraně, a proto jsou podle věty 8 shodné.

V dalších větách ještě najdeme minimální počet a rozložení ostrých vnitřních úhlů v simplexu. Nejprve nazveme dva simplexy v E_n (stručně n-simplexy) *úhlově ekvivalentní*, jsou-li odpovídající si úhly φ_{ij} a φ'_{ij} vždy současně ostré, pravé nebo tupé. Vzhledem k této ekvivalenci se všechny n-simplexy rozpadají na konečně mnoho tříd, a to méně než $3^N \left(N = \binom{n+1}{2}\right)$; není totiž na př. možné, aby simplex měl všechny vnitřní úhly pravé (plyne z věty 6). V následující větě je (v terminologii theorie grafů)*) uvedena nutná a postačující podmínka pro to, aby taková třída simplexů byla neprázdná.

Věta 11. *Nutná a postačující podmínka, aby existoval n-simplex, je-li o všech jeho vnitřních úhlech předepsáno, které jsou ostré, které pravé a které tupé, je: graf, který má $n + 1$ uzlů — označíme je $1, 2, \ldots, n + 1$ — a právě ty hrany ij, pro které je předepsáno, že úhly φ_{ij} jsou ostré, je souvislý.***)

Důkaz. Nechť je předně dán n-simplex a předpokládejme, že příslušný graf není souvislý. To znamená, že množinu indexů $\{1, 2, \ldots, n + 1\}$ lze rozdělit na dvě disjunktní neprázdné množiny indexů M_1 a M_2 tak, že v příslušném grafu žádná hrana nespojuje uzel s číslem z M_1 s uzlem s číslem z M_2, t. j. $\varphi_{\alpha\beta} \geqq \frac{1}{2}\pi$ pro $\alpha \in M_1$, $\beta \in M_2$. Je tedy podle (4,2) v obvyklém označení $\gamma g_{\alpha\beta} \geqq 0$ pro $\alpha \in M_1$, $\beta \in M_2$, a proto

$$\sum_{\substack{\alpha\in M_1\\ \beta\in M_2}} \gamma g_{\alpha\beta} \geqq 0\,.$$

Avšak podle (2,15d) je

$$\sum_{\substack{\alpha\in M_1\\ \beta\in M_2}} \gamma g_{\alpha\beta} = -\sum_{\alpha,\delta\in M_1} \gamma g_{\alpha\delta}\,,$$

takže

$$\gamma \sum_{\alpha,\delta\in M_1} g_{\alpha\delta} \leqq 0\,. \tag{4,26}$$

Označíme-li však $\varkappa$ nadrovinu o rovnici $\varkappa \equiv \sum_{i\in M_1} x_i = 0$ v barycentrických souřadnicích, je to (M_1 i M_2 jsou neprázdné) vlastní nadrovina, takže podle (3,9) platí $\gamma \sum_{\alpha,\delta\in M_1} g_{\alpha\delta} > 0$, což je spor s (4,26).

Nechť obráceně je předepsáno, že z dvojic indexů $D = \{(1, 2), (1, 3), \ldots, (n, n + 1)\}$ mají být ty úhly simplexu, které mají indexy z D_0, ostré, úhly s indexy z D_1 pravé a s indexy z D_2 tupé, kde D_0, D_1 a D_2 tvoří disjunktní rozklad množiny D; nechť je přitom pro příslušný graf splněna podmínka věty.

---

*) Na př. *D. König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

**) Nesmí tedy také být žádný uzel isolován.

Potom kvadratická forma

$$f \equiv \sum_{(i,j)\in D_0} (\xi_i - \xi_j)^2$$

je nezáporná a nabývá hodnoty nula jen pro $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{n+1}$, což snadno plyne ze souvislosti grafu. Hlavní minory matice příslušné této kvadratické formě jsou až do n-tého řádu včetně kladné (a její determinant je roven nule). Existuje tedy kladné číslo ε tak, že také forma

$$f^* \equiv f - \varepsilon \sum_{(i,j)\in D_2} (\xi_i - \xi_j)^2 \equiv \sum_{i,j=1}^{n+1} v_{ij}\xi_i\xi_j$$

má uvedenou vlastnost, t. j. je nezáporná a rovna nule jen pro $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{n+1}$. Pro $\cos \varphi_{ij} = \frac{-v_{ij}}{\sqrt{v_{ii}v_{jj}}}$ existuje podle věty 6 simplex, který má úhly φ_{ij} vyhovující podmínce věty. Tím je důkaz proveden.

Poněvadž souvislý graf o m uzlech má alespoň $m - 1$ hran, a přitom existují grafy o $m - 1$ hranách (t. zv. stromy), plyne odtud ihned věta:

Věta 12. *Každý n-simplex má alespoň n ostrých vnitřních úhlů. Existují n-simplexy, které mají právě n ostrých vnitřních úhlů (a zbylé úhly tupé nebo pravé).*

Věta 13. *Z vnitřních úhlů přilehlých k jedné stěně simplexu je alespoň jeden ostrý.*

Důkaz. Kdyby žádný z těchto úhlů nebyl ostrý, byl by příslušný uzel v grafu isolován.

Ještě si zavedeme tuto definici, která zobecňuje pojem pravoúhlého trojúhelníka:

Definice. *Takový n-simplex, který má právě n ostrých vnitřních úhlů a všechny ostatní (t. j. $\binom{n}{2}$) vnitřní úhly pravé, nazveme pravoúhlý.*

Z věty 12 plyne existence pravoúhlých simplexů. Je jich pro $n > 2$ více typů, z nichž některé budeme studovat později.

5. Koule. Nazveme $(m - 1)$-koulí (podle AG) množinu bodů v E_m této vlastnosti: existuje bod S v E_m a kladné číslo r tak, že tato množina je totožná s množinou bodů v E_m, které mají od bodu S vzdálenost r (bod S je střed a r poloměr této $(m - 1)$-koule).

Ve větě 14 popíšeme strukturu všech $(n - 1)$-koulí v našem E_n v barycentrických souřadnicích vzhledem k danému simplexu o hranách $\sqrt{e_{ij}}$:

Věta 14. *V E_n má $(n - 1)$-koule v barycentrických souřadnicích tvar*

$$\alpha_0(exx) - 2\sum_{i=1}^{n+1} x_i \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0 , \tag{5,1}$$

kde

$$\alpha_0 \neq 0 \tag{5,2}$$

a

$$\gamma \sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs}\alpha_r\alpha_s > 0 \,. \tag{5,3}$$

Obráceně, každá množina s vlastností (5,1), (5,2), (5,3) *je koule o středu* $S = (s_1, \ldots, s_{n+1})$,

$$s_i = \sum_{r=0}^{n+1} g_{ir}\alpha_r \tag{5,4}$$

a poloměru

$$r = \sqrt{-\frac{\sum\limits_{0}^{n+1} g_{rs}\alpha_r\alpha_s}{2\Delta\alpha_0^2}} \,. \tag{5,5}$$

Důkaz. Budiž dána $(n - 1)$-koule, t. j. existuje vlastní $S = (s_1, \ldots, s_{n+1})$ a $r > 0$ tak, že $X = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ leží na této kouli právě tehdy, je-li

$$-\frac{(exx)}{2(\sum\limits_i x_i)^2} + \frac{(esx)}{\Sigma s_i \, \Sigma x_i} - \frac{(ess)}{2(\Sigma s_i)^2} - r^2 = 0$$

čili platí-li $2(\sum\limits_i s_i)^2(exx) - 2\sum\limits_i x_i[2(esx)\,\Sigma s_i - (ess)\,\Sigma x_i - 2r^2(\Sigma s_i)^2\,\Sigma x_i] = 0$, tedy (5,1), kde $\alpha_0 = 2(\Sigma s_i)^2 \neq 0$, $\alpha_k = 2\sum\limits_i s_i \sum\limits_i e_{ik}s_i - (ess) - 2r^2(\Sigma s_i)^2$. Je proto podle (2,15)

$$\sum_{r=0}^{n+1} g_{kr}\alpha_r = 2\Delta\, s_k \sum_i s_i = \frac{\Delta}{\sum\limits_i s_i}\alpha_0 s_k \,, \quad k = 1, \ldots, n+1 \,, \tag{5,6}$$

$$\sum_{r=0}^{n+1} g_{0r}\alpha_r = -\Delta[(ess) + 2r^2(\Sigma s_i)^2] = -\frac{\Delta}{2(\Sigma s_i)^2}[(ess) + 2r^2(\Sigma s_i)^2]\,\alpha_0 \,. \tag{5,7}$$

Odtud $\sum\limits_{r,s=0}^{n+1} g_{rs}\alpha_r\alpha_s = -4\Delta\alpha_0 r^2(\Sigma s_i)^2 = -2\Delta\alpha_0^2 r^2$, takže podle (3,8) skutečně platí (5,3).

Je-li obráceně dána množina bodů vyhovujících (5,1), (5,2) a (5,3), potom levé strany rovnic (5,6) nejsou vesměs rovny nule, neboť jejich součet je podle (2,15a) a (2,15d) roven $\Delta\alpha_0 \neq 0$. Položme

$$s_k = \sum_{r=0}^{n+1} g_{kr}\alpha_r \,, \quad k = 1, \ldots, n+1 \,,$$

takže $\sum\limits_i s_i = \Delta\alpha_0$; bod $S = (s_1, \ldots, s_{n+1})$ je tedy vlastní.

Dále číslo $-\dfrac{\sum\limits_{r,s=0}^{n+1} g_{rs}\alpha_r\alpha_s}{2\Delta\alpha_0^2}$ existuje a je kladné, jeho odmocnina r a bod S

mají už vlastnost, že $(n - 1)$-koule o středu S a poloměru r je totožná s danou množinou, jak plyne ihned výpočtem.

Poznámka I. Vztah (5,1) vznikne eliminací x_0 z

$$\sum_{r,s=0}^{n+1} e_{rs} x_r x_s = 0 , \quad \sum_{r=0}^{n+1} \alpha_r x_r = 0 . \tag{5,8}$$

Poznámka II. Věta 14 nás opravňuje přiřadit každé $(n - 1)$-kouli v E_n uspořádanou $(n + 2)$-tici homogenních souřadnic $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$, pro niž platí (5,2), (5,3) a naopak.

Věta 15. *Nechť $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ a $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n+1})$ jsou dvě $(n - 1)$-koule, které mají společný vlastní bod $Y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$. Potom tečné nadroviny k oběma $(n - 1)$-koulím v bodě Y svírají úhel φ, pro který je*

$$\cos^2 \varphi = \frac{\left(\sum\limits_{r,s=0}^{n+1} g_{rs} \alpha_r \beta_s\right)^2}{\left(\sum\limits_{r,s=0}^{n+1} g_{rs} \alpha_r \alpha_s\right)\left(\sum\limits_{r,s=0}^{n+1} g_{rs} \beta_r \beta_s\right)} , \quad 0 \leqq \varphi \leqq \tfrac{1}{2}\pi . \tag{5,9}$$

Důkaz. Tečná nadrovina v Y k $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ má rovnici

$$\Sigma \alpha_i' x_i \equiv \alpha_0 (exy) - \Sigma x_i \, \Sigma \alpha_i y_i - \Sigma y_i \, \Sigma \alpha_i x_i = 0 .$$

Podle (2,15a, b, c, d) je $\sum\limits_{i=1}^{n+1} g_{ik} \alpha_i' = \Delta \alpha_0 y_k - \Sigma y_i \sum\limits_{r=0}^{n+1} g_{kr} \alpha_r$, takže (při obdobně nalezené tečné nadrovině $\Sigma \beta_i' x_i = 0$) platí

$$\sum_{i,k=1}^{n+1} g_{ik} \alpha_i' \beta_k' = (\Sigma y_i)^2 \sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs} \alpha_r \beta_s ,$$

obdobně

$$\sum_{i,k=1}^{n+1} g_{ik} \alpha_i' \alpha_k' = (\sum_i y_i)^2 \sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs} \alpha_r \alpha_s , \quad \sum_{i,k=1}^{n+1} g_{ik} \beta_i' \beta_k' = (\sum_i y_i)^2 \sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs} \beta_r \beta_s ,$$

takže z (3,6) plyne (5,9).

Poznámka I. Úhel φ nezávisí na bodu Y, alespoň v tom smyslu, že je-li $\bar{Y}$ jiný společný bod obou $(n - 1)$-koulí, je úhel příslušných tečných nadrovin opět φ. Můžeme tedy pro některé dvojice koulí definovat úhel vztahem (5,9).

Poznámka II. Kdybychom hledali úhel nadroviny a tečné nadroviny $(n - 1)$-koule, postupovali bychom obdobně a výsledek by byl opět (5,9), kde $\alpha_0 = 0$. Že (5,9) platí (pro $\alpha_0 = \beta_0 = 0$) i pro úhel dvou nadrovin, plyne z (3,6). Můžeme tedy ztotožnit nadroviny $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$ a $(n + 2)$-tice $(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$. Jako v AG II můžeme prostě prohlásit kvadriku o rovnici (5,1) za $(n - 1)$-

sféru, kdykoliv $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+1}$ jsou reálná čísla, ne vesměs rovná nule, a klasifikovat tyto sféry ($[g\alpha\alpha] = \sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs}\alpha_r\alpha_s$):

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 \neq 0,\ \gamma[g\alpha\alpha] > 0 \ \ldots\ (n-1)\text{-koule},\\
&\alpha_0 \neq 0,\ \gamma[g\alpha\alpha] = 0 \ \ldots\ \text{bodová } (n-1)\text{-sféra},\\
&\alpha_0 \neq 0,\ \gamma[g\alpha\alpha] < 0 \ \ldots\ \text{formálně reálná sféra},\\
&\alpha_0 = 0,\ \gamma[g\alpha\alpha] > 0 \ \ldots\ \text{planární sféra},\\
&\alpha_0 = 0,\ \gamma[g\alpha\alpha] = 0 \ \ldots\ \text{(dvojnásobná) nevlastní nadrovina.}
\end{aligned}$$

Poznámka III. Pro úplnost uvedeme jednoduché vzorce pro střed a poloměr (pokud existují) průsečné sféry lineárně nezávislých sfér $(\alpha), (\beta), \ldots, (\delta)$: Pro střed $S = (s_i)$ a poloměr r platí

$$s_i = \begin{vmatrix} 0, & \alpha_0, & \beta_0, & \ldots, & \delta_0 \\ \sum_r g_{ir}\alpha_r, & [g\alpha\alpha], & [g\alpha\beta], & \ldots, & [g\alpha\delta] \\ \sum_r g_{ir}\beta_r, & [g\beta\alpha], & [g\beta\beta], & \ldots, & [g\beta\delta] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_r g_{ir}\delta_r, & [g\delta\alpha], & [g\delta\beta], & \ldots, & [g\delta\delta] \end{vmatrix}, \tag{5,10}$$

$$r^2 = \frac{\begin{vmatrix} [g\alpha\alpha], & [g\alpha\beta], & \ldots, & [g\alpha\delta] \\ [g\beta\alpha], & [g\beta\beta], & \ldots, & [g\beta\delta] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [g\delta\alpha], & [g\delta\beta], & \ldots, & [g\delta\delta] \end{vmatrix}}{2\Delta \begin{vmatrix} 0, & \alpha_0, & \beta_0, & \ldots, & \delta_0 \\ \alpha_0, & [g\alpha\alpha], & [g\alpha\beta], & \ldots, & [g\alpha\delta] \\ \beta_0, & [g\beta\alpha], & [g\beta\beta], & \ldots, & [g\beta\delta] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_0, & [g\delta\alpha], & [g\delta\beta], & \ldots, & [g\delta\delta] \end{vmatrix}}, \tag{5,11}$$

pokud ovšem zlomek v (5,11) má smysl a pokud nejsou s_i vesměs rovna nule.

Резюме.

ГЕОМЕТРИЯ СИМПЛЕКСА В E_n (первая часть)

МИРОСЛАВ ФИДЛЕР (Miroslav Fiedler), Прага.

(Поступило в редакцию 25/XI 1953 г.)

В работе изучаются симплексы в евклидовом пространстве. Приводятся теоремы о существовании и однозначности симплекса (с точностью до тождественных симплексов) при данных величинах некоторых ребер и неко-

торых внутренних углов между гранями. Основная теорема существования формулируется так:

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы в E_n существовал симплекс $O_1, \ldots, O_{n+1}$ такой, что квадраты длин его ребер равны данным действительным числам e_{ij}:

$$\varrho^2(O_i, O_j) = e_{ij}\,, \quad e_{ij} = e_{ji}\,, \quad e_{ii} = 0\,, \quad i, j = 1, \ldots, n + 1\,,$$

следующее: *квадратическая форма*

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij} x_i x_j < 0$$

для каждой ненулевой системы действительных чисел $x_1, \ldots, x_{n+1}$ такой, что $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$.

В дальнейшем строится аналитический аппарат, используемый во второй части (при помощи барицентрических координат). Помимо других проблем решается также следующая:

При каких обстоятельствах существует n-симплекс, если предписано, какие внутренние углы являются острыми, какие прямыми и какие тупыми?

Решение можно просто сформулировать, пользуясь терминологией, заимствованной из теории графов:

Такой n-симплекс существует тогда и только тогда, если граф, имеющий $n + 1$ узлов $1, 2, \ldots, n + 1$ и как раз те ребра ij, для которых внутренний угол φ_{ij} является острым, будет связным.

Отсюда непосредственно вытекает, что в каждом n-симплексе по крайней мере n внутренних углов являются острыми. Существуют симплексы, у которых как раз n внутренних углов являются острыми, а все остальные — прямые. Такие симплексы называются *прямоугольными*.

В заключение приводятся формулы для радиусов, центров и углов пересечения $(m - 1)$-сфер пересечения в E_n в виде подготовки для дальнейших частей.

Summary

GEOMETRY OF THE SIMPLEX IN E_n (1st part)

MIROSLAV FIEDLER, Prague.

(Received November 25, 1953.)

In the paper simplexes in Euclidean spaces are studied. Some theorems are proved concerning the existence and unicity of a simplex (omitting congruent simplexes) when the lengths of some edges and the sizes of some (interior)

angles of the faces are given. The main existence theorem is formulated in the following way:

The necessary and sufficient condition for the existence of a simplex in E_n such that the squares of the lengths of its edges O_iO_j (O_i are the vertices) are equal to given numbers e_{ij} ($e_{ij} = e_{ji}$, $e_{ii} = 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$) is: the quadratic form

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij}x_ix_j < 0$$

for any non-zero system of real numbers $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, such that

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0 \, .$$

Further the apparatus (by means of barycentric coordinates) for the use in the second part is built up and the following problem is solved: What are the conditions for the existence of a simplex in E_n when prescribed which of the angles of the faces are acute, which right and which obtuse.

The answer can be simply formulated in the terminology of the theory of graphs:

The necessary and sufficient condition for the existence of such simplex is that the graph with $n + 1$ nodes $1, 2, \ldots, n + 1$ and with those edges ij for which the angle φ_{ij} has to be acute, be connected.

It follows that for every n-simplex at least n angles are acute. There exist simplexes in E_n with exactly n acute angles and all remaining angles right. Such simplexes are called *rectangular* and some types (for $n > 2$) will be studied in the further parts.

Finally formulae for the radii and centres of the intersection spheres in barycentric coordinates are given.

ZAKRESLOVÁNÍ PROJEKTOVANÝCH OBJEKTŮ DO FOTOGRAFIE

JAROSLAV ŠLECHTA, Praha.

(Došlo dne 26. listopadu 1953.)

DT:526.918.51
72.012

Na několika běžněji se vyskytujících případech je v tomto článku naznačeno, jak lze použitím elementární geometrie poměrně přesně zakresliti jakýkoliv projektovaný objekt do fotografie. Všude jest uveden i konstruktivní postup, aby vlastní provedení zakreslení bylo z textu a z obrázků zřejmě patrno.

Při navrhování technických děl se někdy požaduje, aby bylo zjištěno pokud možno přesně, jak vhodně bude projektované dílo umístěno v terénu, do jaké míry bude v souladu s již postavenými objekty, resp. jak dalece poruší ráz města nebo krajiny.

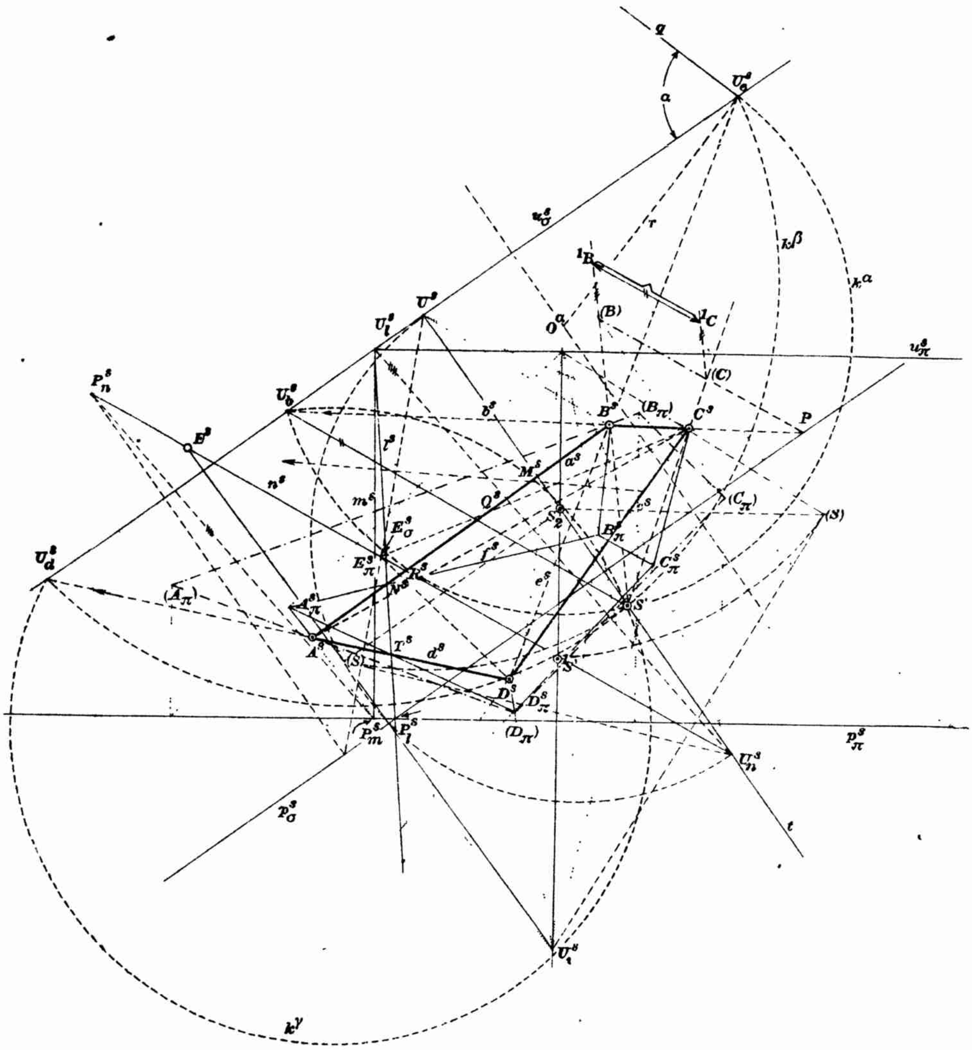
K posouzení projektovaného díla po této stránce, ať již jde o most, železnici, silnici, průmyslovou budovu nebo i celé sídliště, nejlépe se hodí zakreslení objektu do fotografie onoho území, na němž má být objekt zřízen. Má-li ovšem zakreslení poskytnouti správný obraz krajiny, jak bude tato vypadati po zřízení projektovaného objektu, musí býti provedeno přiměřeně přesně.

K řešení úlohy je především třeba si uvědomiti, jaké podklady pro řešení máme zpravidla k disposici, a pak úlohu formulovati geometricky. Pokud jde o podklady řešení, lze předpokládati, že je k disposici podrobný plán fotografovaného území včetně výškových kót, případně vrstevnic, že do tohoto plánu je zakreslena situace navrhovaného díla a že jsou přirozeně známy i výškové poměry díla. Dalším nutným předpokladem pro řešení je, že se nám podaří najíti na fotografii pět bodů, jichž situaci i výšky známe (jsou patrny v situačním plánu), a že z těchto pěti bodů leží čtyři v jedné rovině, která může mít jakoukoliv polohu; ale řešení je obzvláště jednoduché, je-li tato rovina horizontální.

Při zakreslování do fotografie nějaké části města lze řešení ještě dále zjednodušiti, neboť zmíněné čtyři body tvoří tu často obdélník, nebo dokonce čtverec. Když zmíněné body A, B, C, D, leží v rovině, která není horizontální, pak lze úlohu provést takto:

1. Máme dva průměty roviny $\sigma \equiv (ABCD)$, a to středový průmět $\sigma^s \equiv$

$\equiv (A^s B^s C^s D^s)$ na fotografii (obr. 1a) a orthogonální průmět (obr. 1b) na horizontální rovině π (situační plán) $\sigma \equiv (A^0 B^0 C^0 D^0)$. Kóty bodů jsou $A(-23)$, $B(+70)$, $C(+76)$, $D(+22)$. Mimo to známe na snímku i v plánu další bod E.

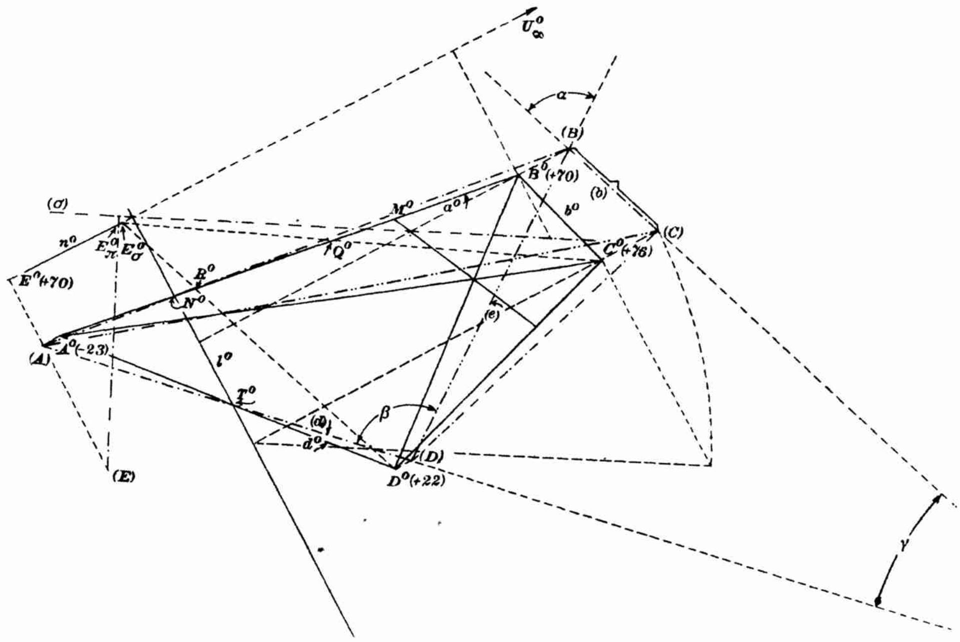


Obr. 1a.

Úlohou je sestrojiti střed promítání snímku, distanci promítání a úběžnici vodorovné roviny.

