RŮZNÉ

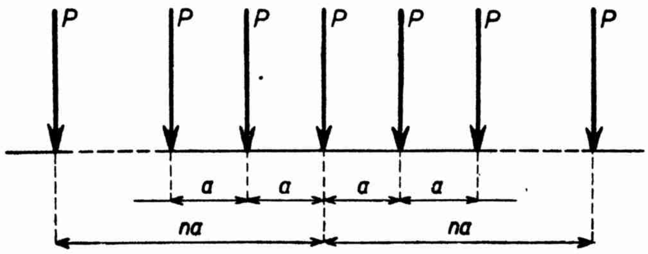
ŘEŠENÍ NAPJATOSTI POLOROVINY ZATÍŽENÉ PERIODICKY OSAMĚLÝMI BŘEMENY

IVO BABUŠKA, Praha.

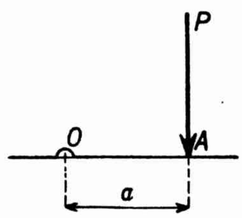
DT: 539.31

Z praxe jsme dostali jistý problém, který vedl na úlohu určiti napjatost v polorovině, periodicky zatížené osamělými břemeny. V této poznámce podáváme explicitní řešení tohoto problému.

Formulujme naši úlohu. *Jest určiti limitní stav* ($n \to \infty$) *napjatosti* (*pokud existuje*) *v homogenní isotropní polorovině zatížené osamělými břemeny* P (podle obrázku 1) *ve stejných vzdálenostech.*



Obr. 1.



Obr. 2.

Tvrdíme, že složky tensoru napětí X_x, X_y, Y_y jsou dány vzorci

$$X_x + Y_y = 4 \operatorname{Re} [\varphi'] , \tag{1}$$

$$Y_y - X_x + 2\mathrm{i}X_y = 2[\bar{z}\varphi'' + \psi'] , \tag{2}$$

kde φ a ψ jsou jisté holomorfní funkce určené výrazy

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot P \lg \sin \frac{\pi}{a} z , \tag{3}$$

$$\psi = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot P \left[-\frac{\pi}{a} z \operatorname{ctg} \frac{\pi}{a} z + \lg \sin \frac{\pi}{a} z \right] . \tag{4}$$

Při tom P bereme kladné, jestliže působí proti kladnému směru osy y (tedy dolů).

Důkaz. Problém napjatosti homogenního isotropního tělesa jest ekvivalentní s biharmonickým problémem aneb s problémem určení jistých holomorfních funkcí φ a ψ (říkejme jim funkce napjatosti), při čemž složky tensoru napětí jsou určeny rovnicemi (1), (2) [srv. [1]].

Lze ukázat, že funkce φ a ψ, odpovídající stejnému napětí, nejsou určeny jednoznačně; ale φ je určena až na výraz $iCz + \alpha$, kde C je reálná a α komplexní konstanta a funkce ψ je určena až na komplexní konstantu β.

Pro jediné osamělé břemeno v bodě A (viz obr. 2) platí (viz [1], str. 354).

$$\varphi_a = -\frac{1}{2\pi i} P \lg (z - a) , \tag{5}$$

$$\psi_a = -\frac{1}{2\pi i} . P \lg (z - a) - \frac{1}{2\pi i} . P \frac{a}{a - z} . \tag{6}$$

Při tom P je kladné, jestliže působí směrem dolů.

Tedy pro $a = 0$ platí

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2\pi i} P \lg z ,$$

$$\psi_0 = -\frac{1}{2\pi i} . P \lg z .$$

Pro $a \neq 0$ můžeme vzorce (5) a (6) ještě upravit podle toho, co jsme řekli o určenosti funkcí napjatosti.

Proto

$$\varphi_a = -\frac{1}{2\pi i} . P \lg \left(1 - \frac{z}{a}\right) ,$$

$$\psi_a = - z\varphi_a' + \varphi_a .$$

Poněvadž problém jest lineární, dostaneme funkce napjatosti pro břemena podle obr. 1 ve tvaru

$$\varphi_n = -\frac{1}{2\pi i} . P \left[\lg z + \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{k=n} \lg \left(1 - \frac{z}{ka}\right)\right] = -\frac{1}{2\pi i} . P \left[\lg z + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{k=n} \lg \left(1 - \frac{z^2}{k^2a^2}\right)\right] = -\frac{1}{2\pi i} . P \lg \left[z \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 - \frac{z^2}{k^2a^2}\right)\right] \tag{7}$$

a

$$\psi_n = - z\varphi_n' + \varphi_n . \tag{8}$$

Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$, potom bude tato limita řešením našeho problému.

Existence limity pro $n \to \infty$ funkcí v (7) jest však ekvivalentní s existencí jistého nekonečného součinu. Jest známo (viz na př. [2], str. 299), že

$$z \frac{\pi}{a} \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{z}{k^2a^2}\right] = \sin \frac{\pi}{a} z .$$

Proto

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi i} \cdot P \lg \sin \frac{\pi}{a} z + \text{konst}.$$

Jestliže $\varphi_n \to \varphi$, potom i $\varphi'_n \to \varphi'$, a tedy

$$\varphi' = \lim \varphi'_n = -\frac{1}{2\pi i} \cdot P \frac{\pi}{a} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{a} z .$$

Tedy jest

$$\psi = -\frac{1}{2\pi i}\left[-\frac{\pi}{a} z \operatorname{ctg} \frac{\pi}{a} z + \lg \sin \frac{\pi}{a} z\right].$$

LITERATURA

[1] *Н. И. Мусхелищвили:* Некоторые основные задачи математической теории упругости

[2] *S. Saks, A. Zygmund:* Funkcje analiticzne (1948).