Ježto známe průměty bodů téže roviny, lze body A^s, B^s, C^s, D^s považovati za elementy bodového pole σ^s, jež jest kolineární s polem $\sigma^0 \equiv (A^0 B^0 C^0 D^0)$. Najdeme-li v této kolineaci k úběžné přímce u_σ^0 pole σ^0 odpovídající přímku

u^s_σ, je tato přímka úběžnicí roviny σ na fotografii. Určíme dále v situačním plánu území (obr. 1b) kolmý průmět pátého zvoleného bodu $E(+\ 70)$ do roviny $\sigma \equiv (A^0B^0C^0D^0)$ a označíme E^0_σ. Rovněž k tomuto bodu lze najíti bod odpovídající v poli σ^s, a to nejlépe tak, že v situačním plánu (obr. 1b) vytkneme na spojnici bodů E^0B^0, t. j. v řadě bodů $a^0 \equiv (A^0B^0M^0)$ body Q^0 a R^0 (z nichž Q^0 dostaneme v průsečíku spojnice $E^0_\sigma C^0$ s a^0; R^0 pak vznikne v průsečíku přímky $E^0_\sigma D^0$ rovněž s a^0). K těmto dvěma bodům najdeme body odpovídající v prometné řadě $a^s \equiv (A^sB^sM^s)$ na fotografii (obr. 1a). Konstruktivně lze to



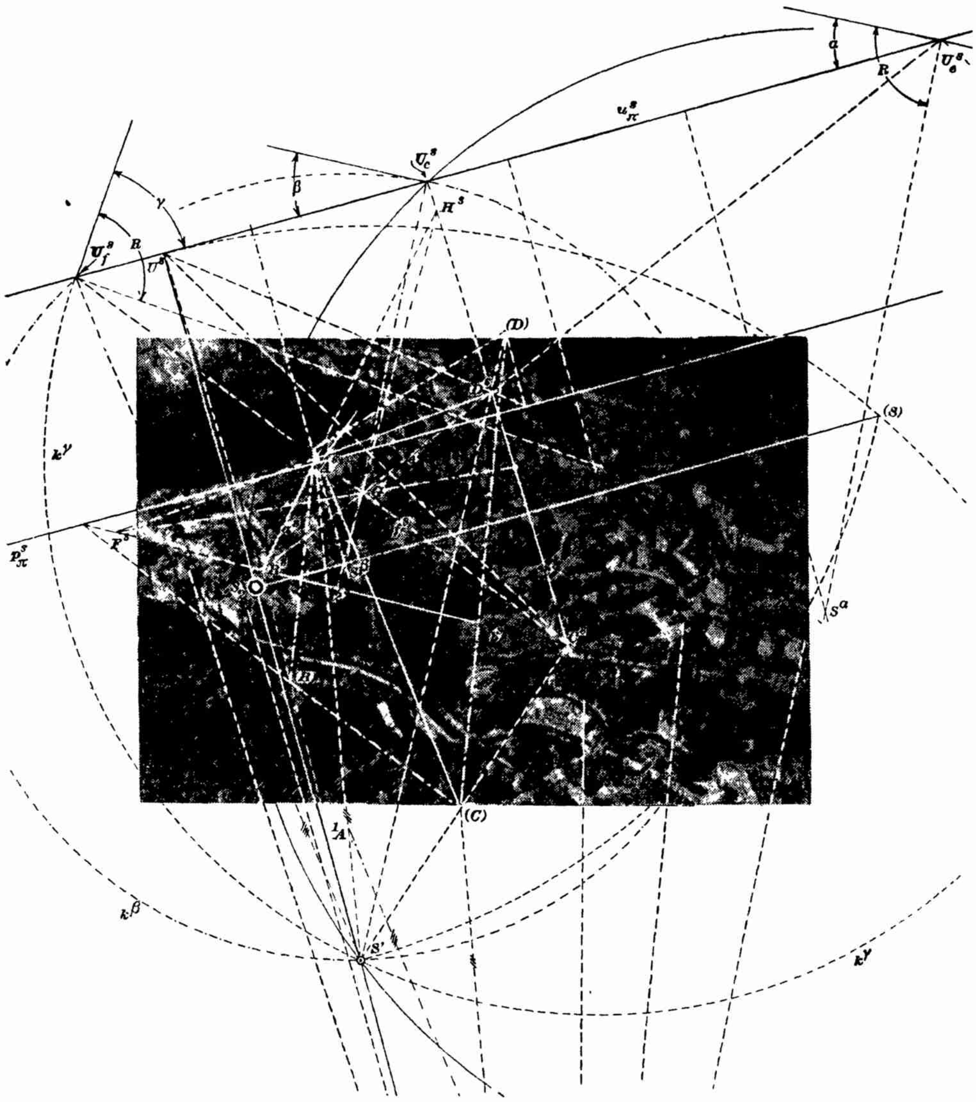
Obr. 1b.

provésti elementárně převedením řad do polohy perspektivní, nejlépe pomocí proužku papíru (koincidenční trojiny) — viz příklad v následujícím odstavci (obr. 2). Získali jsme tedy v obr. 1a již úběžnici u^s_σ a bod E^s_σ. V průsečíku přímek $b^s \equiv (B^sC^s)$, $d^s \equiv (A^sD^s)$ a $e^s \equiv (B^sD^s)$ s úběžnicí u^s jsou přístupné úběžníky U^s_b, U^s_d, U^s_e stran čtyřrohu $A^sB^sC^sD^s$ (zbývající tři úběžníky stran a^s, c^s, f^s vycházejí v obr. 1a mimo nákresnu). Při sestrojování středového průmětu dostali bychom úběžníky, jak známo, tak, že bychom středem S perspektivní kolineace mezi středovým průmětem a sklopením roviny vedli rovnoběžky se směry stran a, d, e.

Kdybychom tedy vedli obráceně zmíněnými úběžníky rovnoběžky se směry stran a, d, e, dostali bychom hledaný střed kolineace S. Označíme-li úhel přímek b, e písmenem α, úhel přímek e, d písmenem β a úhel přímek b, d písmenem γ (skutečné velikosti úhlů α, β, γ byly určeny ve sklopení v situačním plánku — obr. 1b), tu lze, jak patrno, sestrojiti střed kolineace S' jako společný průsečík kružnic k^α, k^β a k^γ které sestrojíme jako geometrická místa bodů, z nichž spatřujeme úsečky $U^s_b U^s_e$ pod úhlem α, $U^s_d U^s_e$ pod úhlem β a $U^s_d U^s_b$ pod úhlem γ.

Sestrojení kružnice k^α: Určíme symetrálu úsečky $U^s_b U^s_e$, naneseme úhel $qU^s_e =$ $= \alpha$ a vedeme bodem U^s_e přímku $r \perp q$, na symetrále úsečky $U^s_b U^s_e$ dostaneme pak střed O^α kružnice k^α. Obdobně sestrojíme k^β a k^γ. Spustíme-li dále ze středu kolineace S' kolmici t na úběžnici u^s_σ, dostaneme úběžník U^s přímek spádových roviny σ. V průsečíku přímky t se spojnicí $E^s E^s_\sigma$ dostaneme úběžník normál roviny σ, který jest v obr. 1a označen U^s_n. Opíšeme dále nad úsečkou $U^s U^s_n$ jako průměrem kružnici, kterou protneme kružnicí sestrojenou z bodu U^s poloměrem $U^s S'$, čímž vznikne bod (S). Na kolmici spuštěné z tohoto bodu na $U^s U^s_n$, dostaneme orthogonální průmět středu promítání S_2. Vzdálenost $S_2(S)$ je, jak patrno, distance středového průmětu (fotografie).

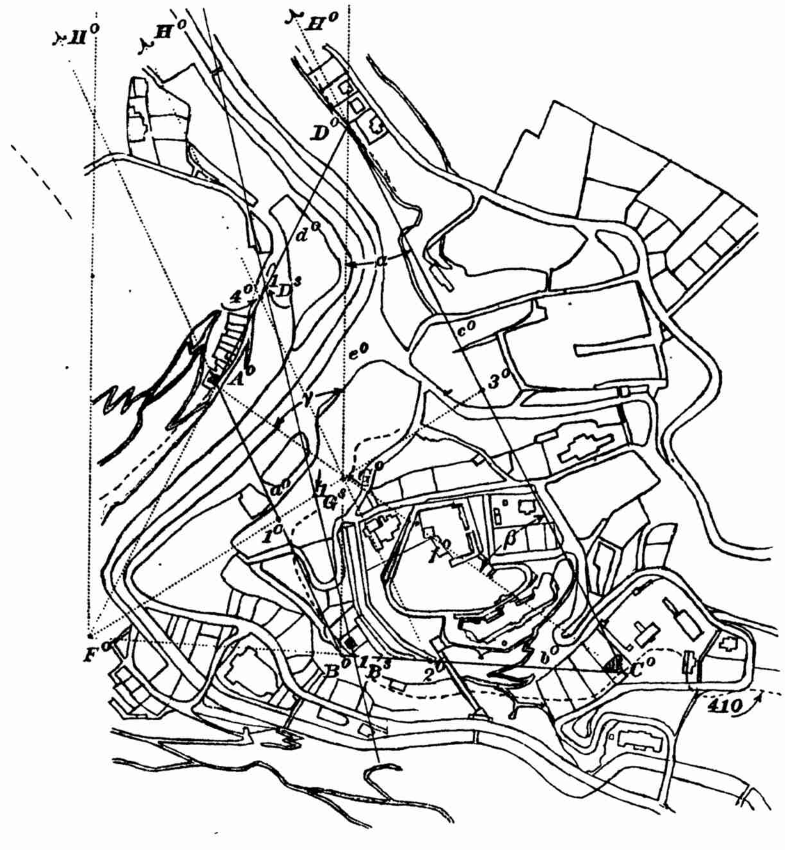
Polohu stopy p^s_σ roviny σ určíme z podmínky, že v perspektivní kolineaci mezi body fotografie a sklopenými body roviny musí ve sklopení vyjíti správné rozměry čtyřrohu $ABCD$ ve skutečné velikosti. Konstruktivně lze této podmínce vyhověti tak, že na paprsku $S'B^s$ zvolíme libovolný bod ${}^1B$ a tímto bodem vedeme ${}^1B^1C \parallel S'U^s_b$. Učiníme pak ${}^1B^1C$ rovno skutečné délce úsečky BC (získána ve sklopení v obr. 1b a označena svorkou jak v obr. 1b, tak po přenesení v obr. 1a). Dále vedeme, jak patrno v obr. 1a bodem ${}^1C$ rovnoběžkou s přímkou ${}^1BS'$ a na prodloužení úsečky $S'C^s$ dostaneme bod (C). Vedeme-li dále $(C)(B) \parallel {}^1B^1C \parallel S'U^s_b$, dostaneme v průsečíku $(B)(C)$ s $b^s \equiv (B^s C^s)$ bod P, jímž vedeme stopu p^s_σ rovnoběžně s u^s_σ. Kdyby body $ABCD$ byly vesměs v horizontální rovině, bylo by již nyní možno celou situaci z obr. 1b přenésti na fotografie podle pravidel středového promítání. Je-li však rovina bodů $ABCD$ nakloněna k horizontální rovině, pak by vynášení bylo velmi zdlouhavé a nepohodlné, proto zavedeme si do fotografie úběžnici a stopu horizontální roviny. Označme horizontální rovinu písmenou π (první průmětna kótovaného promítání — situačního plánu). Průsečnice roviny σ a π se sestrojí v situačním plánu snadno jako stopa roviny σ na první průmětně (v obr. 1b označena l^0). Středový průmět průsečnice l^s dostaneme nejkratčeji tak, že sestrojíme body N^s a T^s odpovídající bodům N^0 a T^0 na stranách a^0 a d^0 opět pomocí projektivní příbuznosti bodových řad. Tam, kde l^s protne u^s_σ, dostaneme úběžník U^s_l, kde protne l^s stopu p^s_σ, dostaneme stopník P^s_l. Známe tedy stopník a úběžník přímky l, jež leží v rovině π. K určení stopy a úběžnice roviny π potřebujeme ještě znáti jeden bod této roviny. Poměrně snadno lze určiti středový průmět bodu E^s_π, v němž normála $n \equiv EE_\sigma$ protíná rovinu π. Na řadách n^s (obr. 1a) a n^0 (obr. 1b) známe tři družiny vzájemně si odpovídajících bodů: Na n^0 jsou to body E^0, E^0_σ a úběžný bod normály U^0_∞. Těmto bodům odpovídají sdružené body E^s, E^s_σ a U^s_n. K bodu E^0_π řady n^0 najdeme pak odpovídající bod E^s_π zase nejlépe proužkem papíru (koincidenční trojiny). Středový obraz přímky n^s doplníme pak ještě stopníkem P^s_n: vedeme spojnici $U^sE^s_\sigma$, až protne p^s_σ, a tímto



Obr. 2a.

bodem vedeme rovnoběžku se spojnicí $U^s_nU^s$. Tato rovnoběžka vytne na n^s bod P^s_n, jak ostatně plyne ze zásad středového promítání. Vedeme-li dále přímku $m \parallel l$ a určíme její stopník P^s_m, dostaneme (v obr. 1a vedena spojnice bodu U^s_l

s bodem U^s a bodem P^s_n vedeno $P^s_n P^s_m \parallel U^s_l U^s_n$) ve spojnici $P^s_m P^s_l$ stopu p^s_π horizontální roviny a bodem U^s_n vedeme pak úběžnici u^s_π rovnoběžně. V obr. 1a sestrojen ještě úběžník normál horizontální roviny U^s_v a střed kolineace ${}^1S'$, dále spuštěny kolmice z bodů A, B, C, D, čímž vznikly průměty do roviny π: A_π, B_π, C_π a D_π. Sklopíme-li A_π, B_π, C_π a D_π, dostaneme čtyřroh (A_π), (B_π), (C_π) a (D_π), který je shodný se situačním plánem (kótovaným průmětem) $A^0B^0C^0D^0$.



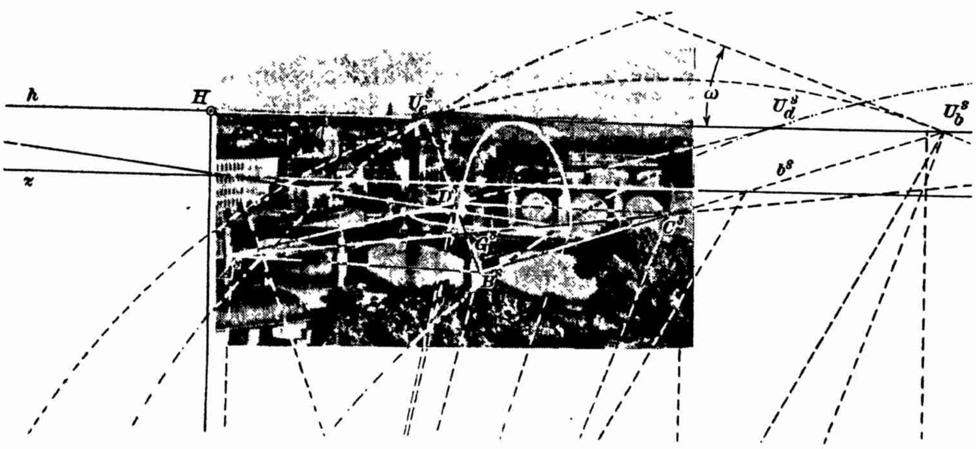
Obr. 2b.

Toto sklopení jest v obr. 1a provedeno tečkovaně, čtyřroh $(A^0)(B^0)(C^0)(D^0)$ proveden čerchovaně.

2. Konstrukce se značně zjednoduší, když body A, B, C, D leží v rovině horizontální, čili když roviny σ a π se ztotožní. Obvykle lze takové body vyhledati, takže při praktickém provádění se úloha vyskytuje spíše v této jednodušší formě. V obr. 2a je uvedena reprodukce leteckého snímku jistého území, v obr. 2b pak je schematický situační plán téhož území. Na fotografii vytyčeny body A^s, B^s, C^s, D^s, které leží v téže horizontální rovině a mají, jak patrno z obr. 2b, všechny nadmořskou výšku 410 m. Část vrstevnice 410 v okolí bodu A^0, B^0, C^0, D^0 v obr. 2b je vyznačena čárkovaně — kóta 410 připsána. K úběžnému bodu U_e^0 (obr. 2b) úhlopříčky $e^0 \equiv (E^0D^0G^0)$ určíme kolineárný bod (obr. 2a) v řadě $e^s \equiv (B^sD^sG^s)$ tak, že přeneseme body B^s, G^s, D^s na proužek papíru a v obr. 2b posunujeme tento papír tak dlouho, až příslušné body na proužku papíru budou na paprscích F^0D^0, F^0G^0, F^0B^0. Tato poloha proužku je v obr. 2b zakreslena plnou čarou a označena ${}^1e^s \equiv ({}^1D^s, {}^1G^s, {}^1B^s)$. Vedeme-li bodem F^0 rovnoběžku s e^0, vytneme, jak patrno, na ${}^1e^0$ bod ${}^1U_e^s$, jenž odpovídá úběžnému bodu řady e^0. Tento bod přeneseme na zmíněném proužku papíru do obr. 2a, čímž dostaneme na e^s bod U_e^s. Obdobně dostaneme na $c^s \equiv (C^sD^sB^s)$ bod U_c^s a na $f^s \equiv (A^sC^sG^s)$ bod U_f^s. Body U_e^s, U_c^s a U_f^s leží ovšem na jedné přímce, na úběžnici horizontální rovin u_π^s. Střed perspektivní kolineace mezi středovým průmětem (fotografií) a sklopením roviny π určíme tak, jak popsáno v předešlém oddíle pro rovinu σ, t. j. bod S' určíme jako společný průsečík tří kružnic k^α, k^β, k^γ. Kružnici k^α sestrojíme jako geometrické místo bodů, z nichž spatřujeme úsečku $U_c^sU_e^s$ pod úhlem α, který svírají strany c, e čtyřrohu $EBCD$ a tudíž též strany c^0, e^0 čtyřrohu $A^0B^0C^0D^0$. Obdobně určíme k^β jako geometrické místo bodů, z nichž spatřujeme úsečku $U_f^sU_c^s$ pod úhlem β, který svírají strany c^0, f^0. Kružnici k^γ stanovíme pak stejným postupem na základě úhlu γ, který svírají strany e^0, f^0. Dále postupujeme stejně jako v oddíle předchozím: Spuštěním kolmice z S' na u_π^s vznikne úběžník spádových přímek U^s. Polohu stopy p^s určíme pak z podmínky, že sklopená délka úsečky AC se musí rovnati A^0C^0. Naneseme tedy od libovolného bodu ${}^1A$ paprsku $S'A^s$ rovnoběžně s $S'U_f^s$ délku A^0B^0 do bodu ${}^1C$ a bodem ${}^1C$ vedeme s $S'A^s$ rovnoběžku, až protne paprsek $S'C^s$ v bodě (C). Pak vedeme $(C)(A)$ rovnoběžně s ${}^1A{}^1C$ a v průsečíku s A^sC^s dostaneme bod X, jímž vedeme $p_\pi^s \parallel u_\pi^s$. Abychom mohli sestrojiti orthogonální průmět středu promítání, jest nutno i zde určiti úběžník normál k horizontální rovině čili úběžník vertikál. Na fotografii tohoto území je patrna celá řada vertikálních hran, takže není nutno určovati vertikálu pomocí zvláštního bodu E ležícího mimo rovinu $ABCD$. V obr. 2a byly prodlouženy obrazy vertikálních hran (nároží) několika budov a získán tak na přímce $S'U^s$ úběžník vertikál U_v^s. Nad $U_v^sU^s$ jako průměrem opíšeme kružnici, kterou přetneme poloměrem U^sS' z bodu U^s. Tím dostáváme bod (S), z něhož vedeme $(S)S_2 \perp S'U^s$. Tak vznikne S_2 obdobně jako v obr. 1a.

Chceme-li pak zobraziti do fotografie nějaký objekt daný v situačním plánu, postupujeme již dále jako při konstrukci středového průmětu.

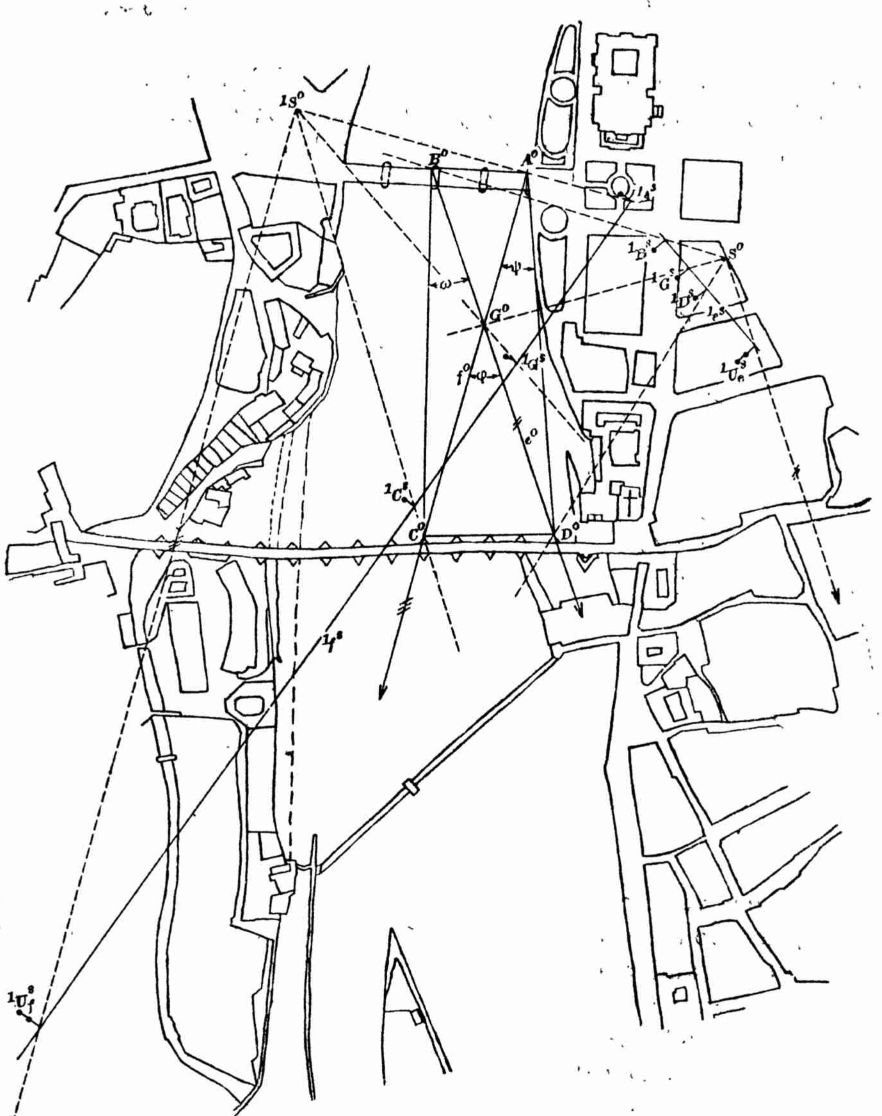
3. K dalšímu podstatnému zjednodušení konstrukcí dojde, když body A, B, C, D jsou v rovině horizontální a když úběžník vertikál je v nekonečnu, čili když obrazy vertikál na fotografii jsou svislé. (Rovina snímku je svislá.) Jako příklad tohoto případu je uvedena v obr. 3a fotografie pohlednice zobrazující několik pražských mostů, z nichž most Mánesův a Karlův jsou v popředí. Body A^s, B^s, C^s, D^s voleny na hladině Vltavy, a to body A^s a B^s pod lícem viditelných patek oblouků, body C^s a D^s pak rovněž na hladině, avšak v hrotech pátého, resp. prvého návodního pilíře. V obr. 3b je schematický snímek příslušné části katastrální mapy a vrcholy čtyřrohu odpovídající bodům A^s, B^s, C^s, D^s jsou v této situaci označeny A^0, B^0, C^0, D^0. Obdobně jako v případě předchozím i zde určíme k úběžnému bodu U_e^0 úhlopříčky $e^0 \equiv (B^0D^0G^0)$ kolineárný bod v řadě $e^s \equiv (B^sD^sG^s)$ tak, že přeneseme body B^s, G^s, D^s na proužek papíru a v obraze 3b posunujeme proužkem papíru tak dlouho, až tyto body budou incidentní s paprsky, jimiž se promítá řada bodová $e^0 \equiv (B^0G^0D^0)$ z libo-



Obr. 3a.

volně zvoleného bodu S^0. Tato poloha proužku je v obr. 3b označena ${}^1e^s \equiv$ $\equiv ({}^1D^s, {}^1G^s, {}^1B^s)$. Vedeme-li bodem S^0 rovnoběžku s e^0, vytne tato rovnoběžka na ${}^1e^s$ bod ${}^1U_e^s$ a po přenesení proužku na e^s též bod U_e^s (obr. 3b). Obdobně dostaneme na $f^s \equiv (A^s, G^s, C^s)$ bod U_f^s — řada bodů f^0 v obr. 3b promítnuta z libovolného bodu ${}^1S^0$, koincidencí stanovena poloha ${}^1f^s$, dále bod ${}^1U_f^s$ a po přenesení do obr. 3a bod U_f^s. Spojnice bodů U_e^s a U_f^s dává úběžnici roviny horizontální u_π^s čili horizont obrazu h. Kontrolou správnosti konstrukce horizontu je to, že horizont takto určený musí vyjíti opravdu do horizontu fotografie čili do obrazu velmi vzdálených objektů.

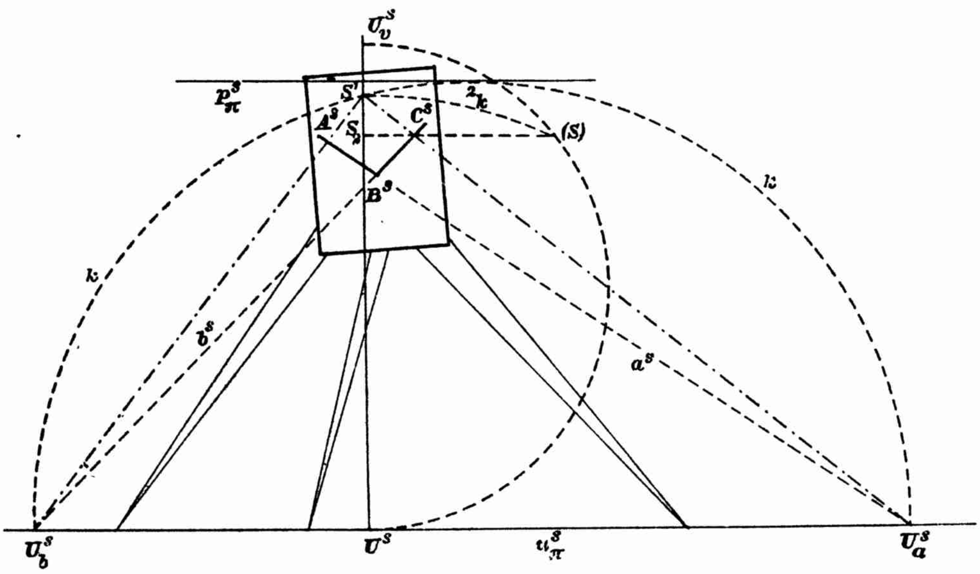
Střed perspektivní kolineace mezi středovým průmětem (fotografií) a sklopením roviny π určíme obdobně jako v oddílech 1 a 2, t. j. jako společný průsečík tří kružnic, z nichž spatřujeme úsečku $U_e^sU_f^s$ pod úhlem φ, $U_f^sU_a^s$ pod úhlem ψ a úsečku $U_e^sU_b^s$ pod úhlm ω. Ježto úběžník vertikál je, jak patrno, v nekonečnu, vznikne spuštěním kolmice z bodu S' na horizont v patě této kolmice hlavní bod H. Hlavní bod vychází mimo obrázek, což svědčí o tom, že pohlednice vznikla zvětšením části negativu, jehož střed nebyl příliš odchylný od bodu H. Rovněž poloha stopy horizontální roviny čili základnice obrazu z se určí obdobně jako v odst. 2: Z podmínky, že úsečka $\overrightarrow{(B)(C)}$ musí být rovnoběžná s $S'U_b^s$, při čemž $\overline{(B)(C)} = \overline{B^0C^0}$, a že současně musí body (B) a (C) ležeti na spojnici $S'B^s$ resp. $S'C^s$, určí se poloha bodů (B) a (C). Základni-



Obr. 3b.

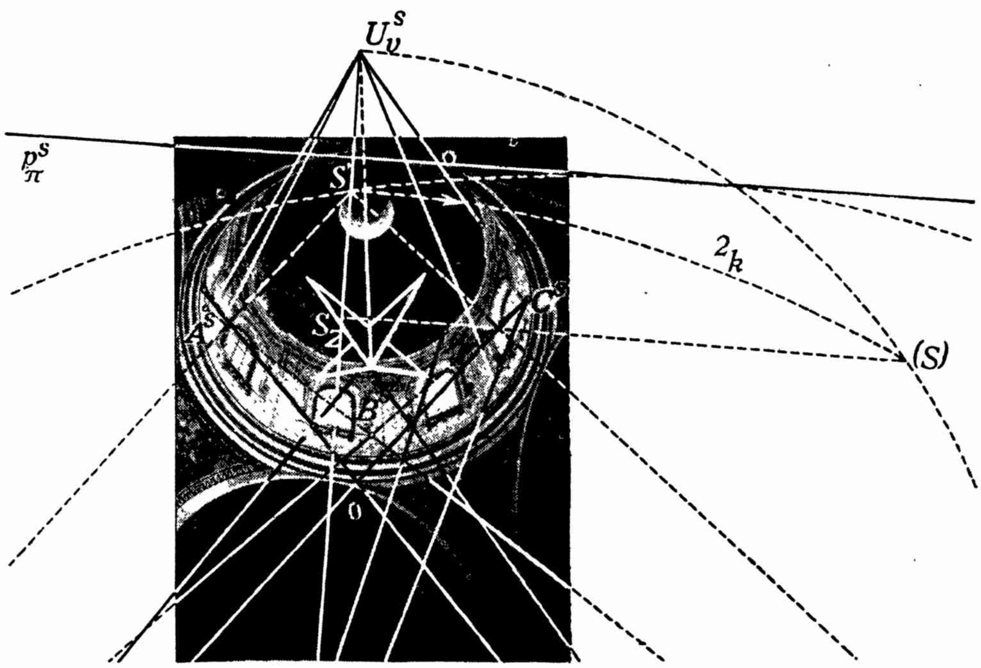
ce pak prochází průsečíkem spojnice $(B)(C)$ se spojnicí B^sC^s rovnoběžně s horizontem. Sklopení dalších bodů A^s, D^s se provede podle pravidel známých ze středového promítání (obr. 3a). Kontrolou správnosti konstrukce je, že čtyřroh $(A)(B)(C)(D)$ je shodný se čtyřrohem $A^0B^0C^0D^0$. V obraze 3b byla ve sklopení vytčena půlkružnice (k) o poloměru 50 m na hladině Vltavy a mimo to půlkružnice $({}^1k)$ v rovině vertikální. Středové průměty k^s i ${}^1k^s$ sestrojeny v obr. 3a podle pravidel středového promítání. Jak patrno, dotýká se ${}^1k^s$ právě horizontu, čili zjišťujeme, že bylo fotografováno s výšky as 50 m nad hladinou Vltavy.

4. Ještě další zjednodušení konstrukce nastane, když na fotografii je možno najíti objekt, jehož průmět do roviny horizontální je pravidelný mnohoúhelník. V obr. 4 jest uvedena fotografie vnitřku kupole chrámu sv. Kříže v Děčíně,



Obr. 4a.

která se tvarem velmi podobá známé kupoli chrámu sv. Petra v Římě. Na fotografii kupole bylo vyhledáno několik párů rovnoběžek, které určí přímo body na úběžnici horizontální roviny u_π^s. Zvolené body jsou na fotografii černě okroužkovány. Z vlastností pravidelného osmiúhelníka pak plyne, že úhel ABC je pravý. Přímky $a^s \equiv (A^sB^s)$ a $b^s \equiv (B^sC^s)$ určí pak na u_π^s body U_a^s resp. U_b^s. Potřebný střed kolineace S' bude pak zřejmě na kružnici opsané nad úsečkou $U_a^sU_b^s$ jako průměrem, neboť z bodů této kružnice spatřujeme uvedenou úsečku pod pravým úhlem. Mimo to musí ještě býti bod S' na kolmici spuštěné z úběžníka vertikál U_v^s na u_π^s. Úběžník U_v^s dostaneme v průsečíku obrazů prodloužených vertikálních hran. V průsečíku kolmice s kružnicí k je hledaný střed kolineace S'. Obdobně jako v obr. 3a i zde určíme bod (S) v průsečíku kružnice opsané nad $U_v^sU^s$. Označíme-li dále patu kolmice spuštěné s U_v^s na u_π^s písmenem U^s (úběžník přímek spádových horizontální roviny π), pak ze základních konstrukcí středového promítání vychází, že sklopený střed promítání (S) je v průsečíku kružnice ^1k opsané nad $U_v^sU^s$ jako průměrem a kružnice ^2k opsané ze středu U^s poloměrem U^sS'. Hlavní bod dostaneme pak, když vedeme $(S)S_2 \perp \perp U_v^sU^s$. Najdeme-li na fotografii obraz úsečky, ležící v horizontální rovině, a známe-li skutečnou velikost této úsečky, pak lze vždy určiti polohu stopy příslušné horizontální roviny způsobem popsaným v odst. 2. Neznáme-li takovou délku, lze p_π^s voliti libovolně, avšak rovnoběžnou s u_π^s. Z fotografie nelze pak



Obr. 4b.

dostati skutečné velikosti úseček, nýbrž pouze velikosti poměrné. Na obr. 4 zvolena stopa roviny obsahující patu válcové části kupole p_π^s jako tečna k obrazu příslušné pateční čáry na fotografii, a to rovnoběžná s u_π^s. V této rovině pak sestrojen jako příklad čtvercový základ tělesa, složeného ze čtyř rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků, jichž strany jsou rovny čtvrtině průměru válcové části kupole. (Těleso je ve svislé ose klenby.) Příslušné elementární konstrukce byly v obrázku vynechány, aby nebyl příliš zaplněn čarami.

Stejným způsobem bychom postupovali, kdyby šlo o objekt nad obdélníkem nebo čtvercem. Pro stanovení bodu S' použili bychom pak úhlu úhlopříček.

5. Kdyby na fotografii byl zobrazen objekt nad pravidelným mnohoúhelníkem, příp. čtvercem nebo obdélníkem, a kdyby mimo to byl úběžník vertikál v nekonečnu, pak využívajíce jednoho pravého úhlu a úhlu úhlopříček, sestrojili bychom dolní distančník v průsečíku dvou kružnic, z nichž spatřujeme vzdálenosti příslušných úběžníků na horizontu pod úhlem pravým, event. pod úhlem úhlopříček. Tento případ není doložen obrazem, neboť je tak jednoduchý, že jej lze na základě předchozího bezpečně zvládnout.

DVĚ VĚTY O ŘEŠENÍ ROVNICE $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

KAREL REKTORYS, Praha.

(Došlo 4. února 1954.) DT: 517.947.43

V této práci je podáno řešení dvou základních problémů pro vedení tepla ve dvojrozměrných pravoúhlých oborech při velmi obecných počátečních a krajových podmínkách. Na základě těchto dvou řešení je možno sestavit řešení příslušného obecného problému vedení tepla při časově neproměnných krajových podmínkách.

Jádro práce tvoří dvě věty, týkající se prvního a druhého problému vedení tepla:

I. Problém (stacionární vedení tepla):

Nechť v intervalu $\langle 0; \pi \rangle$ je dána funkce $f(x)$ spojitá ve všech bodech tohoto intervalu s výjimkou bodů, tvořících množinu $\mathfrak{M}$ míry nula,[1]) při čemž $|f(x)| \leqq M$ v $\langle 0; \pi \rangle$. Hledejme funkci $V(x, y)$, definovanou ve čtverci P $(0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi)$, těchto vlastností:

1. $V(x, y)$ je harmonická uvnitř P, t. j. vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi)\,. \tag{1}$$

2. $V(x, y)$ je v P omezená konstantou M (stejnou, jako funkce $f(x)$ v $\langle 0; \pi \rangle$).
3. $V(x, y)$ je spojitá v oboru $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 < y \leqq \pi$, při čemž
   a) $V(0, y) = V(\pi, y) = 0 \quad (0 < y \leqq \pi)$, (2)
   b) $V(x, \pi) = 0 \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$. (3)
4. V každém vnitřním bodě x_0 intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ $(y = 0)$, v němž je $f(x)$ spojitá, je $V(x, y)$ spojitá jako funkce proměnných x a y, a platí

$$V(x_0, 0) = f(x_0)\,.$$

[1]) Integrace funkcí a jejich měřitelnost jsou myšleny podle *Lebesguea*.

Tvrdím:

Věta I. *Existuje jedna a (až na body množiny $\mathfrak{M}$) jen jedna funkce $V(x, y)$ těchto vlastností, a tato funkce je dána pro $y > 0$ řadou*

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} \tag{4}$$

$$\left(a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x') \sin nx' \, dx'\right), \tag{5}$$

pro $y = 0$

$$V(x, 0) = f(x). \tag{6}$$

II. problém (časově proměnný):

Budiž ve čtverci P $(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi)$ dána funkce $f(x, y)$ $[|f(x, y)| \leqq \leqq N]$, spojitá ve všech bodech čtverce P s výjimkou bodů, které tvoří množinu $\mathfrak{N}$ míry nula. Hledejme funkci $F(x, y, t)$, omezenou v P a pro $t \geqq 0$ touž konstantou N, spojitou v P pro $t > 0$, vyhovující rovnici

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \text{uvnitř } P,\ t > 0, \tag{7}$$

při čemž

a) $F(0, y, t) = F(\pi, y, t) = F(x, 0, t) = F(x, \pi, t) = 0 \quad (t > 0),$ (8)

b) ve všech bodech, kde $f(x, y)$ je spojitá, je také $F(x, y, t)$ pro $t = 0$ spojitá jako funkce proměnných x, y, t a je v nich $F(x, y, 0) = f(x, y)$.

Tvrdím:

Věta II. *Existuje jedna a (až na body množiny $\mathfrak{N}$) jen jedna funkce $F(x, y, t)$ těchto vlastností, a tato funkce je dána*

pro $t > 0$ řadou

$$F(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx \, e^{-m^2 t}\right) \sin ny \, e^{-n^2 t} \tag{9}$$

$$\left(A_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \iint_P f(x', y') \sin mx' \sin ny' \, dx' \, dy'\right) \tag{10}$$

a *pro $t = 0$*

$$F(x, y, 0) = f(x, y). \tag{11}$$

Poznámka.

Důkazy jednoznačnosti řešení jsou velmi jednoduché. Obtížnost důkazů obou vět je v tom, že je třeba dokázat, že funkce $V(x, y)$ a $F(x, y, t)$, definované rovnicemi (4), (6), (9), (11), splňují požadavky, na ně kladené, zejména bod 4 prvního problému a obdobný bod b) druhého problému. O Fourierových řadách (4) a (9) pro $y = 0$ a $t = 0$ totiž nic nevíme (řady nemusí konvergovat v žádném bodě). Tato obtíž se projevuje zejména u druhého problému, kde dosavadní kriteria pro konvergenci dvojných Fourierových řad jsou velmi nepřehledná (viz na př. TONELLI, Serie trichonometriche, str. 450).

V první kapitole je podána formulace problému. V druhé kapitole je podán důkaz omezenosti řešení, který je podkladem pro další úvahy. Ve třetí kapitole je proveden důkaz věty I, ve čtvrté kapitole důkaz věty II.

Kapitola I. Formulace problému

Při řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1.1}$$

s danými krajovými a počátečními podmínkami, jakož i při důkazu jednoznačnosti řešení, kladou se zpravidla velké požadavky na spojitost a spojitou diferencovatelnost funkcí, které vystupují v těchto podmínkách (mimo požadavky, kladené na samotný obor, v němž je problém formulován). Avšak ve skutečných matematicky formulovaných fysikálních a technických úlohách jsou tyto požadavky zřídka splněny, a to jak při krajových podmínkách (těleso v tepelné lázni), tak při počátečních podmínkách uvnitř tělesa (tepelný dotyk dvou nebo více těles, tvořících jediné těleso). Nejčastěji se setkáváme s třídou funkcí po částech spojitých. Zde již nastávají z matematického hlediska značné obtíže.

Ve své disertační práci („Jednoznačnost řešení parciálních diferenciálních rovnic pro vedení tepla při nespojitých krajových podmínkách") zabýval jsem se případem, kdy jeden rozměr uvažovaného tělesa převládal nad druhými dvěma, takže úlohu bylo lze pokládat za rovinný problém. Mimo to jsem předpokládal, že průřez uvažovaného tělesa je obdélníkového tvaru (pro jednoduchost byl uvažován čtverec, což na charakteru úlohy ničeho nemění) a že krajové podmínky (t. j. tepelná lázeň) jsou časově neproměnné. Ve zmíněné práci jsem odvodil za předpokladu, že funkce (a jejich derivace), vystupující v krajových a počátečních podmínkách, jsou po částech spojité, různé vlastnosti řešení, z fysikálního hlediska důležité, dokázal jsem jednoznačnost řešení, a mimo to jsem se zde zabýval otázkami numerického výpočtu, zejména stejnoměrnou konvergencí příslušných řad. Po stránce fysikální je zde problém řešen zcela postačujícím způsobem.

S matematického hlediska je však otázka, jak se budou chovat $V(x, y)$ resp. $F(x, y, t)$, definované rovnicemi (4), (6) a (9), (11), připustíme-li u funkcí $f(x)$ resp. $f(x, y)$ nekonečný počet nespojitostí. Řady (4) a (9) mají smysl pro $y > 0$ resp. $t > 0$ při každé integrovatelné funkci $f(x)$ resp. $f(x, y)$. Jde o to, budou-li tyto řady i pak „spojitě přiléhat" k okrajovým funkcím $f(x)$, $f(x, y)$.

V této práci je dokázáno, že za předpokladu, že $f(x)$ (resp. $f(x, y)$) je spojitá skoro všude, t. j. až na množinu míry nula, pak funkce, definovaná pro $y > 0$ řadou (4) (pro $t > 0$ řadou (9)) je spojitě prodlužitelná skoro všude na okraj $y = 0$ (resp. $t = 0$) a její spojité prodloužení je právě rovno odpovídající hodnotě $f(x)$ (resp. $f(x, y)$). Metoda důkazu je podstatně odlišná od metody užité v citované mé práci, kde důkaz spojité prodlužitelnosti funkcí, definovaných řadami (4) a (9), se opírá o stejnoměrnou konvergenci těchto řad pro $y \geqq 0$ resp. $t \geqq 0$ v určitých oborech. Při našich předpokladech o $f(x)$ a $f(x, y)$ řady (4) a (9) nemusí pro $y = 0$ resp. $t = 0$ konvergovat nikde, tím méně pak stejnoměrně.

Uvedeme zde ještě některé známé věty, které v dalším textu citujeme:

1. *Věta o maximu a minimu harmonické funkce* (viz na př. PETROVSKIJ, Parciální diferenciální rovnice, Praha 1952, str. 193):

Harmonická funkce $u(x, y)$ spojitá na uzavřené oblasti $\bar{G} = G + \Gamma$ nemůže uvnitř této oblasti nabývat větších hodnot, než je její maximum na Γ, a nemůže nabývat menších hodnot, než je její minimum na Γ.

2. *Věta o maximu a minimu řešení parabolické rovnice* (viz na př. Petrovskij, l. c., str. 267).

Každé řešení rovnice $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pro vedení tepla, definované a spojité na obdélníku Q $(0 \leqq x \leqq l,\ 0 \leqq t \leqq T)$, nabývá své největší a nejmenší hodnoty buď na jeho dolní základně (pro $t = 0$) nebo na jedné z jeho bočných stran.

3. *Abelova věta o stejnoměrné konvergenci* (viz na př. CARSLAW, Theory of Fourier's Series and Integrals, Londýn 1930, str. 149. Označení je jiné).

Nechť řada $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ konverguje stejnoměrně v $\langle a, b\rangle$ a nechť posloupnost $T_1(t), T_2(t), \ldots$ je monotonní pro každé pevné $t \geqq 0$ a stejnoměrně omezená (t. j. $|T_n(t)| \leqq K$ pro všechna n a t). Pak řada $u_1(x)\, T_1(t) + u_2(x)\,.$ $.\, T_2(t) + \ldots$ je stejnoměrně konvergentní pro všechna x z $\langle a, b\rangle$ a pro všechna $t \geqq 0$.

4. *Weierstrassova věta* (NATANSON, Těorija funkcij veščestvennoj peremennoj, Moskva 1950, str. 99).

Budiž $f(x)$ spojitá v $\langle a, b\rangle$. Pak k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje takový polynom $P(x)$, že pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ je

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon\,.$$

5. *Věta Fubiniho* (Natanson, l. c., str. 296).

Budiž v pravoúhelníku R $(a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d)$ dána integrovatelná funkce $f(x, y)$. Pak

1. funkce $f(x, y)$ uvažovaná jako funkce y bude integrovatelná pro skoro všechna $x \in \langle a, b\rangle$,

2. Označme množinu těchto x Δ. Pak funkce

$$\int_c^d f(x, y)\,dy$$

bude integrovatelná na Δ.

3. Platí

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_\Delta dx \int_c^d f(x, y)\,dy\,.$$

Kapitola 2. Omezenost řešení

Věta 2.1. *Budiž v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ dána měřitelná funkce $f(x)$. Nechť dále $|f(x)| \leqq M$ v tomto intervalu. Pak funkce $S(x, t)$, definovaná pro $t > 0$ řadou*

$$S(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx\, e^{-n^2 t} \tag{2.1}$$

$$\left(a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x') \sin nx'\, dx'\right) \tag{2.2}$$

a pro $t = 0$ vztahem

$$S(x, 0) = f(x)\,, \tag{2.3}$$

je pro všechna $x \in \langle 0, \pi \rangle$ a pro všechna $t \geqq 0$ omezená touž konstantou M.

Poznámka: Funkci $S(x, t)$ definujeme jinak pro $t > 0$ a jinak pro $t = 0$, neboť pro $t = 0$ nemusí mít řada (2.1) nikde smysl.

Abychom dokázali větu 2.1, dokážeme nejprve dvě lemmata.

Lemma 1. *Nechť $g(x)$ je polynom v $\langle 0, \pi \rangle$, $g(0) = g(\pi) = 0$, $|g(x)| \leqq K$. Pak funkce $G(x, t)$, definovaná*

pro $t > 0$ řadou

$$G(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\, e^{-n^2 t} \tag{2.4}$$

$$\left(b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x') \sin nx'\, dx'\right), \tag{2.5}$$

pro $t = 0$ rovnicí

$$G(x, 0) = g(x)\,, \tag{2.6}$$

je omezená pro všechna x a $t \geqq 0$ konstantou K.

Důkaz plyne přímo z citované věty o maximu a minimu spojitého řešení parabolické rovnice.

Funkce $G(x, t)$ splňuje totiž pro $t > 0$ rovnici

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \tag{2.7}$$

při podmínkách

$$G(0, t) = G(\pi, t) = 0 \, . \tag{2.8}$$

[Je

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (b_n \sin nx \, e^{-n^2 t}) = - b_n \sin nx \, . \, n^2 e^{-n^2 t} \, ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (b_n \sin nx \, e^{-n^2 t}) = - b_n \sin nx \, . \, n^2 e^{-n^2 t}$$

a řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \, . \, n^2 e^{-n^2 t}$$

konverguje stejnoměrně pro $t > 0$, protože

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2 t}$$

konverguje. Tedy platí (2.7).]

Mimo to $g(x)$ je polynom, tedy Fourierova řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{2.9}$$

je stejnoměrně konvergentní v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, a stejně (podle Abelovy věty) i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \, e^{-n^2 t} \, . \tag{2.10}$$

Je tedy $G(x, t)$ spojitá pro všechna x z $\langle 0, \pi \rangle$ a pro všechna $t \geqq 0$, a z toho plyne podle zmíněné věty o maximu lemma 1.

Lemma 2. *Budiž $h(x)$ spojitá v $\langle 0, \pi \rangle$, $h(0) = h(\pi) = 0$, $|h(x)| \leqq M$. Pak funkce $H(x, t)$, definovaná*

pro $t > 0$ řadou

$$H(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \, e^{-n^2 t} \tag{2.11}$$

$$\left(c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x') \sin nx' \, dx' \right) , \tag{2.12}$$

a pro $t = 0$ vztahem

$$H(x, 0) = h(x) \, , \tag{2.13}$$

je omezená pro všechna $x \in \langle 0, \pi \rangle$ a $t \geqq 0$ konstantou M.

Důkaz: Podle Weierstrassovy věty lze sestrojit posloupnost polynomů $g_i(x)$ (při čemž $g_i(0) = g_i(\pi) = 0$!), stejnoměrně konvergující k funkci $h(x)$ v $\langle 0, \pi \rangle$. T. j. k danému $\varepsilon > 0$ lze najít N tak, že

$$|g_i(x) - h(x)| < \varepsilon \tag{2.14}$$

pro všechna x z $\langle 0, \pi \rangle$ a pro všechna $i > N$.

Označme $G_i(x, t)$ funkci, definovanou

pro $t > 0$ řadou

$$G_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(i)} \sin nx \, e^{-n^2 t} \tag{2.15}$$

$$\left(b_n^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g_i(x') \sin nx' \, dx' \right), \tag{2.16}$$

a pro $t = 0$ relací

$$G_i(x, 0) = g_i(x) . \tag{2.17}$$

Jestliže $|g_i(x)| \leqq K_i$, pak podle lemmatu 1 bude také $|G_i(x, t)| \leqq K_i$. Máme nyní dokázat, že pro každé $t > 0$ bude $|H(x, t)| \leqq M$.

Vezměme určité $t_0 > 0$. Protože

$$\lim_{i \to \infty} g_i(x) = h(x)$$

stejnoměrně v $\langle 0, \pi \rangle$, je pro všechna $i > N$

$$K_i < M + \varepsilon, \ |b_n^{(i)}| < 2(M + \varepsilon), \ |c_n - b_n^{(i)}| < 2\varepsilon .$$

Tedy řady (2.15) jsou pro t_0 stejnoměrně konvergentní (vzhledem ke všem x z $\langle 0, \pi \rangle$ a ke všem $i > N$), a protože

$$\lim_{i \to \infty} b_n^{(i)} = c_n$$

stejnoměrně pro všechna n, je

$$\lim_{i \to \infty} G_i(x, t_0) = H(x, t_0) . \tag{2.18}$$

A protože $|G_i(x, t^0)| < M + \varepsilon$ pro $i > N$, je také

$$|H(x, t_0)| \leqq M + \varepsilon , \tag{2.19}$$

čili, vzhledem k libovolnosti ε

$$|H(x, t_0)| \leqq M , \tag{2.20}$$

což jsme měli dokázat.

Důkaz věty 2.1. Podle Luzinovy věty (Natanson, Těorija funkcij veščestvennoj peremennoj, Moskva 1950, str. 96), existuje ke každé funkci $\psi(x)$ měřitelné v $\langle 0, \pi \rangle$ a omezené konstantou M a ke každému $\delta > 0$ funkce $\varphi(x)$ spojitá v $\langle 0, \pi \rangle$ a omezená touž konstantou tak, že

$$mE(\psi \neq \varphi) < \delta . \tag{2.21}$$

Symbolem $mE(\psi \neq \varphi)$ rozumíme míru množiny E, t. j. množiny bodů x z $\langle 0, \pi\rangle$, v nichž $\psi(x) \neq \varphi(x)$.

Existuje tedy k naší funkci $f(x)$ a k $\varepsilon < 0$ taková funkce $\varphi(x)$ spojitá v $\langle 0, \pi\rangle$, při čemž ještě můžeme žádat $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$, že

$$\int_0^\pi |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \varepsilon \,. \tag{2.22}$$

Sestrojme posloupnost $\varepsilon_i > 0$ tak že $\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$ a příslušnou posloupnost spojitých funkcí $\varphi_i(x)$ ($|\varphi_i(x)| \leqq M$, $\varphi_i(0) = \varphi_i(\pi) = 0$) tak, že

$$\int_0^\pi |f(x) - \varphi_i(x)| \, dx < \varepsilon_i \,. \tag{2.23}$$

Označíme-li

$$d_n^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi_i(x') \sin nx' \, dx' \,, \tag{2.24}$$

pak pro libovolné n bude zřejmě

$$|a_n - d_n^{(i)}| < \varepsilon_i \,, \tag{2.25}$$

čili

$$\lim_{i\to\infty} d_n^{(i)} = a_n \tag{2.26}$$

stejnoměrně pro všechna n.

Označme

$$\Phi_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{(i)} \sin nx \, e^{-n^2 t} \quad (t > 0) \tag{2.27}$$

a zvolme určité $t_0 > 0$.

Je

$$|\Phi_i(x, t_0)| \leqq M$$

pro každé i (podle lemmatu 2).

Ze stejnoměrné konvergence řad (2.27) pro dané $t_0 > 0$ a pro všechna i, a z (2.26) plyne opět

$$\lim_{i\to\infty} \Phi_i(x, t_0) = S(x, t_0) \,, \tag{2.28}$$

z čehož

$$|S(x, t^0)| \leqq M \tag{2.29}$$

pro libovolné $t_0 > 0$, což bylo dokázati, neboť pro $t = 0$ je $|S(x, 0)| = |f(x)| \leqq$ $\leqq M$ podle předpokladu.

Poznámka. Z důkazu je vidět, že je-li $0 \leqq f(x) \leqq 2M$, pak také $0 \leqq S(x, t) \leqq$ $\leqq 2M$. To platí předně pro každý polynom $g(x)$ ($0 \leqq g(x) \leqq 2M$, $g(0) = g(\pi) =$ $= 0$), podle věty o maximu a minimu (viz lemma 1). Totéž platí — viz důkaz lemmatu 2 — pro každou funkci $h(x)$ spojitou v $\langle 0, \pi \rangle$ $(0 \leqq h(x) \leqq 2M)$, $h(0) = h(\pi) = 0$.

Nyní k $\bar{f}(x) = f(x) - M$ můžeme sestrojit spojitou funkci $\bar{\varphi}(x)$ tak, že

$$\int_0^\pi |\bar{f}(x) - \bar{\varphi}(x)| \, dx < \varepsilon ,$$

při čemž $|\bar{\varphi}(x)| \leqq M$, $\bar{\varphi}(0) = \bar{\varphi}(\pi) = -M$ (srv. (2.22)).

Pak funkce $\varphi(x) = \bar{\varphi}(x) + M$ bude kladná, $0 \leqq \varphi(x) \leqq 2M$, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ a

$$\int_0^\pi |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \varepsilon .$$

Vztahy (2.23) až (2.28) zůstanou stejné, jen místo $|\Phi_i(x, t_0)| \leqq M$ je nutno psát $0 \leqq \Phi_i(x, t_0) \leqq 2M$. Z (2,28) pak plyne $0 \leqq S(x, t) \leqq 2M$.

Věta 2.2. *Budiž dána v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ funkce $f(x)$, splňující stejné podmínky jako ve větě 2.1, t. j. $f(x)$ je měřitelná v $\langle 0, \pi \rangle$, při čemž $|f(x)| \leqq M$ v $\langle 0, \pi \rangle$.*

Pak funkce $V(x, y)$, definovaná na P $(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi)$ pro $y > 0$ řadou

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} \tag{2.30}$$

$$\left(a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x') \sin nx' \, dx'\right), \tag{2.31}$$

a pro $y = 0$ vztahem

$$V(x, 0) = f(x) ,$$

je omezená pro všechna x a y $(0 \leqq y \leqq \pi)$ číslem M.

Důkaz je zcela stejný, jako důkaz věty 2.1, neboť pro polynom $g(x)$, pro který $g(x) \leqq M$, $g(0) = g(\pi) = 0$, je příslušná funkce $V(x, y)$ omezená konstantou M, jak plyne z věty o maximu funkce harmonické na P; další body důkazu probíhají již úplně obdobně jako v důkazu věty 2.1.

Kapitola 3

Věta 3.1. *Budiž v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ dána funkce $f(x)$, mající tyto vlastnosti.*

1. *$|f(x)| \leqq M$ pro všechna x z $\langle 0, \pi \rangle$.*
2. *$f(x)$ je spojitá ve všech bodech intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ s výjimkou bodů, které tvoří množinu $\mathfrak{M}$ míry nula (tedy $f(x)$ je měřitelná funkce).*

Tvrdím: *Existuje jedna a (až na body množiny $\mathfrak{M}$) jen jedna funkce $V(x, y)$ definovaná na čtverci P $(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi)$ taková, že*

1. $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \text{ uvnitř } P. \tag{3.1}$$

2. $|V(x, y)| \leqq M$ *na* P.