UŽITÍ THEORIE POLYEDRŮ V EKONOMII

(Referát z přednášky doc. dr *Fr. Nožičky,* proslovené v matematické obci pražské dne 1. března 1954.)

DT: 513.34
330.6

Theorie n-dimensionálních polyedrů nabývá v současné době velkého významu nejen jako samostatná disciplina geometrie, ale též jako důležitá pomůcka při řešení řady ekonomických problémů.

Při své přednášce vycházel přednášející z konkretního ekonomického problému, který mu byl předložen k řešení v této formulaci: *Máme určitý počet dolů a zcela určitou průměrnou roční produkci uhlí a mimo to určitý počet odbytišť, každé s předem danou roční spotřebou, a to s tím předpokladem, že celková produkce uhlí z uvažovaných dolů rovná se celkové spotřebě uhlí uvažovaných odbytišť. Dále je dána vzdálenost* (v km) *každého dolu od každého odbytiště* (*dopravní železniční síť*). *Úkolem jest najít nejvýhodnější distribuci produkovaného uhlí po dané železniční síti, tedy nejvýhodnější v tom smyslu, aby celková doprava uhlí do daných odbytišť byla co nejlevnější.*

Problém z praxe shora uvedený má jednoduchou matematickou formulaci: Nechť m značí počet dolů, $a_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ pak produkci příslušného dolu. Nechť n je počet odbytišť a $b_j (j = 1, \ldots, n)$ nechť představují spotřeby jednotlivých odbytišť. Dále je dáno mn kladných čísel k_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots,$ představujících dopravní vzdálenost (v km) příslušného dolu od příslušného odbytiště. Označíme-li $x_{ij} (i = 1, \ldots, m;\ \ j = 1, \ldots, n)$ neznámé množství uhlí, které dodá i-tý důl j-tému odbytišti, potom ryzí matematická formulace jest tato:

Je dáno m kladných čísel $a_i > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ a n kladných čísel $b_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, při čemž platí vztah $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Dále je dáno mn kladných čísel k_{ij} $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$. Úkolem jest najít mn čísel x_{ij} $(i = 1, \ldots, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ tak, aby platilo

a) $x_{ij} \geqq 0$ pro $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$,

b) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ pro $i = 1, \ldots, m$,

c) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ pro $j = 1, \ldots, n$

a dále najít taková x_{ij} s vlastnostmi a), b), c), pro která

d) lineární forma $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_{ij}$ nabývá infima.

Čísla x_{ij} lze interpretovat jako kartézské souřadnice bodů v eukleidovském prostoru E_{mn} dimense mn. Matematický rozbor ukazuje, že množinu bodů v E_{mn} s vlastnostmi a), b), c) lze interpretovat jako $(m - 1)(n - 1)$ dimensionální konvexní polyedr, ležící v $(m - 1)(n - 1)$ dimensionální nadrovině $E_{(m-1)(n-1)} \subset E_{mn}$. Uvažovaná lineární forma nabývá vždy (aspoň v jednom bodě) svého infima na množině bodů representované příslušným polyedrem. Theorie ukazuje dále, že existuje aspoň jeden vrchol polyedru, v němž toto infimum nastává. Poněvadž je konečný počet vrcholů polyedru, zdá se, že by stačilo tyto vrcholy určit a vybrat ten, pro nějž uvažovaná forma nabývá infima. Tím by po theoretické stránce byl problém uzavřen. Tato cesta však není pro praxi vůbec schůdná, neboť vrcholů je obecně příliš mnoho (faktoriálový růst). Je třeba najít algoritmus výpočtu pro praxi. Bez vhodného algoritmu by byla předchozí theorie pro praxi bezcenná.

Význam algoritmu, o němž přednášející mluvil a který předvedl na příkladě, spočívá v tom, že redukuje veškerý výpočet na elementární operace sčítání a násobení, při čemž maticové schema veličin x_{ij} činí výpočet přehledným. Geometrická theorie, na níž algoritmus spočívá, je tato: Vyjde se od nějakého vrcholu shora uvažovaného polyedru, o němž můžeme předem říci, že dává — vzhledem k ostatním možnostem — poměrně nízkou hodnotu pro uvažovanou formu. Potom se najdou k tomuto vrcholu vrcholy sousední, jichž je nejvýše $(m - 1)(n - 1)$ a z nich se vybere ten, který dává uvažované lineární formě hodnotu nižší než vrchol, z něhož jsme vyšli (pokud výchozí vrchol nevedl sám k infimu). Tak se postupuje dále, až po poměrně malém počtu kroků dospějeme k vrcholu s požadovanou vlastností. Řečeno heuristicky, vyjdeme od určitého vrcholu a postupujeme po hranách polyedru až do onoho vrcholu, který vede k infimu uvažované formy.

Předchozí theorie i s aplikacemi bude později publikována jako samostatný článek v Časopisu pro pěstování matematiky.

František Nožička, Praha.