3. $V(x, y)$ *je spojitá v oboru* $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 < y \leqq \pi$ *a*

a) $V(0, y) = V(\pi, y) = 0 \quad (0 < y \leqq \pi)$, (3.2)

b) $V(x, \pi) = 0 \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$. (3.3)

4. *V každém vnitřním bodě* x_0 *intervalu* $\langle 0, \pi\rangle$ $(y = 0)$, *v němž je* $f(x)$ *spojitá, je* $V(x, y)$ *spojitá jako funkce obou proměnných* x *a* y, *a je* $V(x_0, 0) = f(x_0)$.

Tato funkce je dána

pro $y > 0$ $(y \leqq \pi)$ *řadou*

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \, \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} \tag{3.4}$$

$$\left(a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x') \sin nx' \, dx'\right),$$

pro $y = 0$ *vztahem*

$$V(x, 0) = f(x) . \tag{3.5}$$

Důkaz. Dokážeme nejprve, že funkce $V(x, y)$ má požadované vlastnosti.

1. $V(x, y)$ je harmonická uvnitř P, protože každý člen řady (3.4) je harmonická funkce uvnitř P a (3.4) je stejnoměrně konvergentní pro $y_0 \leqq y \leqq \pi$, $y_0 > 0$. (Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi}$$

konverguje pro všechna $y > 0$.)

2. $|V(x, y)| \leqq M$ v P.

Plyne z věty 2.2 předcházející kapitoly.

3. Jsou splněny všechny tři podmínky bodu 3. Zřejmé.

Zbývá dokázat bod 4.

Vezměme určitý bod o souřadnici x_0 $(0 < x_0 < \pi)$, v němž je $f(x)$ spojitá, a označme jej A. Máme dokázat, že k danému $\varepsilon > 0$ existuje $\varrho_0 > 0$ tak, že $|V(B) - V(A)| < \varepsilon$ pokud $\varrho(A, B) < \varrho_0$. Přitom B je bod z P o souřadnicích x, y, $\varrho(A, B)$ je vzdálenost bodů $A(x_0, 0)$ a $B(x, y)$, $V(A) = V(x_0, 0) = f(x_0)$, $V(B) = V(x, y)$.

Označme

$$f(x) = f(x_0) + g(x) \tag{3.6}$$

v $\langle 0, \pi\rangle$. Je $g(x_0) = 0$ a $g(x)$ je v x_0 spojitá. Existuje tedy ke kladnému ε takové ϱ_1, že

$$|g(x)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \text{ pro } |x - x_0| < \varrho_1 \quad (\varrho_1 < x_0, \ \varrho_1 < \pi - x_0) .$$

Definujme funkci $g_1(x)$ takto:

$$g_1(x) = g(x) \text{ pokud } x_0 - \tfrac{1}{2}\varrho_1 \leqq x \leqq x_0 + \tfrac{1}{2}\varrho_1 , \tag{3.7}$$

$$g_1(x) = 0 \text{ v ostatních bodech intervalu } \langle 0, \pi \rangle . \tag{3.8}$$

Je tedy všude v $\langle 0, \pi \rangle$ $|g_1(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$.

Dále definujme funkci $g_2(x)$:

$$g_2(x) = 0 \text{ pokud } x_0 - \tfrac{1}{2}\varrho_1 \leqq x \leqq x \leqq x_0 + \tfrac{1}{2}\varrho_1 , \tag{3.9}$$

$$g_2(x) = g(x) \text{ v ostatních bodech intervalu} . \tag{3.10}$$

Tedy

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) \text{ v } \langle 0, \pi \rangle , \tag{3.11}$$

čili

$$f(x) = f(x_0) + g_1(x) + g_2(x) \text{ v } \langle 0, \pi \rangle . \tag{3.12}$$

Funkci příslušnou k $f(x)$ a definovanou rovnicemi (3.4) a (3.5), jsme nazvali $V(x, y)$. Funkci, definovanou obdobně a příslušnou ke $g_1(x)$ nazveme $G_1(x, y)$, funkci příslušnou ke $g_2(x)$ nazveme $G_2(x, y)$, funkci příslušnou k $f(x_0)$ nazveme $V_0(x, y)$ ($f(x_0)$ je konstantní v $\langle 0, \pi \rangle$). Zřejmě platí

$$V(x, y) = V_0(x, y) + G_1(x, y) + G_2(x, y) . \tag{3.13}$$

Podle věty 2.2 je všude v P

$$|G_1(x, y)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon . \tag{3.14}$$

Dokážeme snadno, že $V_0(x, y)$ je funkce spojitá v bodě A. Bod x_0 je vnitřním bodem intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Fourierova řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx , \tag{3.15}$$

$$\left(b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x_0) \sin nx' \, dx' \right) \tag{3.16}$$

konverguje stejnoměrně v každém uzavřeném intervalu uvnitř $(0, \pi)$, a stejně (podle Abelovy věty) i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} , \tag{3.17}$$

takže $V_0(x, y)$ je spojitá v oboru $0 < x < \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi$. Existuje tedy k našemu ε číslo $\varrho_2 > 0$ ($\varrho_2 < x_0$, $\varrho_2 < \pi - x_0$) tak, že

$$|V_0(B) - V_0(A)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon ,$$

pokud $\varrho(A, B) < \varrho_2$.

Z téhož důvodu jako funkce $V_0(x, y)$ je také $G_2(x, y)$ v bodě A spojitá, takže k témuž ε existuje $\varrho_3 > 0$ ($\varrho_3 < \frac{1}{2}\varrho_1$) tak, že

$$|G_2(B) - G_2(A)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon ,$$

pokud $\varrho(A, B) < \varrho_3$.

Označíme-li min $(\varrho_2, \varrho_3) = \varrho_0$, pak podle (3.13) je

$$|V(B) - V(A)| < \varepsilon\,, \tag{3.18}$$

pokud

$$\varrho(A, B) < \varrho_0\,, \tag{3.19}$$

což bylo dokázati.

Důkaz platí i pro případ, že $x_0 = 0$, jestliže $f(0) = 0$ a $f(x)$ je spojitá zprava v bodě $x = 0$. Obdobně, když $x_0 = \pi$, $f(\pi) = 0$ a $f(x)$ je v bodě $x = \pi$ spojitá zleva.

Poznámka: Všimněme si, že doposud jsme pro funkci $f(x)$ nepotřebovali nic jiného, než že je měřitelná v $\langle 0, \pi \rangle$ a $|f(x)| \leqq M$. Toho, že $f(x)$ je skoro všude spojitá v $\langle 0, \pi \rangle$, použijeme teprve nyní.

Jednoznačnost řešení.[2])

Mějme dvě řešení $V_1(x, y)$ a $V_2(x, y)$ požadovaných vlastností a budiž $u(x, y) = V_1(x, y) - V_2(x, y)$.

Definujme funkci

$$G(y) = \int_0^\pi u^2(x, y)\, dx\,. \tag{3.20}$$

Dokážeme, že $G(y) = 0$ pro všechna y. Protože $u(x, y)$ je podle předpokladu spojitá pro $0 < y \leqq \pi$ vyplyne z toho, že $V_1(x, y) \equiv V_2(x, y)$ pro všechna $y > 0$ $(y \leqq \pi)$.

$u(x, y)$ je pro $y = 0$ spojitá a rovna nule ve všech bodech intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ s výjimkou nejvýše bodů množiny $\mathfrak{M}$. Je tedy

$$G(0) = 0\,. \tag{3.21}$$

Dále $|u(x, y)| \leqq 2M$ v celém P. Dokážeme nejprve, že $G(y)$ je spojitá v bodě $y = 0$.

Zvolme $\varepsilon > 0$ a sestrojme otevřenou množinu $\mathfrak{M}_1$ tak, že $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$, $m(\mathfrak{M}_1) < \delta$, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\,.\,(2M)^2}$.[3]) Budiž dále $\mathfrak{P}$ množina v P, bod $B(x, y) \in \mathfrak{P}$ když a jen když $x \in \mathfrak{M}_1$. (Značíme $\mathfrak{P} \underset{(x,y)}{[}(x, y) \in P, x \in \mathfrak{M}_1])$. Tedy $\mathfrak{P}$ je otevřená množina v P. Množina $P - \mathfrak{P}$ je uzavřená v P, tedy funkce $u(x, y)$, spojitá na $P - \mathfrak{P}$ je na této množině stejnoměrně spojitá ($P - \mathfrak{P}$ je kompaktní), při čemž je tam $u(x, 0) = 0$. Z toho plyne, že existuje k $\varepsilon > 0$ takové η, že $|u(x, y)| < \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2\pi}}$ v $P - \mathfrak{P}$, pokud $0 \leqq y < \eta$. Tedy

[2]) Důkaz jednoznačnosti řešení se provádí zpravidla s pomocí Greenovy věty. Zde však předpoklady Greenovy věty nejsou splněny a Greenova věta také skutečně neplatí, jak se lze přesvědčit přímým výpočtem, jsou-li na př. $f(x)$, $f'(x)$ a $f''(x)$ po částech spojité funkce v $\langle 0, \pi \rangle$. Zde však lze Greenovu větu snadno obejít.

[3]) To lze, neboť $\mathfrak{M}$ je množina míry nula.

$$G(y) = \int_0^\pi u^2(x, y)\, dx < \varepsilon\,, \tag{3.22}$$

pokud $0 \leqq y < \eta$, čili $G(y)$ je spojitá v bodě $y = 0$.

Spojitost funkce $G(y)$ pro $y > 0$ $(y \leqq \pi)$ plyne ze spojitosti funkce $u(x, y)$ pro $y > 0$.

Funkce $G(y)$ má pro $y > 0$ $(y \leqq \pi)$ první i druhou derivaci, a je

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 2 \int_0^\pi u \frac{\partial u}{\partial y}\, dx\,, \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 2 \int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dx + 2 \int_0^\pi u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\, dx\,.^{4)} \tag{3.24}$$

Ale $u(x, y)$ je harmonická pro $y > 0$, čili

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.25}$$

a

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \tag{3.26}$$

Dosadíme-li (3.25) a (3.26) do (3.24), máme

$$\frac{d^2 G}{dy^2} = 2 \left[\int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dx - \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]. \tag{3.27}$$

Integrál

$$\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$$

je roven nule, protože pro $y > 0$ je $u = 0$ pro $x = 0$ a $x = \pi$, a $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ je spojitá a tedy omezená na P, pokud $y \geqq y_0 > 0$.

Z (3.27) tedy plyne, že

$$\frac{d^2 G}{dy^2} \geqq 0 \tag{3.28}$$

pro $y > 0$ $(y \leqq \pi)$.

Z (3.20), (3.28) a z toho, že $G(0) = G(\pi) = 0$ snadno odvodíme, že $G(y) \equiv 0$ v $\langle 0, \pi \rangle$.

Vezměme určité

$$y_0 \ (0 < y_0 < \pi)$$

---

[4]) Srv. následující poznámku.

a předpokládejme, že

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}(y_0) = A > 0 . \tag{3.29}$$

Protože $\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}$ je stále nezáporná, je pro $y > y_0$ stále $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} \geqq A$.

Ale $G(y_0) \geqq 0$, $G(\pi) = 0$, tedy

$$G(\pi) - G(y_0) = (\pi - y_0) \cdot \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}[y_0 + \vartheta_1(\pi - y_0)] \quad (0 < \vartheta_1 < 1) , \tag{3.30}$$

což je spor, protože na pravé straně je veličina větší než (nebo rovna) $(\pi - y_0)A$, na levé straně je veličina záporná nebo nula.

Jestliže předpokládáme, že

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}(y_0) = B < 0 , \tag{3.31}$$

pak $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}$ je stále menší nebo rovno B v $(0, y_0)$. Podle věty o střední hodnotě je

$$G(y_0) - G(0) = y_0 \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}(\vartheta_2 y_0) \quad (0 < \vartheta_2 < 1) , \tag{3.32}$$

což vede opět ke sporu.

Je tedy stále v $(0, \pi)$ $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} = 0$, a protože $G(0) = G(\pi) = 0$, je v $\langle 0, \pi \rangle$ identicky.

$$G(y) = 0 . \tag{3.33}$$

Protože pro $y > 0$ je $u(x, y)$ spojitá, plyne z toho, že

$$u(x, y) \equiv 0$$

pro všechna $y > 0$ $(y \leqq \pi)$, což bylo dokázati.

Poznámka. Kritický čtenář může zde oprávněně namítnout, že derivování za integračním znaménkem, které jsme provedli v rovnicích (3.23) a (3.24), není nikterak odůvodněno, protože jsme ve větě 3.1 nevyslovili žádné předpoklady o spojitosti derivací funkce $V(x, y)$ v P pro $y > 0$, resp. o spojité prodlužitelnosti těchto derivací na strany čtverce $x = 0$, $x = \pi$. Také závěr, že integrál

$$\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) \mathrm{d}x$$

je roven nule, protože pro $y > 0$ je u rovno nule na $x = 0$ a $x = \pi$, není zcela správný, protože nevíme nic o vzrůstu funkce $\frac{\partial u}{\partial x}$ pro $x \to 0$ a $x \to \pi$, takže nemůžeme tvrdit nic o limitě výrazu $u \frac{\partial u}{\partial x}$ pro $x \to 0$ a $x \to \pi$.

Zde bychom mohli zjednat nápravu tím, že bychom žádali, aby $V(x, y)$ měla uvnitř P spojité derivace do druhého řádu, a tyto derivace aby byly spojitě prodlužitelné na $x = 0$, $x = \pi$. Z fysikálního hlediska tyto požadavky jsou téměř samozřejmé a naše nalezené řešení je také splňuje. Hledisko matematické je ovšem jiné, a proto zde ukážeme druhý důkaz, kde tyto předpoklady potřebovat nebudeme.[5])

Chceme dokázat, že funkce u, splňující předpoklady věty 3.1 (na rozdíl od funkce $V(x, y)$ omezená konstantou $2M$) a na $y = 0$ všude rovná nule s výjimkou nejvýše bodů množiny $\mathfrak{M}$, nemůže být různá od nuly uvnitř P.

Zvolme tedy uvnitř P bod x_0, y_0. Nechť $u(x_0, y_0) = A \neq 0$. Označme součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n(\pi - y_0)}{\sinh n(\pi - \frac{1}{2}y_0)} = S\,. \tag{3.34}$$

Zvolme určité a takové, že $0 < a < \frac{1}{2}y_0$. Funkce $u(x, a)$ je podle předpokladu spojitá pro všechna $x \in \langle 0, \pi \rangle$, spojitě diferencovatelná v $(0, \pi)$ a je $u(0, a) = u(\pi, a) = 0$. Označme tuto funkci $f_a(x)$. Na funkci $u(x, y)$ se můžeme pro $y > 0$ dívat tak, že vznikla jako řešení problému, formulovaného ve větě 3.1, ale daného ne na čtverci P, ale na obdélníku O ($0 \leqq x \leqq \pi$, $a \leqq y \leqq \pi$), při čemž na straně $y = a$ tohoto obdélníku je dána funkce $f_a(x)$. Ale zde již, jak plyne z věty o maximu a minimu harmonické funkce, je jednoznačnost řešení zaručena, protože $u(x, y)$ je spojitá na celém uzavřeném obdélníku O. Je tedy nutně

$$u(x_0, y_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(a)} \sin nx_0 \frac{\sinh n(\pi - y_0)}{\sinh n(\pi - a)}\,, \tag{3.35}$$

kde

$$a_n^{(a)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_a(x') \sin nx' \,\mathrm{d}x'\,. \tag{3.36}$$

(O správnosti tvaru řešení (3.35) se snadno přesvědčíme. Předně každý člen řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(a)} \sin nx \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n(\pi - a)} \tag{a}$$

je harmonický a řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n(\pi - a)}$$

[5]) Zde bychom mohli užít Schwarzovy věty o zrcadlení; funkce u je harmonická pro $y > 0$ a rovna nule na stranách čtverce, tedy je přes tyto strany prodlužitelná jako harmonická funkce, z čehož vyplývá spojitost uvažovaných derivací na stranách $x = 0$, $x = \pi$. Podáme však důkaz, který znalost této věty nepředpokládá.

konverguje pro každé $y > a$, z čehož plyne, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^{(a)} \sin nx \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n(\pi - a)}$$

konverguje stejnoměrně. Tedy řada (a) definuje harmonickou funkci.

Pro $x = 0$, $x = \pi$ $(y > 0)$ a $y = \pi$ (x libovolné) je funkce, definovaná touto řadou, rovna nule, pro $y = a$ je rovna funkci $f_a(x)$, tedy splňuje krajové podmínky.)

Ale jestliže $0 < a < \frac{1}{2}y_0$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n(\pi - y_0)}{\sinh n(\pi - a)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n(\pi - y_0)}{\sinh n(\pi - \frac{1}{2}y_0)}, \tag{3.37}$$

neboť $\sinh x$ je pro $x > 0$ kladná rostoucí funkce, tedy každý člen řady na pravé straně nerovnosti (3.37) je větší než příslušný člen řady na levé straně (3.37).

Budeme tedy hledat a tak malé, aby $a_n^{(a)}$ byly takové, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(a)}| \cdot |\sin nx_0| \frac{\sinh n(\pi - y_0)}{\sinh n(\pi - a)} < |A| \tag{3.38}$$

$(A = u(x_0, y_0))$.

Tím se dostaneme (vzhledem k rovnici (3.35)) do sporu s předpokladem $u(x^0, y^0) = A$:

Sestrojme v $\langle 0, \pi \rangle$ otevřenou množinu $\mathfrak{M}_1$ tak, že $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$, $m\mathfrak{M}_1 < \frac{A}{4MS}$.

(S je dáno rovnicí (3.34), $\mathfrak{M}$, jak víme, je množina bodů nespojitosti funkce $f(x)$ v $\langle 0, \pi \rangle$, $m\mathfrak{M}_1$ značí míru množiny $\mathfrak{M}_1$.) Budiž $\mathfrak{P}$ množina v P, při čemž $(x, y) \in \mathfrak{P}$ tehdy a jen tehdy, když $x \in \mathfrak{M}_1$ čili $\mathfrak{P}\underset{(x,y)}{[}(x, y) \in P, x \in \mathfrak{M}_1]$. Vzhledem ke stejnoměrné spojitosti funkce $u(x, y)$ na $P - \mathfrak{P}$, při čemž pro $y = 0$ je na $P - \mathfrak{P}$ $u(x, y) = 0$, můžeme najít $a_0 > 0$ $(a_0 \leqq \frac{1}{2}y_0)$ tak, že pro všechna a $(0 < a \leqq a_0)$ je na $P - \mathfrak{P}$

$$|f_a(x)| < \frac{|A|}{4S}. \tag{3.39}$$

Zvolme tedy jedno takové a. Pak je zřejmě

$$|a_n^{(a)}| < \frac{|A|}{S} \tag{3.40}$$

pro všechna n, a tedy

$$|u(x_0, y_0)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(a)} \sin nx_0 \frac{\sinh n(\pi - y_0)}{\sinh n(\pi - a)} \right| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A|}{S} \frac{\sinh n(\pi - y_0)}{\sinh n(\pi - \frac{1}{2}y_0)} = |A|, \tag{3.41}$$

čímž dostáváme žádaný spor s předpokladem $u(x_0, y_0) = A$. Tím je věta (3.1) úplně dokázána.

Kapitola 4

Věta 4.1. *Budiž ve čtverci P $(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi)$ dána funkce $f(x, y)$, spojitá všude v P s výjimkou bodů, tvořících množinu $\mathfrak{N}$ míry nula, a taková, že $|f(x, y)| \leqq N$ v P (tedy měřitelná). Pak existuje jedna a (nejvýše s výjimkou bodů množiny $\mathfrak{N}$) jen jedna funkce $F(x, y, t)$, která*

1. *Vyhovuje diferenciální rovnici*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \tag{4.1}$$

(uvnitř P, $t > 0$).

2. *Je omezená pro všechny body x, y z P a $t \geqq 0$ konstantou N.*

3. *Je spojitá v P pro $t > 0$, při čemž*

$$F(0, y, t) = F(\pi, y, t) = F(x, 0, t) = F(x, \pi, t) = 0 \tag{4.2}$$

$$(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi,\ t > 0)\,.$$

4. *Je-li (x_0, y_0) vnitřní bod P, v němž $f(x, y)$ je spojitá, pak $F(x, y, t)$ je spojitá v bodě $(x_0, y_0, 0)$ jako funkce všech tří proměnných, a $F(x_0, y_0, 0) = f(x_0, y_0)$.*

Funkce $F(x, y, t)$ je dána

pro $t > 0$ řadou

$$F(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx\, e^{-m^2 t}\right) \sin ny\, e^{-n^2 t} \tag{4.3}$$

$$\left(A_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int\!\!\int_P f(x', y') \sin mx' \sin ny' \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}y'\right), \tag{4.4}$$

a pro $t = 0$ vztahem

$$F(x, y, 0) = f(x, y)\,. \tag{4.5}$$

Abychom dokázali větu (4.1), dokážeme nejprve následující lemmata:

Lemma 1. *Pro $t > 0$ funkce*

$$F(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx\, e^{-m^2 t}\right) \sin ny\, e^{-n^2 t} \tag{4.6}$$

$$\left(A_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int\!\!\int_P f(x', y') \sin mx' \sin ny'\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}y'\,,\right.$$

$$\left. f(x', y') \text{ měřitelná funkce v } P,\ |f(x', y')| < M\right)$$

a) *vyhovuje diferenciální rovnici*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,, \tag{4.7}$$

b) *splňuje podmínky*

$$F(0, y, t) = F(\pi, y, t) = F(x, 0, t) = F(x, \pi, t) = 0\,, \tag{4.8}$$

c) *platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx\, e^{-m^2 t}\Big) \sin ny\, e^{-n^2 t} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin ny\, e^{-n^2 t}\Big) \sin mx\, e^{m^2 t}\,. \tag{4.9}$$

Důkaz: a) Pro $t > 0$ je řada (4.6) a také řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{n}^{\infty} A_{mn}(-m^2) \sin mx\, e^{-m^2 t}\Big) \sin ny\, e^{-m^2 t}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx\, e^{-m^2 t}\Big)(-n^2) \sin ny\, e^{-n^2 t}\,,$$

stejnoměrně konvergentní ($|A_{mn}| \leqq 4M$ a $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} m^2 e^{-m^2 t}) e^{-n^2 t}$, $\sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2 t}) n^2 e^{-n^2 t}$ konvergují), stačí tedy dokázat, že každý člen řady (4.6), t. j. člen

$$g_n(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx \sin ny\, e^{-(m^2+n^2)t} \tag{4.10}$$

splňuje diferenciální rovnici

$$\frac{\partial g_n}{\partial t} = \frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_n}{\partial y^2}\,. \tag{4.11}$$

Ale to je evidentní, neboť řada (4.10) i její derivace opět konvergují stejnoměrně pro $t > 0$ a každý její člen vyhovuje zmíněné rovnici.

b) Že $F(x, y, t)$ splňuje podmínky (4.8) je zřejmé.

c) Zvolme určité $t > 0$. Dále zvolme určité k a označme

$$G_1(x, y, t) = \sum_{n=1}^{k} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx\, e^{-m^2 t}\Big) \sin ny\, e^{-n^2 t}\,, \tag{4.12}$$

$$G_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{k} A_{mn} \sin ny\, e^{-n^2 t}\Big) \sin mx\, e^{-m^2 t}\,. \tag{4.13}$$

Dokážeme nejprve, že $G_1(x, y, t) = G_2(x, y, t)$.

Jistě je

$$\sum_{n=1}^{k} \Big(\sum_{m=1}^{l} A_{mn} \sin mx\, e^{-m^2 t}\Big) \sin ny\, e^{-n^2 t} = \sum_{m=1}^{l} \Big(\sum_{n=1}^{k} A_{mn} \sin ny\, e^{-n^2 t}\Big) \sin mx\, e^{-m^2 t}, \tag{4.14}$$

když k a l jsou konečná čísla.

Při našem pevně zvoleném $t > 0$ budiž

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2 t} = K_1\,. \tag{4.15}$$

Protože $|A_{mn}| \leqq 4M$ můžeme najít L_1 tak, že pro všechna $l > L_1$ je

$$\sum_{m=l}^{\infty} |A_{mn}|\, \mathrm{e}^{-m^2 t} < \frac{\varepsilon}{k}, \tag{4.16}$$

čili pro $l > L_1$ je

$$|G_1 - \sum_{m=1}^{k} (\sum_{m=1}^{l} A_{mn} \sin mx\, \mathrm{e}^{-m^2 t}) \sin ny\, \mathrm{e}^{-n^2 t}| < \varepsilon\,. \tag{4.17}$$

Budiž při stejném t jako dříve

$$\sum_{n=1}^{k} \mathrm{e}^{-n^2 t} = K_2\,. \tag{4.18}$$

Můžeme najít L_2 tak, že pro všechna $l > L_2$ je

$$\sum_{m=l}^{\infty} 4MK_2 \mathrm{e}^{-m^2 t} < \varepsilon\,, \tag{4.19}$$

čili

$$|G_2 - \sum_{m=1}^{l} (\sum_{n=1}^{k} A_{mn} \sin ny\, \mathrm{e}^{-n^2 t}) \sin mx\, \mathrm{e}^{-m^2 t}| < \varepsilon\,. \tag{4.20}$$

Označíme-li $L = \max (L_1, L_2)$, pak pro všechna $l > L$ platí (4.17) a (4.20), což implikuje vzhledem ke (4.14) a vzhledem k libovolnému ε rovnici

$$G_1(x, y, t) = G_2(x, y, t)\,. \tag{4.21}$$

Na základě rovnice (4.21) dokážeme již snadno (4.9). Označme levou stranu rovnice (4.9) $H_1(x, y, t)$, pravou stranu $H_2(x, y, t)$.

Při našem pevně zvoleném $t > 0$ budiž

$$\sum_{m=1}^{\infty} 4M \mathrm{e}^{-m^2 t} = K_3\,. \tag{4.22}$$

Pak vzhledem ke stejnoměrné konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_3 \mathrm{e}^{-n^2 t}$$

bude, zvolíme-li dostatečně velké L_3, pro všechna $l > L_3$

$$|H_1(x, y, t) - \sum_{n=1}^{l} (\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx\, \mathrm{e}^{-m^2 t}) \sin ny\, \mathrm{e}^{-n^2 t}| < \varepsilon\,. \tag{4.23}$$

Budiž obdobně

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2 t} = K_4\,. \tag{4.24}$$

Zvolíme-li dostatečně velké L_4, bude pro každé $l > L_4$

$$\sum_{m=l}^{\infty} |A_{mn}|\, \mathrm{e}^{-m^2 t} > \frac{\varepsilon}{K_4} \tag{4.25}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=l}^{\infty} |A_{mn}| e^{-m^2t}\right) e^{-n^2t} < \varepsilon ,$$

čili

$$\left|H_2(x, y, t) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{l} A_{mn} \sin mx\, e^{-m^2t}\right) \sin ny\, e^{-n^2t}\right| < \varepsilon . \tag{4.26}$$

Je-li $\bar{L} = \max(L_3, L_4)$, pak pro všechna $l > \bar{L}$ platí (4.23) a (4.26), a protože pro každé konečné l jsou si dvojné řady ve (4.23) a (4.26) rovny a ε je libovolné, je $H_1(x, y, t) = H_2(x, y, t)$, což bylo dokázati.

Zvolme nyní bod x_0, y_0 uvnitř R a určité $h > 0$ (h je menší (nejvýše rovno) než všechna z čísel: $x_0, y_0, \pi - x_0, \pi - y_0$). Čtverec P rozdělíme na čtyři obory, R_1, R_2, R_3 a R_4.

Obor R_1:

Čtverec o středu x_0, y_0 se stranami rovnoběžnými s osami souřadnicovými a délky $2h$, tedy obor

$$x_0 - h \leqq x \leqq x_0 + h , \quad y_0 - h \leqq y \leqq y_0 + h .$$

Obor R_2:

Pás $0 \leqq x \leqq \pi$, $y_0 - h \leqq y \leqq y_0 + h$ s vyjmutím čtverce R_1, tedy,

$$0 \leqq x < x_0 - h , \quad x_0 + h < x \leqq \pi ,$$
$$y_0 - h \leqq y \leqq y_0 + h .$$

Obor R_3:

Pás $x_0 - h \leqq x \leqq x_0 + h$, $0 \leqq y \leqq \pi$ s vyjmutím čtverce R_1, tedy

$$x_0 - h \leqq x \leqq x_0 + h ,$$
$$0 \leqq y < y_0 - h , \quad y_0 + h < y \leqq \pi .$$

Obor R_4:

$$R_4 = P - R_1 - R_2 - R_3 .$$

Lemma 2. *Budiž $f_1(x, y)$ definovaná a měřitelná v R_1, při čemž $|f_1(x, y)| \leqq M$. V $P - R_1$ budiž $f_1(x, y) = 0$.*

Pak funkce $F_1(x, y, t)$, definovaná

pro $t > 0$ řadou

$$F_1(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \sin mx\, e^{-m^2t}\right) \sin ny\, e^{-n^2t} , \tag{4.27}$$

$$\left(B_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \iint_{R_1} f_1(x', y') \sin mx' \sin ny' \, dx' \, dy'\right) , \tag{4.28}$$

a pro $t = 0$ rovnicí

$$F_1(x, y, 0) = f_1(x, y) , \tag{4.29}$$

je pro všechna x, y z P a $t \geqq 0$ v absolutní hodnotě omezená konstantou M.

Důkaz: Pro $t = 0$ je $F_1(x, y, t) = f_1(x, y)$, tedy podle předpokladu

$$|F_1(x, y, 0)| \leqq M .$$

Zvolme určité $t_0 > 0$.

Podle Fubiniovy věty je funkce $f(x, y)$ při pevném y měřitelná a integrovatelná podle x pro skoro všechna y z $\langle y_0 - h, y_0 + h\rangle$. Množinu těch y, pro něž $f(x, y)$ tuto vlastnost nemá, označíme $\mathfrak{A}$.

Definujme nyní pro $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y' \leqq \pi$ a $t_0 > 0$ funkci $G(x, y', t_0)$ takto:

Pro $y' \in \mathfrak{A}$ budiž

$$G(x, y', t_0) \equiv 0 .$$

Pro ostatní y' z $\langle 0, \pi\rangle$ budiž

$$G(x, y', t_0) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx \, \mathrm{e}^{-m^2 t}, \tag{4.30}$$

$$\left(b_m = \frac{2}{\pi} \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x', y') \sin mx' \, \mathrm{d}x'\right). \tag{4.31}$$

Podle věty 2.1 je funkce $G(x, y', t_0)$ pro všechna y' z $\langle y_0 - h, y_0 + h\rangle$ (s výjimkou těch y', která patří do množiny $\mathfrak{A}$) omezená číslem M, a pro ostatní y' z $\langle 0, \pi\rangle$ je identicky rovna nule.

Podle Fubiniovy věty je každý člen řady (4.30) při pevném x a t_0 ($t_0 > 0$) měřitelnou a integrovatelnou funkcí y' v $\langle 0, \pi\rangle$. Protože řada (4.30) konverguje stejnoměrně k funkci $G(x, y', t_0)$ v $\langle 0, \pi\rangle$, je také $G(x, y', t_0)$ měřitelná, a protože je omezená konstantou M, je integrovatelná v $\langle 0, \pi\rangle$. Lze tedy při každém x sestrojit opět obdobnou řadu k funkci $G(x, y', t_0)$, t. j. řadu

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y_0-h}^{y_0+h} G(x, y', t_0) \sin ny' \, \mathrm{d}y' \, . \sin ny \, \mathrm{e}^{-n^2 t_0} = \tag{4.32}$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y_0-h}^{y_0+h} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int_{x_0-h}^{x_0+h} f_1(x', y') \sin mx' \, \mathrm{d}x' \, . \sin mx \, \mathrm{e}^{-m^2 t_0}\right) \sin ny' \, \mathrm{d}y' \sin ny \, \mathrm{e}^{-n^2 t}. \tag{4.33}$$

Protože $G(x, y', t_0)$ je omezená konstantou M, je také funkce, definovaná řadou (4.32), resp. (4.33) omezená touž konstantou M (podle věty 2.1).

Řada (4.30) konverguje stejnoměrně ($t_0 > 0$, $|b_m| \leqq 2M$), tedy

$$\int_{y_0-h}^{y_0+h} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int_{x_0-h}^{x_0+h} f_1(x', y') \sin mx' \, \mathrm{d}x' \sin mx \, \mathrm{e}^{-m^2 t_0}\right) \sin ny' \, \mathrm{d}y' =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \iint_{R_1} f_1(x', y') \sin mx' \sin ny' \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y' \sin mx \, \mathrm{e}^{-m^2 t_0}, \tag{4.34}$$

čili řada (4.32) resp. (4.33) není nic jiného než $F_1(x, y, t_0)$. Je tedy pro každé $t > 0$

$$|F_1(x, y, t)| \leqq M\,, \tag{4.35}$$

což bylo dokázati.

Lemma 3. *Budiž v R_2 dána měřitelná funkce $f_2(x, y)$, při čemž $|f_2(x, y)| \leqq K$. V $P - R_2$ definujme $f_2(x, y) = 0$.*

Pak funkce $F_2(x, y, t)$ definovaná v P pro $t > 0$ řadou

$$F_2(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} \sin mx \, \mathrm{e}^{-m^2 t}\right) \sin ny \, \mathrm{e}^{-n^2 t}\,, \tag{4.36}$$

$$\left(C_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \iint_{R_2} f_2(x', y') \sin mx' \sin ny' \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y'\right) \tag{4.37}$$

a pro $t = 0$

$$F_2(x, y, 0) = f_2(x, y)\,,$$

je spojitou funkcí x, y, t uvnitř R_1 (t. j. ve všech vnitřních bodech R_1) pro $t \geqq 0$.

Důkaz: Obor R_1 je dán nerovnostmi $x_0 - h \leqq x \leqq x_0 + h$, $y_0 - h \leqq y \leqq y_0 + h$. Zvolme libovolné $\eta > 0$, $\eta < h$. Obor

$$x_0 - (h - \eta) \leqq x \leqq x_0 + (h - \eta)\,, \quad y_0 - h \leqq y \leqq y_0 + h$$

nazveme R_1'. Protože v R_1' je $F_2(x, y, 0) = 0$, stačí dokázat, že k danému $\varepsilon > 0$ existuje $t_0 > 0$ tak, že pro všechna t, $0 < t < t_0$, je

$$|F_2(x, y, t)| < \varepsilon \tag{4.38}$$

v R_1'.[6])

Zvolme $\varepsilon > 0$. Funkce $f_2(x, y)$ je podle Fubiniovy věty integrovatelná podle x pro všechna y s výjimkou množiny $\mathfrak{B}$ míry nula.

Budiž

$$H(x, y', t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin mx \, \mathrm{e}^{-m^2 t}\,, \tag{4.39}$$

kde

$$c_m = \frac{2}{\pi} \int f_2(x', y') \sin mx' \, \mathrm{d}x' \tag{4.40}$$

pro všechna y' pro něž je $f(x', y')$ integrovatelná podle x'. Pro y' vně intervalu $\langle y_0 - h, y_0 + h\rangle$ je $H(x, y', t) \equiv 0$. Pro y' z $\mathfrak{B}$ definujme také $H(x, y', t) \equiv 0$.

Chceme nejprve dokázat, že existuje $t_0 > 0$, že

$$|H(x, y', t)| < \varepsilon$$

pro všechna x, y' z R_1' a $0 < t < t_0$. Nemůžeme zde použít ani stejnoměrné spojitosti, protože funkce $H(x, y', t)$ není obecně spojitá v R_1' pro žádné t, ani stej-

[6]) Že $F_2(x, y, t)$ je spojitá v R_1 pro $t > 0$ plyne ovšem ze stejnoměrné konvergence řady (4.36) a ze spojitosti jejích členů.

noměrné konvergence řady (4.39) pro $t \geqq 0$, protože ani tato podmínka není obecně splněna. Tato obtíž se však dá snadno překonat:

Vezměme určité y' z $\langle y_0 - h, y_0 + h \rangle$. Je $f_2(x', y') = 0$ pro x' z $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ a $|f_2(x', y')| \leqq K$ pro ostatní x'. Označme

$$\overline{H}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{c}_m \sin mx \, e^{-m^2 t} \quad (t > 0) \tag{4.41}$$

funkci, příslušnou k funkci $g(x', y')$, kde

$$\left.\begin{array}{l} g(x', y') = 0 \text{ pro } x_0 - h \leqq x' \leqq x_0 + h \\ g(x', y') = K \text{ pro ostatní } x' \end{array}\right\} y_0 - h \leqq y' \leqq y_0 + h$$

$$\left(\bar{c}_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x', y') \sin mx' \, dx'\right).$$

Pro y' vně intervalu $\langle y_0 - h, y_0 + h \rangle$ budiž $g(x', y') \equiv 0$.

Tvrdím: pro libovolné $t > 0$ a y' z $\langle y_0 - h, y_0 + h \rangle$ je $\overline{H}(x, y', t) \geqq H(x, y', t)$. Důkaz je snadný, neboť funkce $g(x', y') - f_2(x', y')$ je všude nezáporná, a tedy $\overline{H}(x, y', t) - H(x, y', t)$ nemůže být také nikde záporná, jak plyne z poznámky k větě (2,1).

Avšak Fourierova řada

$$\sum_{m=1}^{\infty} \bar{c}_m \sin mx$$

je stejnoměrně konvergentní na R_1' a tedy $\overline{H}(x, y', t)$ je tam spojitá jako funkce všech tří proměnných pro $t \geqq 0$. Existuje tedy k našemu ε takové $t_0 > 0$, že

$$\overline{H}(x, y', t) < \varepsilon$$

pro všechna x, y' z R_1' a $0 < t < t_0$. Tím spíše je v R_1' pro $0 < t < t_0$

$$H(x, y', t) < \varepsilon .$$

Zcela stejně dokážeme, že při stejném t_0 je všude v R_1' pro $0 < t < t_0$

$$H(x, y', t) > -\varepsilon ,$$

čili

$$|H(x, y', t)| < \varepsilon .$$

Ale stejně jako jsme ukázali v předešlém lemmatu, je $H(x, y', t)$ integrovatelná pro $t > 0$ a platí

$$\frac{2}{\pi} \sum \int_0^{\pi} H(x, y', t) \sin ny' \, dy' \sin ny \, e^{-n^2 t} < \varepsilon \tag{4.42}$$

pro x, y z R_1' a $0 < t < t_0$. Ale výraz ve znaménkách pro absolutní hodnotu ve (4.42) není opět nic jiného než $F_2(x, y, t)$. Je tedy funkce $F_2(x, y, t)$ spojitá v R_1'. A protože jsme zvolili η libovolně, plyne z toho, že $F_2(x, y, t)$ je spojitá uvnitř celého R_1, což bylo dokázati.

Lemma 4. *Budiž v R_3 dána měřitelná funkce $f_3(x, y)$, $|f_3(x, y)| \leqq L$. V $P - R_3$ definujme $f_3(x, y) = 0$. Pak funkce $F_3(x, y, t)$, definovaná v P pro $t > 0$ řadou*

$$F_3(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} D_{mn} \sin mx \, e^{-m^2 t}) \sin ny \, e^{-n^2 t} \tag{4.43}$$

$$\left(D_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \iint_{R_3} f_3(x', y') \sin mx' \sin ny' \, dx' \, dy'\right), \tag{4.44}$$

a pro $t = 0$ vztahem

$$F_3(x, y, 0) = f_3(x, y), \tag{4.45}$$

je spojitou funkcí x, y, t uvnitř R_1 pro $t \geqq 0$.

Důkaz. Podle předešlého lemmatu (jen obory R_2 a R_3 a souřadnice x a y jsou zde zaměněny) je funkce $G_3(x, y, t)$, definovaná v P

pro $t > 0$ řadou

$$G_3(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \sin ny \, e^{-n^2 t}) \sin mx \, e^{-m^2 t} \tag{4.46}$$

(D_{mn} je definováno rovnicí (4.44))

a pro $t = 0$ vztahem

$$G_3(x, y, 0) = f_3(x, y),$$

spojitou funkcí x, y, t uvnitř R_1 pro $t \geqq 0$.

Ale podle lemmatu 1 je

$$F_3(x, y, t) \equiv G_3(x, y, t)$$

pro všechna $(x, y) \in P$ a $t \geqq 0$, čímž je lemma 4 dokázáno.

Lemma 5. *Budiž v R_4 dána měřitelná funkce $f_4(x, y)$, $|f_4(x, y)| \leqq T$. V $P - R_4$ budiž $f_4(x, y) = 0$. Pak funkce*

$$F_4(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} E_{mn} \sin mx \, e^{-m^2 t}) \sin ny \, e^{-n^2 t} \quad (t > 0) \tag{4.47}$$

$$\left(E_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \iint_{R_4} f_4(x', y') \sin mx' \sin ny' \, dx' \, dy'\right), \tag{4.48}$$

$$(F_4(x, y, 0) = f_4(x, y)) \tag{4.49}$$

je spojitá jako funkce x, y, t uvnitř R_1 pro $t \geqq 0$.

Důkaz. Sestrojíme funkci $H_4(x, y', t)$ zcela obdobně jako v lemmatu 3, rov. (4.39), (4.40). Zvolíme $\eta > 0$ ($\eta < h$) a k danému $\varepsilon > 0$ najdeme opět $t_0 > 0$ tak, že

$$|H_4(x, y', t)| < \varepsilon \tag{4.50}$$

v oboru $x_0 - (h - \eta) \leqq x \leqq x_0 + (h - \eta)$, y vně intervalu $\langle y_0 - h, y_0 + h \rangle$

pro všechna t, $0 < t < t_0$. Pak také pro všechna tato t bude v $x_0 - (h - \eta) \leqq \leqq x \leqq x_0 + (h - \eta)$, y z $\langle 0, \pi \rangle$

$$F_4(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} H_4 x, y', t) \sin ny' \, dy' \sin ny \, e^{-n^2 t} \tag{4.51}$$

v absolutní hodnotě menší než ε. Protože $F_4(x, y, 0) = 0$ uvnitř R_1 a η jsme zvolili libovolně, plyne z nerovnosti

$$|F_4(x, y, t)| < \varepsilon$$

pro $x_0 - (h - \eta) \leqq x \leqq x_0 + (h - \eta)$, $y_0 - h \leqq y \leqq y_0 + h$, $0 < t < t_0$ spojitost funkce $F_4(x, y, t)$ uvnitř celého R_1 pro $t \geqq 0$, což jsme měli dokázat.

Lemma 6. *Budiž $f_6(x, y) = k$ pro všechna x, y v P. Pak funkce*

$$F_6(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} F_{mn} \sin mx \, e^{-m^2 t}\right) \sin ny \, e^{-n^2 t} \quad (t \geqq 0) \tag{4.52}$$

je spojitou funkcí x, y, t uvnitř P pro $t \geqq 0$.

$$\left(F_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \iint_P k \sin mx' \sin ny' \, dx' \, dy'\right). \tag{4.53}$$

Věta je triviální, neboť řada

$$G_6(x, y', t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{mn} \sin mx \, e^{-m^2 t} \quad (t \geqq 0) \tag{4.54}$$

$$\cdot \left(f_{mn} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin mx' \, dx'\right)$$

konverguje stejnoměrně v každém uzavřeném oboru, ležícím uvnitř P pro $t \geqq 0$ a definuje tam tedy spojitou funkci x, y', t pro $t \geqq 0$. Stejnou vlastnost má i řada

$$F_6(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} G_6(x, y', t) \sin ny' \, dy' \sin ny \, e^{-n^2 t}, \tag{4.55}$$

a protože jednotlivé členy jsou spojité funkce x, y, t, je $F_6(x, y, t)$ spojitá na každém uzavřeném oboru, ležícím uvnitř P pro $t \geqq 0$, čili všude uvnitř P pro $t \geqq 0$, což bylo dokázati.

Důkaz věty (4.1). Na základě uvedených lemmat dokážeme již snadno, že funkce $F(x, y, t)$ má zmíněné vlastnosti.

Vlastnosti 1 a 3 vyplývají z lemmatu 1. (Rovnice (4.2) jsou evidentní, spojitost pro $t > 0$ vyplývá ze stejnoměrné konvergence řad a ze spojitosti jednotlivých členů.)

Vlastnost 2 plyne z lemmatu 2, položíme-li $R_1 = P$.

Zbývá dokázat bod 4.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Vezměme určitý bod x_0, y_0 uvnitř P, v němž je $f(x, y)$ spojitá. Existuje tedy takové $h > 0$ (při čemž h volíme menší než $x_0, \pi - x_0, y_0, \pi - y_0$), že

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,, \tag{4.56}$$

pokud x, y leží v oboru $x_0 - h \leqq x \leqq x_0 + h$, $y_0 - h \leqq y \leqq y_0 + h$. Tento obor nazveme shodně s předcházejícím R_1. Stejným způsobem jako dříve definujeme obory R_2, R_3 a R_4 (viz příslušné definice před lemmatem 2).

Budiž $f(x_0, y_0) = k$ a definujme nyní funkce $f_1(x, y)$ až $f_5(x, y)$ takto:

$$\begin{aligned}
f_1(x, y) &= f(x, y) - k && \text{v } R_1 \\
&= 0 && \text{v } P - R_1 \\
f_2(x, y) &= f(x, y) - k && \text{v } R_2 \\
&= 0 && \text{v } P - R_2 \\
f_3(x, y) &= f(x, y) - k && \text{v } R_3 \\
&= 0 && \text{v } P - R_3 \\
f_4(x, y) &= f(x, y) - k && \text{v } R_4 \\
&= 0 && \text{v } P - R_4 \\
f_5(x, y) &= k && \text{v } P.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Je zřejmě

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{5} f_i(x, y)$$

v P, při čemž $|f_1(x, y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ v R_1.

Máme dokázat, že existuje jisté okolí bodu $(x_0, y_0, 0)$ tak, že

$$|F(x, y, t) - k| < \varepsilon\,, \tag{4.58}$$

pokud x, y, t leží v tomto okolí.

Nechť funkce $F_i(x, y, t)$ přísluší funkcím $f_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ podle definic v lemmatech 2 až 6. Pak

$$F(x, y, t) = \sum_{i=1}^{5} F_i(x, y, t)\,. \tag{4.59}$$

Ale pro $F_1(x, y, t)$ platí, že

$$|F_1(x, y, t)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{4.60}$$

pro všechna x, y z P a pro $t \geqq 0$ (lemma 2). Ostatní funkce jsou spojité uvnitř R_1 pro $t \geqq 0$ (lemma 3 až 6).

Tedy existují pro každou z těchto funkcí taková ϱ_i $(i = 2, 3, 4, 5)$, při čemž $\varrho_i < h$, že

$$|F_i(x, y, t) - F_i(x_0, y_0, 0)| < \tfrac{1}{8}\varepsilon \quad (i = 2, \ldots, 5) \tag{4.61}$$

pro všechna x, y, t $(t \geqq 0)$, pro něž

$$\varrho(x, y, t; x_0, y_0, 0) < \varrho_i$$

[$\varrho(x, y, t; x_0, y_0, 0)$ je vzdálenost bodu (x, y, t) od bodu $(x_0, y_0, 0)$]. Označíme-li ϱ_0 nejmenší z těchto ϱ_i, pak bude

$$|F(x, y, t) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \tag{4.62}$$

pro všechna x, y, t ($t \geqq 0$), pro něž

$$\varrho(x, y, t; x_0, y_0, 0) < \varrho_0 ,$$

což bylo dokázati.

Poznámka: Důkaz zůstává v platnosti i tehdy, jestliže bod x_0, y_0 neleží uvnitř P. Pak je ovšem nutno, aby $f(x_0, y_0) = 0$, a funkce $f(x, y)$ aby byla v bodě x_0, y_0 spojitá zevnitř, t. j. aby k libovolnému $\varepsilon > 0$ existovalo takové okolí bodu x_0, y_0, aby $|f(x, y)| < \varepsilon$ pro všechna x, y tohoto okolí, pokud $(x, y) \in P$.

Doposud jsme nikde nepoužili toho, že $f(x, y)$ je skoro všude spojitá v P (stačilo nám, že je měřitelná a že $|f(x, y)| < N$ v P). Této vlastnosti použijeme teprve teď, při důkazu jednoznačnosti řešení.

Jednoznačnost řešení.

Mějme dvě řešení $F_1(x, y, t)$ a $F_2(x, y, t)$ vlastností, uvedených ve větě 4.1. Označme

$$u(x, y, t) = F_1(x, y, t) - F_2(x, y, t) . \tag{4.63}$$

Máme dokázat, že $u(x, y, t) \equiv 0$ pro $t > 0$. Sestrojme integrál

$$J(t) = \iint_P u^2(x, y, t)\, dx\, dy . \tag{4.64}$$

Funkce u je podle své definice (4.63) pro $t > 0$ spojitá v P, při čemž je rovna nule na všech čtyřech stranách čtverce P. Dále je $|u| \leqq 2N$ v P a pro $t \geqq 0$.

Pro $t = 0$ je $u(x, y, t)$ spojitá a rovná nule v P až na množinu $\mathfrak{N}$ míry nula. Je tedy

$$J(0) = 0 .$$

Mimo to k $\varepsilon > 0$ existuje $t_0 > 0$, že

$$J(t) < \varepsilon \tag{4.65}$$

pro všechna t, $0 < t < t_0$.

O platnosti (4.65) se snadno přesvědčíme.

Zvolme $\varepsilon > 0$, $A > 0$. Množinu všech x, y, t, pro něž $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi$, $0 \leqq t \leqq A$, nazveme $\mathfrak{R}$. Sestrojme v P otevřenou množinu $\mathfrak{N}_1$ tak, že $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}_1$, $m\mathfrak{N} < \frac{\varepsilon}{8N^2}$. To lze, protože $\mathfrak{N}$ je množina míry nula. Dále sestrojme v $\mathfrak{R}$ množinu $\overline{\mathfrak{N}}$ tak, že $(x, y, t) \in \overline{\mathfrak{N}}$ když a jen když $(x, y) \in \mathfrak{N}_1$ a $0 \leqq t \leqq A$.

$\overline{\mathfrak{N}}$ je otevřená v $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{N}}$ je kompaktní, a protože u je v $\mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{N}}$ spojitá, je tam stejnoměrně spojitá. Pro $t = 0$ je v $\mathfrak{R} - \mathfrak{N}$ $u = 0$. Tedy existuje

$t_0 > 0$ ($t_0 \leqq A$), že $|u| < \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2\pi^2}}$ v $\mathfrak{R} - \mathfrak{N}$ pro všechna t ($0 \leqq t \leqq t_0$). Z toho plyne (4.65).

Tedy $J(t)$ je funkce spojitá v počátku a $J(0) = 0$. Pro $t > 0$ má $J(t)$ derivaci podle t[7]) a je

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = 2\iint\limits_P u\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= 2\iint\limits_P u\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= 2\iint\limits_P \left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \quad (4.66)$$

Ale

$$\iint\limits_P \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\,, \quad (4.67)$$

protože u je na stranách čtverce rovno nule, tedy, jak plyne z (4.66),

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} \leqq 0 \text{ pro všechna } t > 0\,. \quad (4.68)$$

Podle věty o střední hodnotě (která platí vzhledem ke spojitosti funkce $J(t)$ v bodě $t = 0$), je

$$J(t) \leqq J(0) = 0\,, \quad (4.69)$$

a protože

$$J(t) \geqq 0$$

pro všechna t (podle definice (4.63)), je

$$J(t) \equiv 0\,. \quad (4.70)$$

Ale $u(x, y, t)$ je funkce spojitá pro $t < 0$, a tedy

$$u(x, y, t) \equiv 0$$

pro všechna $t > 0$, což jsme měli dokázat.

Poznámka. Stejně jako při důkazu jednoznačnosti řešení problému 3.1 mohou také vzniknout oprávněné námitky proti derivování za integračním znaménkem a proti rovnici (4.67). Nápravu bychom opět mohli zjednat vyřčením nových předpokladů o derivacích funkce $F(x, y, t)$, při čemž bychom byli zcela ve shodě s fysikálním názorem.

Z matematického hlediska dosáhneme nápravy zcela stejným způsobem jako v poznámce k důkazu jednoznačnosti řešení v kapitole 3. Tam jsme se opírali o větu o jednoznačnosti řešení harmonického problému, je-li příslušná harmo-

[7]) Srv. následující poznámku.

nická funkce spojitá na uzavřeném oboru. Tato věta plyne z věty o maximu a minimu harmonické funkce. Ale tuto větu máme dokázánu i pro náš druhý problém ($|F(x, y, t)| \leqq M$ pro všechna $x \in P$ a $t \geqq 0$). Zbytek důkazu je úplně stejný jako v citované poznámce (kap. 3). Zvolíme opět $t_0 > 0$ a předpokládáme, že $u(x_0, y_0, t_0) = A \neq 0$ (x_0, y_0 je vnitřní bod čtverce P).

Bude nutně

$$u(x_0, y_0, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} E_{mn}^{(a)} \sin mx_0 \, e^{-m^2(t_0-a)}) \sin ny_0 \, e^{-n^2(t_0-a)}$$

(označení je stejné jako ve třetí kapitole).

Obdobně budiž

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2\frac{t_0}{2}}) \, e^{-n^2\frac{t_0}{2}} = S\,.$$

Pro každé a, $0 < a < \frac{1}{2}t_0$, bude

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2(t_0-a)}) \, e^{-n^2(t_0-a)} < S\,.$$

Zvolíme a tak malé, aby $|A_{mn}^{(a)}| < \dfrac{|A|}{S}$.

Potom

$$|u(x_0, y_0, t_0)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}^{(a)} \sin mx_0 \, e^{-m^2(t_0-a)}) \sin ny_0 \, e^{-n^2(t_0-a)}\right| <$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|A|}{S} \, e^{m^2(t-a)}) \, e^{-n^2(t-a)} < |A|\,. \tag{4.71}$$

Ale nerovnost (4.71) je ve sporu s předpokladem

$$u(x_0, y_0, t_0) = A\,,$$

čímž je věta 4.1 úplně dokázána.

Резюме.

ДВЕ ТЕОРЕМЫ О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

КАРЕЛ РЕКТОРИС (Karel Rektorys), Прага.

(Поступило в редакцию 4/II 1954 г.)

При решении уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

с данными краевыми и начальными условиями, так же как и при доказательстве однозначности решения, к непрерывности и непрерывной дифференцируемости функций, фигурирующих в этих условиях, предъявляются обычно большие требования (помимо требований, предъявляемых к самой области, в которой проблема формулирована). Однако, в реальных математически формулированных физических и технических задачах эти требования редко выполняются, как при краевых условиях (тело в тепловой ванне), так и при начальных условиях внутри тела (тепловое касание двух или более тел, образующих одно целое). Чаще всего мы встречаемся с классом кусочно-непрерывных функций, где с математической точки зрения возникают уже значительные затруднения.

В своей диссертации („Однозначность решения дифференциальных уравнений в частных производных теории теплопроводности при разрывных краевых условиях") автор занимался случаем, когда один размер рассматриваемого тела преобладал над другими двумя, так что задачу можно было считать плоской. Кроме того автор предполагал, что поперечное сечение рассматриваемоготела прямоугольно (для простоты рассматривалось квадратное сечение, от чего характер задачи не изменился) и что краевые условия (т. е. тепловая ванна) не изменяются во времени. Исходя из предположения, что фигурирующие в краевых и начальных условиях функции (и их производные) кусочно-непрерывны, в работе выводятся различные важные с физической точки зрения свойства решения и доказывается однозначность решения; кроме того автор занимается вопросами численных расчетов, в особенности равномерной сходимостью бесконечных рядов, представляющих собой решение уравнения. С физической точки зрения проблема разрешена в цитированной работе вполне удовлетворительным образом.

С математической точки зрения, однако, работа возбуждает внимание к решению нескольких интересных вопросов. Коэффициенты бесконечных рядов, о которых упоминалось выше, зависят от начальных и краевых условий проблемы. Ряды сходятся при значительно более общих начальных и краевых условиях, чем условия кусочно-непрерывности (функции). Возникает вопрос, какими свойствами будут обладать функции, определенные этими рядами, в частности, когда эти функции еще будут „непрерывно приближаться" к начальным и краевым условиям.

Этой проблематике и посвящена настоящая работа. Ядро работы образует доказательство следующих двух теорем (встречаемся здесь с понятиями интегрируемая функция и измеримая функция (множество); эти понятия применяются в смысле Лебега):

Проблема I (стационарный случай теплопроводности): Пусть в интервале $\langle 0, \pi \rangle$ дана функция $f(x)$, непрерывная во всех точках этого интервала за исключением точек, образующих множество $\mathfrak{M}$ меры нуль, причем $|f(x)| \leqq M$ в $\langle 0, \pi \rangle$. Отыщем функцию $V(x, y)$, определенную в квадрате $P(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi)$, с такими свойствами:

1. $V(x, y)$ является гармонической внутри P, т. е. удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi). \tag{1}$$

2. $V(x, y)$ ограничена в P константой M (той же, как и функция $f(x)$ в $\langle 0, \pi \rangle$).

3. $V(x, y)$ непрерывна в области $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 < y \leqq \pi$, причем

а) $V(0, y) = V(\pi, y) = 0 \quad (0 < y \leqq \pi)$, (2)

б) $V(x, \pi) = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)$. (3)

4. В каждой внутренней точке x_0 интервала $\langle 0, \pi \rangle$ $(y = 0)$, в которой $f(x)$ непрерывна, и $V(x, y)$ будет непрерывной как функция переменных x и y, причем имеет место

$$V(x_0, 0) = f(x_0)\ .$$

Мы утверждаем:

Теорема I. *Существует одна и (с точностью до точек множества $\mathfrak{M}$) только одна функция $V(x, y)$ с такими свойствами и эта функция дана для $y > 0$ рядом*

$$(Vx, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} \tag{4}$$

$$\left(a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x') \sin nx'\, dx'\right), \tag{5}$$

для $y = 0$

$$V(x, 0) = f(x)\ . \tag{6}$$

Проблема II (Случай зависимости от времени): Пусть в квадрате $P(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi)$ задана функция $f(x, y)$ $(f(x, y), \leqq N)$, непрерывная во всех точках квадрата P за исключением точек, образующих множество $\mathfrak{N}$ меры нуль. Отыщем функцию $F(x, y, t)$, ограниченную в P и для $t \geqq 0$ той же самой константой N, непрерывную в P для $t > 0$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \text{внутри } P, t > 0\ , \tag{7}$$

причем

а) $F(0, y, t) = F(\pi, y, t) = F(x, 0, t) = F(x, \pi, t) = 0 \quad (t > 0)$, (8)

б) во всех точках, в которых $f(x, y)$ непрерывна, и $F(x, y, t)$ для $t = 0$

будет непрерывной как функция переменных x, y, t, и далее в этих точках имеет место $F(x, y, 0) = f(x, y)$.[1])

Мы утверждаем:

Теорема II. *Существует одна и (с точностью до точек множества* $\mathfrak{N}$) *только одна функция* $F(x, y, t)$ *с такими свойствами и эта функция дана для* $t > 0$ *рядом*

$$F(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx \, e^{-m^2 t}) \sin ny \, e^{-n^2 t} \tag{9}$$

$$\left(A_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \iint_P f(x', y') \sin mx' \sin ny' \, dx' \, dy'\right), \tag{10}$$

а для $t = 0$

$$F(x, y, 0) = f(x, y) . \tag{11}$$

Summary

TWO THEOREMS CONCERNING THE EQUATION

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

KAREL REKTORYS, Praha.

(Received February 4, 1954.)

When boundary value problems for the differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

are solved and existence and uniqueness theorems established, considerable restrictions are put as to the continuity and differentiability of functions, appearing in the boundary conditions, taking no account of restrictions, put on the region itself, in which the problem is defined. But in the mathematically formed problems of the practice, these restrictions are rarely fulfilled, indeed as well in boundary conditions (a body in a thermic bath) as in initial conditions in the interior of the body (thermal contact of two or several bodies, forming one single body). The most fregnent case of functions, that we meet in boundary conditions, are the sectionally continuous ones. From the mathematical point of view, considerable difficulties arise in this case, when the belonging boundary value problem is solved.

[1]) К приведенным двум проблемам сводится по существу общая проблема теплопроводности в прамоугольных областях при неизменяющихся во времени краевых условиях.

In his dissertation („Uniqueness theorems for partial differential equations for heat — conduction when discontinuous boundary conditions are prescribed") the author dealt with the case, when one dimension of the body considered was considerably large in regard to the two remaining, so that the problem could be taken as twodimensional. In addition, the author supposed rectangular profile of the body (to get the problem more simple, the profile was supposed to be a square, which does not change the character of the problem, of course), and the boundary conditions (e. g. the thermic bath) not changing with the time.

On the supposition, that functions (and their derivatives), appearing in boundary and initial conditions, are sectionally continuous, several properties of the solution, important from the physical stand of view, are derived, unicity theorems are proved, and in addition, the author deals with several questions, touching the numerical calculation, especially with the uniform convergence of infinite series, by which the solution is defined. From the physical standpoint, the problem is solved in the mentioned dissertation in a considerably sufficient manner.

From the mathematical standpoint, the work suggests the solving of some curious questions. The coefficients of the quoted unfinite series are depending on initial and boundary conditions (functions) of the problem. The series converge for much more general initial and boundary functions than are the sectionally continuous ones. A question arises about the properties of the functions, defined by these series in this case, namely under what suppositions these functions will „continuously fit" to initial and boundary conditions.

These problems are being solved in this work.

The essence of the work is formed by the two following theorems (when the terms „integrable function" and „measurable function" are used, they are understood in the Lebesgue — sense):

I. Problem (Stationary Heat — Conduction):

Let $f(x)$ be continuous in the interval $\langle 0, \pi \rangle$ with the exception of points forming a set $\mathfrak{M}$ of measure zero. Let $|f(x)| \leqq M$ in $\langle 0, \pi \rangle$. A function $V(x, y)$ defined in a square P $(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi)$ of following properties is found:

1. $V(x, y)$ is harmonic in the interior of P, e. g. satisfies the equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi)\,. \tag{1}$$

2. $V(x, y)$ is bounded in P by the same constant M as the function $f(x)$ in $\langle 0, \pi \rangle$.

3. $V(x, y)$ is continuous in the region $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 < y \leqq \pi$ and

a) $V(0, y) = V(\pi, y) = 0 \quad (0 < y \leqq \pi)$, (2)

b) $V(x, \pi) = 0 \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$. (3)

4. In each interior point x_0 of the interval $\langle 0, \pi \rangle$ $(y = 0)$, in which $f(x)$ is continuous, the function $V(x, y)$ is continuous as function of the both variables x, y, and

$$V(x_0, 0) = f(x_0)\,.$$

For the I. problem holds

Theorem I. *There exists one and (with the exception of points of the set $\mathfrak{M}$) only one function $V(x, y)$ of the required properties, and this function is defined for $y > 0$ by the series*

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} \tag{4}$$

$$\left(a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x') \sin nx' \, dx'\right), \tag{5}$$

and for $y = 0$ by

$$V(x, 0) = f(x)\,. \tag{6}$$

II. Problem (Time-Variable Heat-Conduction)

Let $f(x, y)$ be continuous in the square P $(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi)$ with the exception of the set $\mathfrak{N}$ of measure zero. Let $|f(x, y)| > N$ in P. A function $F(x, y, t)$ is found in P and for $t \geqq 0$, continuous in P for $t > 0$ and bounded in P, $t \geqq 0$ by the same constant N as the function $f(x, y)$, such that

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \text{ in the interior of } P,\ t > 0\,, \tag{7}$$

while

a) $F(0, y, t) = F(\pi, y, t) = F(x, 0, t) = F(x, \pi, t) = 0 \quad (t > 0),$ (8)

b) in each point, where $f(x, y)$ is continuous, $F(x, y, t)$ is continuous as function of all the three variables x, y, t for $t = 0$, and $F(x, y, 0) = f(x, y)$ there.[1])

It holds

Theorem II. *There exists one and (with the exception of the points of the set $\mathfrak{N}$) only one function $F(x, y, t)$ of the properties required, and this function is defined for $t < 0$ by the series*

$$F(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx\, e^{-m^2 t}\right) \sin ny\, e^{-n^2 t} \tag{9}$$

$$\left(A_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \iint_P f(x', y') \sin mx' \sin ny' \, dx' \, dy'\right) \tag{10}$$

and for $t = 0$ by

$$F(x, y, 0) = f(x, y)\,. \tag{11}$$

---

[1]) To these two quoted problems it is possible to reduce a general heat — conduction problem in rectangular regions when boundary conditions do not vary with time.

ÚLOHY A PROBLÉMY

6. Dá se ukázat (viz na př. HORN, Gewöhnliche Diff.-Gleichungen beliebiger Ordnung, 1905, § 72), že řešení dif. rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\lambda y + \sin x}{y} \quad (\lambda > 0)\,,$$

lze v okolí počátku rozvinout v mocninnou řadu.

Určete poloměr konvergence těchto řad.

O. Vejvoda, Praha.

7. Buď $c(x)$ po částech spojitá funkce v $\langle 0, 1\rangle$. Nazveme řešení problému K vzhledem k funkci $c(x)$ a číslu P funkci $y(x)$ a koeficienty a, b, které splňují rovnici

$$y''(x) + P\,y(x) = ax + b + c(x)$$

a okrajové podmínky

$$y(0) = y(1) = 0\,; \quad y''(0) = 0\,, \quad y'(1) = 0\,.$$

Charakteristickým číslem problému K nazveme číslo P^0 takové, že existuje netriviální řešení problému K vzhledem k funkci $c(x) = 0$ a $P = P^0$. Toto řešení nazveme charakteristickou funkcí problému. Prvou charakteristickou funkcí nazveme charakteristickou funkci příslušnou k nejmenšímu charakteristickému číslu P_1^0. Buď M množina všech funkcí $c(x)$ po částech konstantní (s konečným počtem nespojitostí) v $\langle 0, 1\rangle$ splňující tam vztah $|c(x)| = \varepsilon$. Lze ukázat, že problém K vzhledem ke každému $c(x) \in M$ a $P \neq P^0$ má jediné řešení a při tom $y''(x)$ jest po částech spojitá funkce. Definujme na M funkcionálu F tímto předpisem:

$$F(c(x)) = \sup_{0 \leq x \leq 1} y''(x)\,,$$

kde $y(x)$ jest řešením problému K vzhledem k $c(x)$ $[c(x) \in M]$ a $0 < P < P_1^0$.

Domnívám se, že funkcionála F má tyto vlastnosti:

1. Existuje funkce $c^*(x) \in M$ pro kterou funkcionála F nabývá svého maxima.

2. Funkce $c^*(x)$ má právě tolik bodů nespojitosti, jako má prvá charakteristická funkce bodů, v nichž platí $y''(x) = 0$.

3. Funkce $c^*(x)$ má skoky právě v těch bodech, ve kterých řešení $y(x)$ problému K vzhledem k $c(x)$ a P splňuje vztah

$$y''(x+0) + y''(x-0) = 0 \, .$$

Ivo Babuška, Praha.

8. Lze dokázat tuto **větu**:

Buď $f(x)$ spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$. Označme

$$G_n(f) = \sum_{k=1}^{n} E_k\, f(x_k)$$

Gaussovu kvadraturu funkce $f(x)$. Jestliže $f(x)$ má p spojitých derivací a $f^{(p)}(x)$ splňuje Lipschitzovu podmínku s koeficientem α $(0 < \alpha \leqq 1)$, potom platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - G_n(f) \leqq O\left(\frac{1}{n^{p+\alpha}}\right) \quad \text{pro } n \to \infty .$$

Důkaz. Podle Jaksonovy věty (srv. И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, str. 164) existují polynomy $P_n(x)$ stupně n a konstanta C tak, že

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq \frac{C}{n^{p+\alpha}} \, .$$

Proto platí

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - G_n(f)\right| \leqq \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - G_n(P_n)\right| + |G_n(f - P_n)| \, .$$

Protože všechny koeficienty Δ_kGaussovy kvadratury jsou kladné a $\sum_{k=1}^{k=n} A_k = b - a$, platí

$$G_n(f - P_n) \leqq \frac{C}{n^{p+\alpha}}(b - a) \, .$$

Dále podle známých vlastností Gaussovy kvadratury jest

$$G_n(P_n) = \int_a^b P_n(x)\,\mathrm{d}x$$

a proto

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - G_n(f)\right| \leqq \frac{\text{konst}}{n^{p+\alpha}} \, ,$$

což bylo dokázati.

Rozhodněte, zda tuto větu lze obrátit, t. j. zda platí tato **věta**:

Buď $f(x)$ spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť platí

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - G_n(f)\right| \leqq O\left(\frac{1}{n^{p+\alpha}}\right) \quad \text{pro } n \to \infty \, .$$

Potom $f(x)$ má p spojitých derivací a $f^{(p)}(x)$ vyhovuje Lipschitzově podmínce.

(Srv. Bernštejnovu větu, str. 167, výše cit. knihy.)

Ivo Babuška, Praha.

Poznámka k úloze 1, uveřejněné ve 2. čísle tohoto ročníku na str. 163.

K této úloze došlo redakci několik upozornění, že jde o známou *Pellovu rovnici*; ta má vždy dokonce nekonečně mnoho řešení. Důkaz není snadný a lze ho nalézt téměř v každé knize o theorii čísel (na př. DICKSON-BODEWIG Einführung in die Zahlentheorie, 1931, str. 109, cvič. 5, a str. 144; E. LANDAU, Vorlesungen über Zahlentheorie, 1927, 1. sv., str. 57 až 64; W. SIERPIŃSKI, Teoria liczb, 1950, str. 251—261).

První sdělení zaslal redakci dr MIL. HLAVÁČEK, profesor jedenáctileté stř. školy v Náchodě.

Jan Mařík, Praha.

RECENSE ČLÁNKŮ A KNIH

F. R. Gantmacher, **Teorija matric** (theorie matic), Moskva, Gostechisdat, 1953 (492 str.).

V ruské literatuře jsou tři dosti obsáhlé učebnice lineární algebry od *Gelfanda*, *Malceva* a *Šilova* a také na př. v algebře *Kurošově* a v kursu *Smirnovově* (III, 1) je lineární algebře věnováno dosti místa. Nedávno vyšlá kniha *Gantmacherova* se opět zabývá obšírně lineární algebrou. Je tu však v kap. X—XV obsažena látka, o níž se jinde nepojednává.

Kniha je rozdělena na dvě části, z nichž každá se skládá z kapitol. Část první, kap. I—X, pojednává o základech theorie, část druhá, kap. XI—XV, se zabývá zvláštními otázkami a použitím.

Z theorie determinantů kniha předpokládá jen znalosti, jaké jsou obsaženy na př. v Algebře *Vlad. Kořinka* neb Determinantech a maticích *Boh. Bydžovského*. Věci méně obvyklé jsou v knize vyloženy.

V kap. I jsou podány základní pojmy o maticích a kvadratických formách.

V kap. II jsou vyloženy theoretické základy vylučovací methody nazývané methodou Gaussovou a v souvislosti s tím efektivní methody řešení soustavy n lineárních rovnic pro velká n. Toho je použito k odvození determinantní identity Sylvestrovy. V § 5 se čtenář seznámí s operováním s maticemi rozloženými na pole („bloky").

V kap. III je pojednáno o lineárních operátorech v n-rozměrném vektorovém prostoru a stanovena souvislost mezi operátory a maticemi.

V kap. IV jsou zavedeny pojmy základního významu: Charakteristický a minimální mnohočlen a pojem přidružené matice. V § 5 je pak podána methoda D. K. Fadejeva k současnému určení všech koeficientů charakteristického mnohočlenu a k určení přidružené matice.

V kap. V jednající o funkcích matic je uvedena definice a konkretní způsob určení $f(A)$, kde $f(\lambda)$ je funkce skalárního argumentu λ a A je kvadratická matice. Tohoto pojmu $f(A)$ je užito v § 5 k určení řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic lineárních prvního řádu s konstantními koeficienty. Konečně v § 6 je pojednáno o stabilitě pohybu v případě lineární soustavy diferenciálních rovnic. Úvahy v této kapitole se opírají pouze o pojem minimálního mnohočlenu matice a neužívají (na rozdíl od obvyklých výkladů) theorie elementárních dělitelů (která je vyložena až v kap. VI a VII).

Hlubší otázky theorie matic souvisí s uvedením matice na normální tvar. To se provádí pomocí theorie elementárních dělitelů. Vzhledem k důležitosti této theorie jsou podány o ní v knize dva výklady: analytický v kap. VI a geometrický v kap. VII. V § 8 kap. VII je podrobně vyložena methoda A. N. Krylova k praktickému určení koeficientů charakteristického mnohočlenu.

V kap. VIII se řeší maticové rovnice některých typů. Zde se probírá úloha určit pro dané matice A, B všechny matice X, pro něž platí $AX = XB$ (speciálně pro $A = B$) a podrobně se uvažuje o mnohoznačných funkcích matice, $\sqrt[m]{A}$ a $\log A$.

V kapitolách IX a X se jedná o lineárních operátorech v unitárním prostoru a o theorii kvadratických a Hermiteových forem. Tyto kapitoly nejsou založeny na theorii elementárních dělitelů, nýbrž užívají pouze základních úvah o maticích a lineárních operátorech dříve vyložených v prvních třech kapitolách knihy. V § 8 kap. X je podáno použití theorie forem na studium malých kmitů soustavy o n stupních volnosti. V § 10 téže kapitoly jsou uvedeny úvahy *Frobeniovy* z theorie Hankelových forem. (Upotřebení těchto úvah na problém Routh-Hurwitzův je podáno v kap. XV).

V kap. XI jsou definovány normální formy pro symetrické, antisymetrické a orthogonální matice a stanoveny zajímavé vztahy těchto matic s reálnými maticemi týchž tříd a s unitárními maticemi.

V kap. XII je vyložena obecná theorie svazků matic $A + \lambda B$, kde A a B jsou libovolné pravoúhelníkové matice téhož typu. Podobně jako studium regulárních svazků $A + \lambda B$ se provádí pomocí theorie elementárních dělitelů, studium singulárních svazků je založeno na Kroneckerově theorii minimálních indexů, která je jaksi dalším rozvitím theorie elementárních dělitelů. Pomocí theorie Kroneckerovy je stanoven kanonický tvar svazku $A + \lambda B$ v nejobecnějším případě, při čemž se autorovi podařilo zjednodušit výklad. Získaných výsledků je použito ke studiu soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

V kap. XIII jsou uvedeny zajímavé spektrální vlastnosti matic s nezápornými prvky a uvažují se hlavně dva druhy použití matic tohoto druhu: 1. na řetězce Markovovy v theorii počtu pravděpodobnosti a 2. na oscilační vlastnosti pružných kmitů v mechanice. Maticová methoda studia Markovových řetězců byla rozvita v pracích *V. I. Romanovského* a opírá se o skutečnost, že matice, jejichž prvky jsou pravděpodobnosti přechodu, jsou matice s nezápornými prvky zvláštního druhu („matice stochastické"). Oscilační vlastnosti pružných kmitů jsou uvedeny v souvislost s jinou důležitou třídou nezáporných matic — s maticemi „oscilačními". Tyto matice a jich použití byly uvažovány *M. G. Krejnem* a autorem ve zvláštní knize. V kap. XIII jsou vyloženy pouze některé hlavní výsledky tohoto oboru. Podrobněji je vše vyloženo v uvedené knize, o níž jsme promluvili ve zvláštní recensi. (str. 283 a 284 tohoto ročníku).

V kap. XIV jsou uvedena použití theorie matic na soustavu diferenciálních rovnic lineárních s proměnlivými koeficienty. V této kapitole má ústřední postavení (§ 5 až § 9) theorie multiplikativního integrálu. V prvních paragrafech a v § 11 jsou podány úvahy *Ljapunovovy*, které souvisí s úlohou o stabilitě pohybu, a uvedeny některé výsledky *N. P. Jerugina*. Paragrafy 9—11 se zabývají analytickou theorií soustav diferenciálních rovnic. V posledním § (§ 12) je pojednáno o analytických funkcích více matic a o jejich použití na studium diferenciálních soustav. Je promluveno o pracích *J. A. Lappo-Danilevského*.

Poslední kap. (XV) jedná o použití theorie kvadratických a zvláště Hankelových forem na problém Routh-Hurwitzův o určení počtu kořenů mnohočlenu ležících v pravé (nebo, což je totéž, horní polorovině). Úloha tato se vyskytuje při stanovení podmínek stability mechanických systémů. *Hurwitz* na ni byl upozorněn *A. Stodolou*, kterému se naskytla při propočtu regulátoru turbin. Nejprve pro reálné mnohočleny je odvozeno pomocí Cauchyovy theorie indexů a Sturmovy věty schema Routhovo a z toho odvozeno determinantní kriterium Hurwitzovo (§ 6), pak (§ 12) je podán druhý důkaz věty Routh-Hurwitzovy, založený na theorii indexů a Hankelových forem. Jsou odvozena také méně známá kriteria Lienard-Chipardova umožňující snížit počet determinantních nerovností přibližně na polovinu. V § 14 je odvozena věta Stieltjesova ukazující souvislost s theorií zvláštního druhu řetězců. Uvedeny jsou zde další vlastnosti mnohočlenů Hurwitzových (t. j. reálných mnohočlenů, jejichž kořeny leží vesměs v levé polorovině). Na jejich odvození mají velký podíl ruští matematici *Čebyšev* a *Markov* a dále i sovětští matematici. Konečně v posledním paragrafu (§ 18) je podáno zobecnění věty Routh-Hurwitzovy na mnohočleny s komplexními koeficienty.

Karel Rychlík, Praha.

Fr. Kadeřávek, **Úvod do dějin rýsování a zobrazovacích nauk.** Nakladatelství ČSAV, Praha, 1954, náklad 2200, stran 52, obrázků v textu 14, v příloze 21 obr.

V knížce, která je obdobou rozebrané knihy Geometrie a umění v dobách minulých (1925), ukazuje autor, že zobrazovací nauky se vyvíjely již v nejstarších dobách. Zobrazování předmětů úzce souvisí s rýsováním, které se stalo základem stavitelství, malířství a sochařství. Budování velkých staveb vede k počátkům geometrie — měřictví, které dosáhlo svého prvního rozkvětu v Egyptě a sloužilo zejména k vytyčení půdorysů chrámů a rozměřování půdy. Náznaky tohoto nejstaršího měřictví se zachovaly až po dnešní dobu v podání židovské a ruské pravoslavné církve. Důležitější je již znalost kolmého promítání na jednu (vodorovnou) průmětnu, které rovněž bylo používáno už ve starém Egyptě. Z novější doby je známo, že když v Praze byl zakládán chrám sv. Víta, byla současně ustavena hutní škola; rysy z této školy jsou podnes uchovány ve Vídni. Od kolmého promítání přešlo se pak k lineární perspektivě, která v 15. stol. dostává geometrický podklad. V druhé polovině 16. stol. uplatňuje se již také rovnoběžné promítání, ve kterém jsou zejména prováděny pohledy na části měst.

Jako první využívá kolmého promítání na dvě sdružené, navzájem kolmé průmětny *G. Monge*; stal se tak zakladatelem deskriptivní geometrie v našem slova smyslu. Jeho nauka, z počátku střežená jako francouzské státní tajemství, šířila se po pádu království rychle Evropou a tak se dostává také do Čech a to přes vídeňskou polytechniku. Mezitím byla v Praze založena stavovská inženýrská škola, později přeměněná v polytechniku. Nutnost rozvíjející se výroby strojů vyvolala potřebu učit základům deskriptivní geometrie, t. j. zobrazovací nauky, také na polytechnice. Po zřízení profesury deskriptivní geometrie byl jmenován prvním profesorem *Rudolf Skuherský*, který vedle své činnosti vědecké a učitelské nezapomínal ani na činnost veřejnou. V knížce je uvedena modifikace Skuherského kolmé axonometrie, která se jeví jako velmi jednoduchá zobrazovací methoda. Závěrem jsou uvedeni následovníci Skuherského na české technice i na technice německé a někteří jiní pracovníci v tomto oboru, kteří nepůsobili přímo na pražských technikách.

Knížka je napsána živým a poutavým slovem, může ji číst každý absolvent jedenáctiletky; obtížnější je pouze část, ve které se vykládá přímo upravená methoda Skuherského axonometrie. Text je doprovázen mnoha obrazci, které dobře osvětlují celý výklad; jen některé obrazce na křídovém papíře jsou poněkud rozmazány, takže ruší trochu dojem z dobře upravené knížky. O díle Rudolfa Skuherského je v knize pojednáno vzhledem k ostatním badatelům poněkud obšírněji, a to proto, že se připravují životopisy a ocenění díla význačných českých geometrů pro tisk jiným způsobem. *Karel Drábek*, Praha.

Karel Čupr, **Matematické zábavy a hry.** Věda všem, sv. 5; Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1954. Stran 178, obr. 81, náklad 2750, cena brož. 15 Kčs.

V knize jest velké množství matematických úloh, které mají buď zajímavé řešení nebo neočekávaný výsledek, nebo svoji historii, ať již jsou spojeny s některou význačnou osobností nebo místem svého vzniku. Tak zde čtenář nalezne klasické problémy matematiky, na př. kvadraturu kruhu, trisekci úhlu, a setká se zde se jmény význačných matematiků, jako *Archimedes*, *Fibonacci*, *Gauss* atd.

U četných úloh je podáno nejen znění a řešení, ale i historie vzniku úlohy a jejího řešení. Je zde i množství úloh, tak zvaných paradox a sofismat, ve kterých pomocí falešného úsudku se dokazuje, že $1 = 2$ a pod. U těchto úloh je podrobně vysvětleno, v kterých místech a proč je celý úsudek falešný. V knize je poměrně málo úloh, které nelze řešit logickou úvahou, na rozdíl od jiných knížek podobného rázu, kde se často vyskytují úlohy, jejichž řešení spočívá na nějakém triku. Čtenář se jistě v knize setká s množstvím úloh, které již dříve slyšel a třeba marně řešil, a dozví se zde jejich správné řešení. Při tom čtenář nepotřebuje hlubší matematické vědomosti, neboť, jak sám autor říká v předmluvě, čtenář — snad až na dvě či tři místa — vystačí úplně s vědomostmi, jež mu poskytuje střední škola.

Celá knížka je rozdělena na dvě části, z nichž prvá „Aritmetické zábavy a hry" má 14 kapitol a druhá „Geometrické zábavy a hry" 12 kapitol. V každé kapitole jsou shrnuty úlohy, k jejichž řešení se užívá podobných matematických method. Tyto methody jsou na začátku každé kapitoly podrobně vyloženy. Obě části již vyšly dříve, každá samostatně, a to prvá část pod názvem „Aritmetické hry a zábavy" jako 21. svazek sbírky „Cesta k vědění" za války v roce 1942, a druhá část pod názvem „Geometrické hry a zábavy" jako 38. svazek téže sbírky v roce 1949. V jejich novém vydání v jednom svazku byly provedeny nepatrné změny a opraveny některé tiskové chyby. Z tiskových chyb vyskytujících se v novém vydání upozorňuji na tyto:

str. 24: ve vzorci (1) má býti a_n místo a;
str. 87: 3. řádek shora a další má zníti „... za předpokladu, že n je celé kladné číslo, podél..."";
str. 96: 6. řádek shora místo „přední" má býti „přední";
str. 160: 11. řádek zdola místo „69a" má býti „69c";
str. 166: na obr. 76a místo E'', G'' má býti E', G';
str. 166: 9. řádek zdola místo $\overline{BD}^3 = 2\overline{BC}^2$ má býti $\overline{BD}^3 = 2\overline{BC}^3$.

Mimo to se v knize vyskytují tato nedopatření: na str. 8 v 11. řádku shora tvrdí autor, že je nutně $\delta = 3, 7$; to však z předcházejícího nijak nevyplývá, neboť i $\delta = 1, 5, 9$ vyhovuje předcházejícím úvahám; i některé další úvahy jsou nejasné. Až z náležité diskuse by vyplynulo, že vyhovuje pouze $\delta = 7$ a že jediné řešení je $47775 : 325 = 147$. Na str. 172 je na obr. 80 pravý šroub označen l a levý p.

Máme málo českých knih, jednajících o matematických hrách a zábavách, až snad na *Dobrovolného* duševní čtvrthodinky. Čuprova knížka má výhodu, že u každé úlohy je podáno její podrobné řešení a její celá historie. Čtenář zde nalezne úlohy jednoduché i složitější, na kterých si prohloubí své matematické vědomosti a logické myšlení. K tomu dopomáhají i příklady s výsledky, které jsou připojeny k některým kapitolám a které slouží k procvičení vyložených metod. Knížka jistě u mnohých čtenářů vzbudí zájem nejen o matematické hříčky, ale i o jiné matematické problémy a přivede je k soustavnému studiu matematiky. *Jan Kopecký*, Praha.

ZPRÁVY

SEDMDESÁTINY PROFESORA KÖSSLERA

Dne 19. června 1954 se dožil sedmdesátky PhDr MILOŠ KÖSSLER, profesor matematiky na matematickofysikální fakultě Karlovy university a člen korespondent Československé akademie věd. Byl synem rodičů chudých, ale pražských, takže měl to štěstí, že vystudoval akademické gymnasium v Praze I, které, jak známo, vychovalo velkou řadu vynikajících příslušníků našeho národa. Následujících sedm let — čtyři roky university a vzápětí za nimi tři roky nezaměstnanosti — nuzně se živil kondicemi a děláním dluhů, které potom po léta splácel. Po řadu let byl suplentem a pak „skutečným" učitelem matematiky a fysiky nejprve krátce v Domažlicích a potom dlouho v Praze XII. Na jeho vynikající činnost pedagogickou s láskou vzpomínají nejen jeho bývalí žáci; mnohokrát v životě jsem měl příležitost slyšet z úst učitelů bývalých měšťanských škol nadšená vyprávění o tom, jak právě Kössler to byl, kdo je v kursech pro vzdělání učitelstva naučil úspěšně vyučovat a vychovávat. V prosinci 1922 se stal mimořádným a v prosinci 1927 řádným profesorem matematiky na přírodovědecké (nyní matematickofysikální) fakultě Karlovy university. Jeho vědecký význam byl po zásluze oceněn v listopadu 1953, kdy se stal členem korespondentem Československé akademie věd. Jeho práce se týkají v prvé řadě theorie funkcí a budou oceněny v příštím čísle tohoto Časopisu akademikem VOJTĚCHEM JARNÍKEM. Význam prof. Kösslera není však zdaleka vyčerpán jeho vědeckými pracemi. Po řadu let spočívala na Karlově universitě tíha šíření matematických poznatků v oborech daleko nejdůležitějších pro aplikace převážně na bedrech prof. Kösslera; oprávněnou snahu o to, aby jeho vyučovací činnost byla v souladu s jeho osobní činností badatelskou, Kössler vždy, kdykoli toho bylo třeba, bez váhání podřizoval tomu ušlechtilému cíli, aby z bran fakulty do života vycházeli odborníci schopní účinně pomáhat těm, kdo matematiky potřebují, ale nejsou matematiky v užším smyslu. Četní jsou zejména fysikové, kteří především od prof. Kösslera získali tolik znalostí z matematiky, kolik pro jejich vědeckou práci bylo nezbytně třeba, a kteří po absolutoriu opětovně se obraceli na prof. Kösslera o matematickou pomoc, kterou vždy ochotně jim poskytoval. Zmínky zasluhuje i to, že té početné mase universitních studentů matematiky, u kterých už první rok studia zřetelně prozrazoval, že samostatní badatelé z nich nebudou, kteří však nicméně, pokud měli dobrou vůli, byli schopni opřít o získané znalosti matematiky úspěšnou práci, právě prof. Kössler nejlépe dovedl dát maximum toho, co jejich mozky stačily strávit. Já sám jsem prof. Kösslera osobně poznal r. 1919, kdy jsem po dvou a půl letech university a třech a půl letech nedobrovolné vojančiny měl před sebou těžký úkol co nejrychleji skončit universitní studium a zahájit vážnou vědeckou práci. Pro můj další vývoj bylo neobyčejně významné, že jsem měl to štěstí v kritické pro mne době se seznámit s profesorem Kösslerem. Brzo jsme se stali důvěrnými přáteli a když jsem 1923 na dlouhou řadu let odešel do Brna, nelitoval jsem ničeho víc než právě toho, že přestanou nekonečné rozhovory s Kösslerem, které mi daly více než dovedu vyjádřit. Mnohé bylo, co mne u Miloše Kösslera přitahovalo a v čem jsem viděl svůj vzor. Byla to především živelnost jeho zájmu o matematiku a zanícení pro neúnavné studium, bez kterého si nedovedl život představit. Byla to za druhé nesmírná dobrota srdce, nemožnost komukoli jakkoli ublížit a touha nezištně pomáhat všude tam, kde toho bylo třeba. Byla to za třetí bezvýhradná svědomitost, se kterou Kössler vykonával každý svěřený mu úkol, spojená bohužel se skromností mnohdy upřílišněnou, snad také i s malou průbojností. Kössler lépe než kdokoli jiný pochopil některé z nejlepších stránek povahy našeho nezapomenutelného učitele KARLA PETRA a skutečně krásně se řídil skvělým Petrovým příkladem. Mladí naši vědci nepochybí, jestliže vážně a důkladně se budou zamýšlet nad tím, čemu všemu by se mohli naučit od prof. Kösslera. Jemu samému pak, jehož mám rád jako málokoho jiného, ze srdce přeji především to, aby jeho zdravotní stav, v posledních letech bohužel nevalný, trvale se zlepšil tak, aby dlouho ještě zůstal mezi námi jako jeden z nejzasloužilejších členů naší matematické obce.

E. Čech, Praha.

ZEMŘEL PROFESOR DR VÁCLAV HRUŠKA

Dne 15. srpna zemřel po krátké nemoci dr VÁCLAV HRUŠKA, profesor aplikované matematiky na Českém vysokém učení technickém v Praze.

Celá životní dráha zesnulého byla naplněna odbornou a pedagogickou činností ve službách našeho nejvyššího a ve střední Evropě nejstaršího technického učiliště (ČVUT).

Narodil se dne 14. 6. 1888 v Holicích. Po přípravných studiích na strojním odboru české techniky a filosofické fakultě Karlovy university, kde dosáhl v roce 1910 učitelské způsobilosti k vyučování matematice a deskriptivní geometrii na vyšším stupni tehdejších středních škol gymnasiálních a reálných, rozhodl se po krátkém působení na první české vyšší reálce v Praze pro dráhu vědeckou a stal se asistentem na vysoké škole technické v roce 1911.

Z počátku se odborně věnoval studiu relací mezi periodami Abelových funkcí a výsledky svých bádání publikoval v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky a v Rozpravách II. třídy České akademie věd a umění.

Později obrátil svoji pozornost ke studiu numerických a grafických method početních, které jsou významným nástrojem, umožňujícím aplikaci matematické theorie v inženýrské problematice. Tento směr matematického bádání jej vedl již jako mladého vědce ke spolupráci s universitním profesorem VÁCLAVEM LÁSKOU.

Vědecká rutina a vyzrálost prof. Lásky mu usnadnila již na počátku jeho nového směru odborné činnosti pronikavě vniknout do rozsáhlé oblasti method aplikované matematiky.

Spolupráce s prof. Láskou přinesla české vědě dvě průkopnické knižní publikace. První vyšla v roce 1923 pod názvem *Počet grafický a graficko-mechanický*. V ní se autoři zabývali především základními operacemi grafického počítání, jejich aplikací na řešení úloh z počtu diferenciálního a integrálního, potom nomografií a nejdůležitějšími matematickými přístroji.

V druhé publikaci *Teorie a praxe numerického počítání* z r. 1934 vyložili oba autoři základní kapitoly diferenčního počtu a to především methody interpolační pro hledání hodnot funkcí daných tabulkou (o jednom i dvou argumentech) podrobně rozvedli methody numerického derivování a integrování a demonstrovali některé methody numerické integrace diferenciálních rovnic.

V r. 1952, vydal prof. Hruška opět knihu s názvem *Počet grafický a graficko-mechanický*. I když sám označil tuto objemnou monografii grafického počtu jako druhé vydání knihy, kterou původně vydal s dávno zesnulým prof. Láskou, běží o knihu s úplně novou koncepcí, která s původní má společný jenom název a zhruba osnovu. V této knize, která má téměř šestinásobný rozsah proti první publikaci (přes 1000 stran), uložil všechny své zkušenosti, kterých nabyl během své čtyřicetileté učitelské činnosti a uložil v ní všechny své poznatky, které načerpal z anglosaské a románské literatury, k níž mu byl umožněn přístup znalostí těchto jazyků.

Nejenom v této knize, která je jedním z jeho životních děl, ale v celé řadě pojednání z aplikované matematiky, zanechal doklady o mimořádném ovládání početní techniky, které je provázeno originálními, důmyslnými počtářskými obraty.

Svůj smysl pro aplikaci matematiky vyjádřil svými pojednáními o pružné řetězovce a v poslední době intensivní spoluprací s různými výzkumnými ústavy, technickými odborníky v elektrotechnice i odborníky v jiných oborech.

Od r. 1949 se věnoval ve své učitelské činnosti převážně speciálním přednáškám z aplikované matematiky. (Maticovému počtu a jeho užití v elektrotechnice, relaxační methodě a různým speciálním methodám pro numerické řešení diferenciálních rovnic obyčejných i parciálních). Tyto přednášky byly navštěvovány nejvyspělejšími studenty z vyšších ročníků a hlavně pak asistenty a aspiranty. Tato themata jsou většinou v rukopise jeho vědecké pozůstalosti.

Nejenom v přednáškové činnosti, ale i v činnosti publikační byl prof. Hruška člověk pilný, houževnatý a cílevědomý. Své odborné práci byl zcela oddán.

Miloval klidný život, k němuž jej patrně váděla chronická churavost, která jej provázela od nejmladších let. A tak zdravotní stav i osobní založení byly nepochybně příčinou, že nerozvíjel patrnější veřejnou aktivitu. Přesto v mladších letech se nesnažil vyhnout povinnosti, kterou na něm žádala současná situace, aby jako nejzkušenější člen, se stal předsedou Spolku vysokoškolských asistentů a houževnatě prosazoval jejich oprávněné požadavky.

Zanícení pro odbornou práci jej také přivedlo do výboru Jednoty čsl. matematiků a fysiků, kde po dlouhá léta působil a stal se také zakládajícím členem Jednoty.

Za svoji publikační činnost byl jmenován mimořádným členem Královské české společnosti nauk.

Prof. Hruška byl jeden z mála lidí, kteří jasným perspektivním pohledem odhadli možnosti rozvoje výroby velkých počítacích strojů u nás v republice. Přispěl tak mimořádným podílem k existenci státně důležitého vědeckého střediska matematické laboratoře při Československé akademii věd. Jako člen vědecké rady této matematické laboratoře iniciativně podporoval všechny kroky, které vedly k návrhu a ke konstrukci československého samočinného počítacího automatu.

V matematické obci československé bude prof. Hruška zapsán jako velký znatel numerických a grafických method početních, jejichž byl neúnavným propagátorem a v této disciplině mu zůstane trvale přisouzeno přední místo.

My, kteří jsme s prof. Hruškou byli v častém osobním styku, rádi dosvědčujeme jeho shovívavý způsob řízení společných věcí, jeho porozumění pro mladší pracovníky, které neomezoval v jejich osobních zájmech, a jeho ochotu poskytnout dobře míněné rady.

Jeho předčasného odchodu želíme upřímně nejenom pro jeho povahové vlastnosti, ale především proto, že v něm náš stát ztrácí odborníka, který měl předpoklady vésti mladší pracovníky, kteří se mohli mnoho naučit z jeho bohatých vědomostí a tím přispěti k rychlejšímu vybudování socialismu v naší vlasti. *Václav Pleskot*, Praha.

SEZNAM VĚDECKÝCH PRACÍ PROF. DR VÁCLAVA HRUŠKY

V Časopise pro pěstování matematiky a fysiky (Praha):

1. Konstrukce bodů vratu vrženého stínu zborcené plochy třetího stupně (1911, roč. 40).
2. O systémech singulárních relací mezi periodami Abelových funkcí tří proměnných (1911, roč. 48).

3. Redukce svazku bilineárních forem a systému relací mezi periodami nedegenerovaných singulárních Abelových funkcí tří proměnných (1922, roč. 51).
4. Poznámky o grafickém počtu (1923, roč. 52).
5. Kritické poznámky o grafickém integrování (1924, roč. 53).
6. Několik elementárních poznámek o numerickém počítání (spolu s dr. *J. M. Horákem*, 1925, roč. 54).
7. Řešení rovnic iteracemi (1928, roč. 57).
8. Integrál prosté hodnoty polynomu (1931, roč. 60).
9. O interpolaci (ve Zprávách o 2. sjezdu matematiků zemí slovanských 1935, roč. 64).
10. Les formules de quadrature approchée de M. K. Petr (1936, roč. 66).
11. Une note sur les fonctions aux valeurs intermédiaires (1946, roč. 71).
12. Pružná řetězovka (přednáška čsl.-polského kongresu matematiků v Praze, 1949).

V Czechoslovak Mathematical Journal (Praha):

13. Remarque sur la note de M. *Jiří Seitz* dans le No 4, 1950, p. 137 des „Aktuárské vědy".

V Rozpravách české Akademie věd a umění, třída II:

1. O relacích mezi periodami degenerovaných Abelových integrálů rodu 3 (1919, roč. 27, čís. 33).
2. O racionálních kořenech polynomu $u^3 - \frac{1}{3}J \cdot u - \frac{1}{27}J$, jenž se vyskytuje v theorii singulárních Abelových funkcí tří proměnných (roč. 28, čís. 15).
3. O nových vzorcích z theorie pfafianů (roč. 30, čís. 3).
4. O elementárních dělitelích alternující bilineární formy (roč. 30, čís. 14).
5. až 7. Tři příspěvky k řešení soustav rovnic iteracemi (roč. 53, čís. 6, 17 a 32, 1943).
8. Pružná řetězovka (roč. 54, čís. 10, 1944).
9. Poznámka o sestrojování spojnicových nomogramů (roč. 54, čís. 21, 1944).

V Bulletin international de l'Academie des Sciences de Bohême:

1. Sur les relations parmi les périodes des intégrales abéliennes dégénérées de genre 3 (roč. 22, 1918).
2. Sur les racines rationneles du polynome $u^3 - \frac{1}{3}J \cdot u - \frac{1}{27}J$ qui figure dans la theorie des fontions abéliennes singulieres de trois variables.
3. až 4. Zwei Beiträge zur Lösung von Gleichungssystemen durch das Iterationsverfahren (roč. 53, čís. 17 a 32, 1943).
5. La chainette elastique (roč. 54, čís. 10, 1944).
6. Une note à la construction des nomogrammes à aligment (roč. 54, čís. 21, 1944).

Ve Věstníku Král. české společnosti nauk v Praze, třída II:

1. Aproximace funkcí mnohočlenu $P_n(x)$ tak, aby $\int_a^b |f(x) - P_n(x)|\, dx$ byla minimem (roč. 1929, Praha 1930).

V časopise Fysika v technice:

1. Bushův integraf, I, čís. 1, JČMF, Praha 1946.

V Rozpravách Jednoty pro vědy pojistné v Praze:

1. O Sheppardových kvadraturních formulích (čís. 7, 1930).
2. Užití semilogaritmického papíru k posouzení tvaru pozorování (1932, Benešův cyklus IV, 1931).

V Elektrotechnickém obzoru, Praha (spolu s Ing. dr *V. Kelbichem*):

1. Universální nomogram pro výpočet venkovních elektrických vedení (roč. 25, 1936).
2. Počítací pravítko k určení průhybů venkovních elektrických vedení (roč. 25, 1936).

Publikace neperiodické:

1. Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace (Praha 1940, Jednota čes. matematiků a fysiků, čís. 7, sbírky Cesta k vědění, 2. vyd., 1950).
2. Venkovní elektrická vedení počítaná jako pružná řetězovka (v Elektrotechnické knihovně, Praha 1940, Elektrotechnický svaz).
3. Nomogramy s průsvitkou, Praha 1947, Jednota čs. matem. a fysiků.
4. Počet grafický a grafickomechanický (v Knihovně spisů matematických a fysikálních, čís. 9, stran VII + 188, Praha 1923, JČMF), spoluautor *Václav Láska*, profesor Karlovy university.
5. Theorie a praxe numerického počítání (v Knihovně spisů matematických a fysikálních, čís. 15, stran 495, Praha 1934, JČMF), spoluautor *Václav Láska*, profesor Karlovy university.
6. Počet grafický a grafickomechanický (Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952, 1072 stran). Druhé přepracované a rozšířené vydání — viz 4).
7. Hesla o grafickém a numerickém počtu, o planimetrech v Teyssler-Kotyškově Technickém slovníku naučném.

AKADEMIK ZDENĚK BAŽANT ZEMŘEL

České vysoké učení technické a jeho fakulta inženýrského stavitelství ztratila navždy dne 1. září 1954 svého vynikajícího člena akademika ZDEŇKA BAŽANTA, profesora stavební mechaniky, grafické statiky, nauky o pružnosti a pevnosti, který po dvě období stál v čele Českého vysokého učení technického jako jeho rektor, který po dvě období stál v čele fakulty inženýrského stavitelství jako její děkan a který po údobí padesáti let stál jako význačný vědecký pracovník se světovou úrovní v čele vysokoškolských učitelů, kteří znamenitým způsobem vychovávali technickou inteligenci našemu národu.

Již běh studií Zdeňka Bažanta na vysoké škole naznačoval, že jde o zjev mimořádný, u něhož jsou patrny předpoklady k nejsmělejším aspiracím na dráze vědecké. Záliba v matematickém myšlení a hluboký zájem o theoretické discipliny inženýrské mu dovolily uskutečnit v plné míře všechny aspirace.

Zakončiv studia v roce 1902 získává za dvě léta svojí disertační prací „Staticky určité spojité nosníky přehradové" hodnost doktora technických věd. Vynikající vědecká úroveň práce jej doporučuje, aby byl téhož roku povolán za suplenta přednášek nauky o pružnosti a pevnosti a o grafické statice pro posluchače architektury a strojnictví. Ve svém vědeckém růstu intensivně pokračuje a za další dvě létá se již habilituje na soukromého docenta stavebné mechaniky. Ve svých šestadvaceti letech je jako renomovaný vědecký pracovník doporučen profesorem ŠOLÍNEM při jeho odchodu na odpočinek za zástupce na stolici stavebné mechaniky. Po třech létech suplování byl ve svých 29 letech jmenován mimořádným profesorem stavebné mechaniky, grafické statiky, nauky o pružnosti a pevnosti a stereotomie.

Úkol, který převzal po vynikajícím pedagogu a tvůrčím badateli Šolínovi, byl nadmíru zodpovědný a náročný. Ale mladý, houževnatý vědecký adept Bažant jej plně chápe a dík svému nadání a povahovým vlastnostem jej znamenitě plní.

Nastoupení po Šolínovi a plnění Šolínova odkazu hodnotí akademik FRANTIŠEK KLOKNER při příležitosti Bažantových sedmdesátin slovy: „Byl-li Šolín tvůrcem a zakladatelem, byl Bažant stavitelem a budovatelem stavebné mechaniky u nás a hlavou její školy."

Jako profesor se snažil usnadnit posluchačům studium náročných technických disciplin vydáváním hodnotných příruček. Již v roce 1912 vydává litografie svých přednášek z nauky o pružnosti a pevnosti a tiskem pak publikuje v létech 1918 až 1920 trojdílnou klasickou učebnici *Stavební mechanika*. Učebnice vychází v několika vydáních a v r. 1950 je doplněna čtvrtým dílem.

Tyto učebnice a jejich podrobné výtahy v Technickém průvodci sloužily nejenom studentům ke zkouškám z této disciplíny, ale staly se vyhledávanými příručkami pro projektanty inženýrských děl.

Snaha opatřovat odbornou literaturu celé české veřejnosti jej přivedla do vydavatelského spolku Česká matice technická. Po třicet let stál v jejím čele a tato instituce mu vděčí za veškerou vážnost a úctu, kterou si vydobyla svojí publikační činností.

Účinnost působení akademika Bažanta ve funkci profesora byla založena na dialektickém spojení hlubokých theoretických vědomostí s praktickými znalostmi. Jako projektant, který již na počátku své odborné dráhy byl odměněn za návrh Mánesova mostu, se účastní během svého života četných soutěží, v nichž běží o budování nejzodpovědnějších inženýrských staveb v naší vlasti.

Studijní cesty v cizině a účast na mnoha mezinárodních kongresech přispívají k jeho tvůrčímu obohacení a obrážejí se v jeho učitelské činnosti, kde se snaží o výchovu inženýra se širokým rozhledem.

Osobní vlastnosti, v nichž dominovala poctivost, houževnatost a upřímnost, působily povzbudivě na studenty, kteří s plným porozuměním chápali jeho náročnost na požadavky při zkušebním výkonu.

V osobě akademika Bažanta odchází jeden z galerie význačných učitelů fakulty inženýrského stavitelství, jejichž zásluhou měli absolventi pražské techniky vysokou a mezinárodně uznávanou odbornou úroveň.

Sedmdesátiny prof. Bažanta v roce 1949 byly příležitostí, aby vědecká veřejnost, různé technické obory, i četné veřejné korporace zhodnotily záslužné dílo jubilantovo. Ministerstvo školství vyrozumívá jubilanta, že znovuzrozená republika se neohlíží na věkovou hranici vynikajících pracovníků s pracovním elánem, jaký má Bažant a umožňuje jim, aby nerušeně pokračovali ve své tvůrčí činnosti. Ba naopak vytváří jim hmotné podmínky, aby ještě lépe se mohli věnovat své práci.

Prof. Bažant nadále přednáší na vysoké škole. Nekoná ovšem již základní přednášky, ale vzdělává mladé vědecké kádry, aby jim předával své bohaté osobní zkušenosti a tak je to pouze smrt, která přerušuje jeho plodnou práci a končí život jednoho z nejúspěšnějších vědeckých technických pracovníků, který jako technik se činně účastnil života Jednoty českosl. matematiků a fysiků i života v Matematické obci pražské.

Václav Pleskot, Praha.

PRVNÍ PRACOVNÍ KONFERENCE ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATICKÝCH STATISTIKŮ V PRAZE

Ve dnech 27.—30. června 1954 se konala konference matematických statistiků. Účastnilo se jí na 200 odborníků ze všech krajů republiky. Zastoupeny byly: Matematický ústav ČSAV, který konferenci pořádal, katedra matematické statistiky na matematicko-fysikální fakultě v Praze, Výzkumný ústav sdělovací techniky A. S. Popova a jiné výzkumné ústavy ministerstva strojírenství, dále výzkumné ústavy ministerstva zdravotnictví, ministerstva chemického průmyslu a jiných ministerstev. Na konferenci byli přítomni také četní odborníci ze závodů a podniků, kteří používají matematicko-statistických method ve výrobě, zejména v kontrole jakosti. K úspěchu konference značnou měrou přispěla zahraniční účast vědců světového jména, prof. B. V. GNĚDĚNKA, řádného člena Ukrajinské akademie věd, prof. H. STEINHAUSE, řádného člena Polské akademie věd a prof. A. RÉNYIHO, člena-korespondenta Maďarské akademie věd a ředitele Ústavu aplikované matematiky v Budapešti. Konferenci pozdravil také indický statistik P. C. MAHALANOBIS z Kalkutty, vedoucí delegace indických vědců, která se na cestě do Moskvy zastavila v Praze.

Účelem konference bylo podat přehled o výsledcích práce v oboru theorie pravděpodobnosti a matematické statistiky a jejich aplikací u nás, zhodnotit tyto výsledky a naznačit směrnice další práce. Konference měla též ukázat zástupcům podniků, výzkumných a vědeckých ústavů rozsáhlé možnosti aplikací matematické statistiky v nejrůznějších oborech.

Po zahájení přednesli *F. Fabián* a *J. Hájek* referát: O některých základních otázkách matematické statistiky.

V průběhu konference byly prosloveny tyto přednášky (jako jednohodinové referáty a dvacetiminutová sdělení):

1. *B. V. Gněděnko*: O neparametričeskich zadačach v matematičeskoj statistike.
2. *A. Rényi*: Über neue axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
3. *J. Janko*: Vývojové tendence ve statistické indukci.
4. *J. Beránek*: O statistické theorii turbulence.
5. *J. Pantelopulos*: Quelques résultats de mesure des fluctuations des vitesses et du débit solide sur le Danube.
6. *J. Novák*: O spojitosti množinových funkcí a spojitém rozšíření pravděpodobností.
7. *M. Jiřina*: Regulární podmíněné pravděpodobnosti.
8. *J. Seitz*: Poznámka k spojité transformaci náhodných veličin.
9. *F. Fabian*: Theorie limitních zákonů.
10. *L. Truksa*: Vztah inverse stochastických procesů k fiduciálním rozložením pravděpodobnosti.
11. *A. Špaček*: O zkušenosti v theorii statistického rozhodování.
12. *J. Nedoma*: Poznámka k McMillanově článku „Základní věty z theorie informací".
13. *O. Šefl*: Poznámka k theorii spojitých stacionárních procesů.
14. *A. Kotzig*: Příspěvek k problému hodnocení odhadu pořadí.
15. *A. Žaludová*: O současném stavu aplikací matematické statistiky ve strojírenství.
16. *H. Steinhaus*: Über einige grundsetzliche Fragen der mathematischen Statistik.
17. *M. Vacek*: Statistika ve vzdravotnictví.
18. *M. Josífko*: Statistické methody pro hodnocení biologických zkoušek spolu se sdělením *F. Linka*: Odhad významnosti kvantálních odpovědí při rutinních pracích.
19. *M. Špačková*: Aplikace statistických method v biologické kontrole léčiv.
20. *O. Benešová*: Naše zkušenosti z jednoroční spolupráce se statistikem v biologické kontrole léčiv.
21. *V. Trčka*: Praktické zkušenosti s hodnocením *LD*50 různými methodami.
22. *V. Malý*: Logaritmicko-normální rozložení.
23. *Zd. Režný*: Použití maticové formulace vícerozměrného normálního rozložení a theorie normální regrese na některé úlohy analysy rozptylu.
24. *J. Sedláček*: Theorie jakostního třídění.
25. *V. Klega*: Methody kontroly seřízení automatisovaných operací ve strojírenství.
26. *A. Liška*: Poznámky k zániku větvících se procesů a použití v chemii.
27. *L. Prášek*: Statistická theorie únavy materiálu.
28. *J. Likeš*: Příspěvek k theorii uspořádaných výběrů z exponenciálního základního souboru.
29. *J. Machek*: Rozdělení průměru *r* krajních hodnot v uspořádaném výběru.

30. *J. Křepela*: Přejímání partií rozdělených do stejných podskupin.
31. *V. Horálek*: Operační charakteristika přejímky jedním výběrem při několika jakostních znacích.
32. *M. Ullrich*: O odlehlých pozorováních.
33. *V. Rýpar*: Statistická kontrola jakosti výroby chemického průmyslu.
34. *A. Pérez*: „Incertitude, entropie, information."
35. *L. Prouza*: O některých nových statistických problémech v hromadné výrobě.
36. *M. Knotek*: Aplikace matematické statistiky na hutní výrobu a metalurgické procesy.
37. *B. Pardubský*: Použití matematické statistiky při rozboru výrobních chyb.
38. *A. Robek*: Potravinářská výroba a methody matematické statistiky.
39. *Z. Koutský*: O reléovém stroji pro statistická rozhodování na základě mnohonásobného a sekvenčního výběru.
40. *K. Winkelbauer*: Poznámka k sekvenční analyse.
41. *O. Fischer*: Lineární odhad ve vícenásobné faktorové analyse.
42. *A. Žaludová*: Necentrální test t použitím rozpětí.
43. *J. Hájek*: Vydatnost pořadových testů.

Na konferenci byla přijata *resoluce* tohoto znění: „První pracovní konference československých matematických statistiků, konaná v Praze ve dnech 27. až 30. června 1954, stanoví tyto úkoly a povinnosti:

1. Organisovat spolupráci našich vědeckých pracovníků v theorii pravděpodobnosti a v matematické statistice s vědeckými pracovníky těchto oborů v SSSR a v lidově demokraktických státech. Usilovat o vydávání mezinárodního časopisu, v němž by byly publikovány práce odborníků z SSSR a z lidově demokratických zemí ve jmenovaných oborech.
2. Organisovat skupinu pracovníků, která se bude systematicky zabývat filosofickými a ideologickými otázkami theorie pravděpodobnosti a matematické statistiky.
3. Utvořit pravidelné studijní kroužky a skupiny s vědeckou náplní z oboru theorie pravděpodobnosti a matematické statistiky.
4. Usilovat o to, aby byla ve větší míře vydávána skripta důležitých partií počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky, a to v takovém nákladu, aby byla kryta i poptávka odborníků z praxe. Dále rozšířit a doplnit Tabulky k matematické statistice od prof. Dr Janko dalšími tabulkami a vydat je knižně.
5. Usilovat o další prohlubování osvědčených matematicko-statistických method v průmyslové výrobě a ve výzkumu.
6. Usilovat o další rozšíření a prohloubení aplikací matematické statistiky ve zdravotnictví a ve zdravotnickém výzkumu.
7. Navázat spolupráci s odborníky ve výzkumu zemědělském a to jak v oboru výroby živočišné, tak i rostlinné.
8. Zkoumat možnosti užití matematicko-statistických method v problémech ekonomických.
9. Rozšířit spolupráci matematických statistiků s odborníky ve fysice, geofysice, astronomii, meteorologii, klimatologii a hydrologii.
10. Do tří let uspořádat konferenci československých matematických statistiků s mezinárodní účastí. Kromě toho svolávat thematické konference, týkající se zejména vědeckých výsledků v oboru theorie pravděpodobnosti a matematické statistiky, použití matematické statistiky v průmyslové výrobě a v průmyslovém výzkumu, ve zdravotnictví a ve zdravotnickém výzkumu, v zemědělském výzkumu.

11. O průběhu konference uveřejnit zevrubnou zprávu v Časopise pro pěstování matematiky. Dále rozmnožit a poslat zájemcům ty referáty a sdělení, přednesené na konferenci, na základě kterých bude provedena další diskuse.
12. Zvolit komisi odborníků, jejíž členové zajistí plnění jednotlivých bodů resoluce."

Zevrubná zpráva o přednáškách a referátech bude uveřejněna v příštím čísle časopisu.

Josef Novák, Praha.

VĚDECKÉ ZASEDÁNÍ I. SEKCE ČESKOSLOVENSKÉ AKADEMIE VĚD

(Stručné obsahy jednotlivých matematických přednášek)

Krátká zpráva o vědeckém zasedání skupiny matematiků ve dnech 13. a 14. dubna 1954 byla uveřejněna v 3. čísle tohoto časopisu. Přinášíme nyní stručné výtahy jednotlivých referátů v pořadí, ve kterém byly na tomto zasedání předneseny.

Akademik *Eduard Čech*: **Přímkové kongruence a jejich transformace.**

Autor uveřejnil článek v časopise Čechoslovackij matematičeskij žurnal, roč. 2 (1952), str. 176—187, v němž určil všecky obálky dvouparametrové soustavy kolineací v trojrozměrném prostoru a zjistil, že tyto obálky definují obsáhlou třídu transformací přímkových kongruencí. V přednášce byla podána klasifikace těchto transformací a uvedeny nové výsledky. Dále byl rozřešen problém možnosti rozkladu uvažované transformace na soustavu asymptotických transformací přímkových ploch.

Dr *Zbyněk Nádeník*: **O plochách analogických k Bertrandovým křivkám.**

Budtež (A) a (B) dvě reálné plochy v trojrozměrném eukleidovském prostoru a O_a (resp. O_b) orthogonální kongruence křivek na ploše (A) (resp. na ploše (B)). Označme T_a (resp. T_b) trojhran, tvořený v bodě A (resp. B) plochy (A) (resp. (B)) tečnami ke křivkám orthogonálních kongruencí O_a v bodě A (resp. kongruencí O_b v bodě B) a normálou plochy (A) v bodě A (resp. plochy (B) v bodě B). Budiž C jednojednoznačná korespondence mezi body ploch (A) a (B), při níž normály ploch (A) a (B) v korespondujících bodech A a $B = CA$ nesplývají. Kdy má korespondence C tu vlastnost, že trojhrany T_a a T_b v korespondujících bodech A a $B = CA$ tvoří útvar invariantní vůči dvojici odpovídajících si bodů A a $B = CA$?

Řešení této otázky, která je modifikací jistého problému *E. Čecha*, je představováno právě jen W-plochami, definovanými relací $k_1K + k_2H + 1 = 0$, kde $k_1 = \text{konst.} \neq 0$, $k_2 = \text{konst.}$, $k_1 - k_2^2 \geqq 0$ a K resp. H je Gaussova resp. střední křivost plochy (A). Na ploše (B) platí relace analogická. Orthogonální kongruence O_a na ploše (A), která není kanálová, jsou pak ty, u jejichž křivek je v každém bodě geodetická křivost lineární kombinací s konstatními koeficienty normální křivosti a geodetické torse.

Akademik *Bohumil Bydžovský:* **Příklad geometrické konfigurace.**

V říjnovém sešitě „Mathematische Nachrichten" z r. 1948 popsal *M. Zacharias* konfiguraci $(12_4, 16_3)$ — v dalším konfigurace Z — která se od konfigurací tohoto typu dotud známých liší tím, že obsahuje tři body té vlastnosti, že tři body oddělené od každého z nich leží v přímce. Autor v přednášce uvedl, že body této konfigurace leží na kubické křivce rodu jedna a souvisí úzce s určitou t. zv. konfigurací Hesseovou, že však incidenční tabulka platící pro konfiguraci Z má ještě jedno řešení. Toto řešení je imaginární, body příslušné konfigurace neleží na kubické křivce; je to první známý příklad konfigurace $(12_4, 16_3)$, mající tuto zápornou vlastnost. Veden analogií s touto imaginární konfigurací sestrojil pak reálnou konfiguraci, která má význačnou vlastnost výše uvedenou u konfigurace Z, neleží na kubické křivce a mimo to neobsahuje žádné přímky konfiguraci cizí jako je tomu u konfigurace Z.

Dr *Miroslav Fiedler:* **O některých výsledcích z geometrie simplexů v E_n.**

Autor uvedl věty o existenci a unicitě simplexu při daných velikostech některých hran nebo vnitřních úhlů, věty o počtu ostrých, pravých a tupých vnitřních úhlů simplexu. Dále se zmínil o representacích uspořádaných m-tic bodů v E_{m-1} jako vektorů lineárního prostoru dimense $\binom{m}{2}$, o vlastnostech některých m-tic a jejich representací, na př. m-tic přesně v E_r, m-tic přesně v E_r a na $(r - 1)$-kouli, m-tic, jež jsou částí množiny vrcholů nějakého kvádru a j.

Čl. koresp. *Štefan Schwarz:* **Theorie charakterů komutativních pologrup.**

Nechť $S = \{a, b, c, \ldots\}$ je konečná komutativní pologrupa. Komplexní funkce χ, která splňuje vztah $\chi(ab) = \chi(a) \,.\, \chi(b)$ pro každé $a, b \in S$, se nazývá charakterem pologrupy. Množina charakterů S^* je pologrupa a je množinovým součtem disjunktních grup $S^* = \Sigma G_\nu^*$, kde G_ν^* jsou grupy isomorfní k jistým t. zv. maximálním grupám z S. Polosvazy idempotentů z S a S^* jsou duálně isomorfní. Násobení prvků z grup G_ν^* a G_μ^* se dá proto převést v podstatě na násobení v S; tím je pomocí struktury S určena struktura S^*. Autor udává konstruktivní methodu k určení S^*. Mezi jistými podmnožinami z S a S^* existují Galoisovy konexe, které umožňují vyslovit obecné věty o pologrupě charakterů podideálů z S.

Výsledky možno zobecnit na jisté typy nekonečných pologrup.

Akademik *Vladimír Kořínek:* **Otázka jednoznačnosti ve větě Jordan-Hölderově a Schreierově.**

Máme-li svaz s konečnými řetězci, v němž platí věta Jordan-Hölderova, pak ve dvou nasycených řetězcích mezi dvěma danými prvky svazu $a > b$ lze kvocienty obou řetězců jen jedním způsobem navzájem přiřadit, požadujeme-li, aby sobě odpovídající kvocienty byly zdola jednoduše podobné. Tento zajímavý fakt našel *Vladimír Kořínek*. Vlastní důvod, proč tomu tak jest, našel *Ludvík Jánoš*. *Václav Vilhelm* ukázal, že stejná věc platí i ve svazech splňujících dolní podmínku prvokvocientů a minimální podmínku (podmínku konečnosti klesajících řetězců). Jde nyní o to nalézt co nejjednodušší důkazy pro tyto skutečnosti. To lze učinit, využijeme-li dobře všech poznatků, které získal *Ludvík Jánoš*.

Akademik *Vojtěch Jarník:* **Lineární diofantické aproximace.**

Budiž Θ irracionální reálné číslo, $\frac{p_n}{q_n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ sblížené zlomky jeho pravidelného řetězce. Číslo $\left|\Theta - \frac{p_n}{q_n}\right|$ je téhož řádu jako $\frac{1}{q_n q_{n+1}}$. Budiž $\alpha > 0$; budiž M_α množina těch Θ, pro něž platí $q_{n+1} > q_n^{1+\alpha}$ pro nekonečně mnoho n; budiž N_α množina těch Θ, pro něž je $q_{n+1} > q_n^{1+\alpha}$ pro všechna n až na konečný počet. Hausdorffova dimense množiny M_α je, jak známo, $\dim M_\alpha = \frac{2}{2 + \alpha}$. Lze dokázat, že $\dim N_\alpha = \frac{1}{2} \dim M_\alpha = \frac{1}{2 + \alpha}$.

Akademik *Josef Novák:* **Obecná konstrukce uspořádaného kontinua.**

Pojem kartézského součinu se dá zobecnit a použít k obecné konstrukci (k) uspořádaného kontinua pomocí intervalů reálných čísel $\langle 0, 1\rangle$. Konstrukce je obecná v tom smyslu, že uspořádané kontinuum existuje tehdy a jen tehdy, dá-li se sestrojit konstrukcí (k). Pomocí speciálních typů konstrukce (k) dají se popsat různé vlastnosti kontinuí, jako je separabilita, charaktery bodů, homogenita a j. Obecná konstrukce uspořádaného kontinua má svou zajímavost ve vztahu k Suslinovu problému, jenž se týká charakterisace reálných čísel.

Čl. koresp. *Miroslav Katětov:* **O některých otázkách theorie dimense.**

Obsahem sdělení bylo rozšíření některých vět theorie dimense separabilních prostorů na libovolné metrické (někdy též libovolné normální) prostory. Byly uvedeny m. j. věty o dimensi spojitého obrazu normálního prostoru v Banachově prostoru a věta o libovolně jemném pokrytí metrického prostoru P uzavřenými množinami, jejichž průniky mají předepsanou dimensi (neprázdný průnik $m + 1$ množin má dimensi $\leqq \dim P - m$).

Dr *Vlastimil Pták:* **O úplných topologických lineárních prostorech.**

Sdělení se týkalo rozšíření Banachovy věty o spojitosti inversního operátoru na obecné konvexní topologické lineární prostory. S tím souvisí řada otázek týkajících se charakterisace prvků úplného obalu daného konvexního topologického lineárního prostoru, zejména definice úplnosti podané *J. V. Neumannem.*

Prof. *Gheorghe Vrănceanu:* **O částečně projektivních prostorech s afinní konexí.**

Autor ve svém sdělení dokázal, že afinní prostor A_n je eukleidovský projektivní, jestliže v každé jeho nadrovině leží maximální počet ∞^{2n-4} autoparalelních křivek a že afinní prostor A_n je Kaganovým prostorem, jestliže v každé nadrovině jistého systému nadrovin leží týž počet autoparalelních křivek. Jestliže prostor A_n je částečně projektivní, ale není prostorem Kaganovým, pak v něm existují nadroviny, v nichž neleží maximální počet autoparalelních křivek, a ukazuje se pak, že určení konexe v tomto případě závisí na jistých diferenciálních rovnicích. Poměrná složitost těchto rovnic snad vysvětluje, že dosud nejsou známy jiné částečně projektivní prostory než prostory Kaganovy.

Dr *Jaroslav Kurzweil:* **O aproximacích v Banachových prostorech.**

V r. 1935 zavedli *Mazur* a *Orlicz* polynomické operace definované na Banachově prostoru. Analytické operace definované na komplexním Banachově prostoru byly studovány mnohými autory a v nedávné práci *Alexiewicz* a *Orlicz* se zabývali analytickými operacemi v reálných Banachových prostorech.

Lze snadno ukázat, že spojitou operaci definovanou na reálném Banachově prostoru nelze obecně aproximovat stejnoměrně operací polynomickou a tak vzniká otázka, zda je možné každou spojitou operaci definovanou na reálném Banachově prostoru aproximovat stejnoměrně operací analytickou. Touto otázkou se zabýval autor a nalezl jednak postačující podmínku pro Banachův prostor, aby bylo možné každou spojitou operaci definovanou na tomto prostoru aproximovat stejnoměrně operací analytickou, jednak uvedl řadu Banachových prostorů, ve kterých taková aproximace obecně není možná.

Dr *Jan Mařík:* **Dvojrozměrné nevlastní integrály.**

To, co je dosud známo o integrálu ve dvou a více dimensích, nepřekračuje v podstatě rámec Lebesgueovy theorie. Vyšetřujeme-li obecnější integrály, narážíme již při poměrně jednoduchých otázkách na obtíže (na př. při otázce integrovatelnosti součinu $f(x, y) \cdot P(x, y)$, kde f je integrovatelná a P je polynom, resp. součinu $f(x) \cdot g(y)$, kde f a g mají jednorozměrný integrál; nebo při otázce o rozšíření věty o integraci per partes na případ dvou rozměrů; nebo při otázce integrovatelnosti funkce $g(x, y) = \int_a^x f(x, y)\, dx$, kde f je integrovatelná). V přednášce se zabýval autor částečným řešením některých podobných problémů.

Čl. koresp. *Otakar Borůvka:* **Theorie dispersí a jejich aplikace.**

Referát obsahoval některé výsledky o dispersích z autorova pojednání „О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-ого порядка" (Чех. мат. ж., т. 3 (78)). Autor dále uvedl aplikace theorie dispersí, které se týkají řešení okrajových problémů 2. řádu, rozšíření Floquetovy metody k určení fundamentálního systému integrálů na diferenciální rovnice tvaru $y'' = Q(x, y)$, a poukázal na pokrok v theorii diferenciálních lineárních rovnic 4. řádu v souvislosti se zmíněnou theorií.

Dr *Ivo Babuška:* **Řešení napjatosti přehrady na pružném podloží.**

Ve svém referátu se zmínil autor nejprve o řešení rovinné napjatosti v tělese trojúhelníkového tvaru. Tento problém je ekvivalentní s úlohou biharmonické funkce u splňující jisté podmínky na hranici. Úloha je řešena numericky aproximativně rozvojem funkce u podle orthogonálních harmonických funkcí. Při tom se využívá některých vlastností komplexního vyjádření biharmonické funkce (*Muschelišvili*). Autor dokázal konvergenci procesu. Přímými metodami variačního počtu určil napětí na základové spáře přehradního profilu a poloroviny (profil a polorovina mají různé elastické vlastnosti). Nakonec uvedl numericky propočítaný konkretní případ.

Prof. dr *Vladimír Knichal:* **Odhad chyby při Graeffe-Fiferově methodě.**

Graeffe-Fiferova methoda řešení algebraických rovnic tvaru

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{1}$$

spočívá v tom, že se vypočtou vhodné mocniny $\beta_i = \alpha_i^r$, $\gamma_i = \alpha_i^s$ (r, s celé kladné) kořenů α_i rovnice (1) s dostatečnou přesností, a je-li r, s nesoudělné, určí se α_i vztahem $\alpha_i = \beta_i^k\gamma_i^l$, kde k, l jsou celá čísla vyhovující rovnici $kr + ls = 1$. Ve svém referátu promluvil autor o potížích, které při aplikaci této methody vznikají, naznačil, jak lze tyto potíže odstranit a uvedl odhad počtu účelných kroků k dosažení žádané přesnosti výpočtu.

Doc. dr *Antonín Svoboda:* **Kod československého samočinného počitače.**

Kod je předpis, podle kterého jsou v samočinných počitačích zobrazena čísla a instrukce. Ve svém referátu autor vyzvedl některé výhodné vlastnosti kodu československého samočinného počitače (SAPO). Čísla jsou kodována semilogaritmicky (je užito pohyblivé řádové čárky) a instrukce jsou pětiadresové. Pohyblivá řádová čárka umožňuje výpočet na neproměnný počet platných číslic s nejmenší možnou ztrátou relativní přesnosti výsledku. Současně zjednodušuje přípravu instrukční sítě. Pětiadresová instrukce zmenšuje podstatně počet instrukcí, potřebných k řešení daného problému. Tím je odstraněna nutnost pomocných strojů na kodování a je dosaženo úspory místa v magnetické paměti stroje. Současně se zkrátí úhrnná doba řešení celého problému.

Doc. dr *Antonín Svoboda:* **Princip československého samočinného počitače.**

Československý samočinný počitač SAPO sestává z bubnové magnetické paměti, ze tří nezávislých reléových operačních jednotek, z řadiče (ovládacích obvodů) a z doplňkových zařízení. V paměti stroje jsou vedle číselných informací uloženy všechny informace o postupu výpočtu. Předpis postupu výpočtu nazýváme instrukční síť. Je to vysoce zhuštěný operační plán, podle kterého se instrukce vybírají a vytvářejí. Operační jednotka provádí podle jednotlivých instrukcí jednak operace s čísly, jednak operace na instrukcích. Tím může vytvářet nové instrukce nebo staré plánovitě měnit. Instrukční síť sestává proto z poměrně malého počtu instrukcí, takže magnetická paměť pojme instrukční sítě i velmi složitých problémů.

SAPO je první samočinný počitač, který má tři nezávislé operační jednotky a může trojitým provedením téhož výpočtu chybu ve výpočtu zaviněnou nahodilou poruchou stroje nejen odhalit, ale i opravit.

Josef Novák, Praha
(ve spolupráci s autory).

STUDIJNÍ ZÁJEZD PROF. VL. KNICHALA DO MAĎARSKA

Ve dnech 21. května až 2. června 1954 navštívil prof. dr VLADIMÍR KNICHAL, ředitel Matematického ústavu Československé akademie věd, v rámci vědecko-technické spolupráce, Maďarsko. Byl vyslán Československou akademií věd, aby studoval organisaci práce v maďarském ústavě aplikované matematiky, zejména spolupráci s jinými ústavy a technickou praxí, dále, aby studoval problematiku řešenou maďarským ústavem a ve srovnání s problematikou našeho ústavu zkoumal možnosti spolupráce a konečně, aby získal informace o způsobu a výši vysokoškolské přípravy vědeckého dorostu v matematice a dalším školení aspirantů, zejména pro úkoly ústavu a pro úkoly technické praxe.

Za svého pobytu v Maďarsku navštívil prof. Knichal oddělení numerických a grafických metod početních, oddělení diferenciálních rovnic a oddělení elektrotechnické v ústavě aplikované matematiky, dále matematické ústavy university v Budapešti a v Szegedu, matematické ústavy obou technických universit v Budapešti a přednášel v Bolyaiově matematické společnosti na thema: Berechnung der Verzerrung bei frequenzmodulierten Wellen.

Na schůzkách s předními vědeckými pracovníky získal velmi cenné informace o řešení konkretních problémů technické praxe, o řešení theoretických problémů s nimi souvisících a informace o otázkách doposud neřešených. Mezi oběma stranami byly vyměněny cenné zkušenosti důležité jak pro zlepšení organisace práce, tak pro řešení konkretních problémů. Na obou stranách bylo ovšem konstatováno, že jedna taková poměrně krátká návštěva nestačí k vážnější spolupráci. Za účelem intensivní spolupráce bylo by nutné umožnit častější a pravidelnější osobní styk mezi vědeckými pracovníky obou ústavů. Přesto však, že ráz této první návštěvy byl spíše informativní, znamenala zejména pro oddělení technické matematiky v Matematickém ústavě Československé akademie věd velký přínos.

Podrobnější informace o studijním pobytu v Maďarsku podal prof. Knichal v referátu předneseném dne 14. června 1954 ve schůzi matematické obce pražské.

Vl. Knichal, Praha.

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SLOVENSKEJ AKADÉMIE VIED

Tohto roku vychádza štvrtý ročník Matematicko-fyzikálneho časopisu vydávaného Slovenskou akadémiou vied v Bratislave.

V prvom a druhom čísle tretieho ročníka sú nasledovné články z matematiky a fyziky: *Schwarz Št.*, Maximálne ideály a štruktúra pologrúp. — *Vyčichlo F.*, O některých projektivních invariantech plochy. — *Veselý V.* a *Petržílka V.*, Ladička s nulovým teplotním koeficientem frekvence. — Tretie a štvrté číslo tretieho ročníka má články: *Ivan J.*, O direktnom súčine pologrúp. — *Budějický J.*, Vlny na drátě s dielektrickým obalem.

Prvé číslo štvrtého ročníka má články: *Ilkovič D.*, Jednoduché kinematické zdôvodnenie Maxwellovho posuvného prúdu. — *Úlehla I.*, K theorii rovnic pro částice s jediným spinem $\frac{3}{2}$ a s jedinou vlastní hmotou. — *Greguš M.*, Aplikácia disperzií na okrajový problém druhého rádu. — *Medek V.*, O obryse vypuklých ploch.

Ladislav Mišík, Bratislava.

Redakce: Matematický ústav Československé akademie věd Praha II, Žitná 25, tel. 241193. — Administrace: Nakladatelství Československé akademie věd, Praha II, Vodičkova 40, telefon 2462-41. — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 48,—, cena jednotlivého sešitu Kčs 12,—. Novinové výplatné povoleno Okrskovým poštovním úřadem Praha 022: j. zn. 309-38-Ře-52. — Dohlédací poštovní úřad Praha 022. — Tisknou a expedují Pražské tiskárny n. p., provozovna 05 (Prometheus), Praha VIII, Tř. Rudé armády 171. — Vyšlo 30. XII. 1954.
D 07979

PŘISPĚVATELŮM ČASOPISU PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A MEZINÁRODNÍHO ČASOPISU ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Pro informaci o *vnější úpravě rukopisů* určených pro matematické časopisy (český i mezinárodní) uvádíme výtah z normy ČSN 88 0220, vydané úřadem pro normalisaci v Praze, a prosíme autory příspěvků, aby se napříště v rukopisech zasílaných redakci těmito směrnicemi řídili.

Účelem normy je vytvořit předpoklady pro plynulou spolupráci s tiskárnami, zpřesnit, urychlit a zhospodárnit snížením nákladů polygrafickou výrobu.

Rukopisy mají být psány zpravidla na psacím stroji po jedné straně papíru formátu A4 (210 × 297 mm) na volných listech, ne hustě, aby bylo možno mezi řádky čitelně vpisovat potřebné opravy nebo změny textu. Listy se pořadově číslují v horním pravém rohu.

Odstavce v textu mají být výrazně odlišeny vynecháním části levého okraje řádku. *Tabulky* se doporučuje psát na samostatné listy. *Obrazy* se pořadově číslují a po levé straně rukopisu se označí místo, kam má být obraz zařazen.

V textu rukopisu se připouští na každé stránce nejvýše sedm oprav kromě pěti opravených překlepů.

V rukopisech se vzorcovou sazbou se všecky matematické znaky, indexy, exponenty a pod. píší zřetelně obyčejným perem.

Označení a způsoby sazby:

a) *Jednotlivá slova* nebo *věty textu*, které mají být vysázeny odlišnými druhy písma, se označují takto:

Tučné písmo — podtržením dvěma čarami
polotučné písmo — podtržením jednou čarou
polotučná kursiva — podtržením čarou a vlnovkou
kursiva — podtržením vlnovkou
proloženě (prostrkaně) — přerušovanou čarou
KAPITÁLKY — čerchovaně

b) *Druhy sazby matematických znaků* se označují takto:

Obyčejná kursiva, na př. A, n, x — podtrhne se červeně;
polotučná kursiva (ležaté typy), na př. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{x}$ — označí se červeným kroužkem kolem písmene,
obyčejná antikva (stojaté typy), na př. lim, sinh, sup — podtrhne se modře,
polotučná antikva, na př. **A**, **b**, **x** — označí se modrým kroužkem,
polotučný grotesk Gill kursiva, na př. $\boldsymbol{\mathsf{A}}$, $\boldsymbol{\mathsf{U}}$, vektor $\boldsymbol{\mathsf{a}}$ — podtrhne se zeleně,
polotučný grotesk Gill stojatý, na př. $\mathbf{\mathsf{A}}$, $\mathbf{\mathsf{b}}$, $\mathbf{\mathsf{x}}$ — označí se zeleným kroužkem,
obyčejný grotesk Gill stojatý, na př. D P, a — označí se zeleným čtverečkem,
řecká písmena stojatá (na př. π — Ludolfovo číslo) — zaškrtnou se modře,
řecká písmena kursivní (ležatá), na př. α, β, χ — zaškrtnou se červeně,
kurentní písmena, na př. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{a}$ — zaškrtnou se zeleně.

c) *Ve formulích psaných na samostatných řádcích* se obvyklý způsob sazby znaků, které se tisknou obyčejnou kursivou, zvlášť nevyznačuje; v těchto formulích se však vyznačí znaky, které mají být vytištěny obyčejnou antikvou, na př. lim, sin, sup a pod., pak řecká písmena, kurentní písmena a j., a to způsobem, který jsme uvedli sub b). Obvyklý způsob sazby číslic, které se tisknou stojatě (antikvou), se zvlášť nevyznačuje nikde.

d) V matematických časopisech zachováváme dále tyto *zvyklosti:*

Jména citovaných autorů se tisknou kapitálkami, a to pouze při prvé citaci (třeba i v jiném pádu než v prvním); na př. CHINČIN.

Označení zaváděných definic, dokazovaných vět, lemat a také čísla paragrafů, na př. **Definice 1, Věta 1,** a pod. se tisknou polotučným groteskem Gillem stojatým.

Znění definic, vět, lemat, význačné a důležité pasáže a slova v textu, někdy i názvy děl nebo článků uváděných v textu se tisknou *kursivou.*

Nadpisy: P o z n á m k a, P ř í k l a d, D ů k a z se tisknou prostrkaně.

Upozornění předplatitelům

Prosíme předplatitele, kteří budou odebírat Časopis pro pěstování matematiky i v roce 1955, aby neposílali novou objednávku.

Předplatitele, kteří nehodlají časopis odebírat, prosíme, aby provedli písemnou odhlášku na adresu: Nakladatelství Československé akademie věd, Vodičkova 40, Praha II.

Novinové výplatné povoleno okrskovým pošt. úřadem Praha 022: j. zn. 309-38-Ře-52.
Dohlédací poštovní úřad Praha 022.