HARMONICKÁ PŘÍBUZNOST
Část II.

ZDENĚK PÍRKO, Praha.

(Došlo dne 19. prosince 1953.) DT: 513.75

V článku jsou vyloženy některé podrobnější vlastnosti příbuznosti, která byla definována v stejně nazvaném pojednání na str. 201 až 215 tohoto časopisu, ročník *76* (1951).

3.0. Podržme názvy *samodružný bod, samodružná přímka* (a obecněji *samodružná křivka*), používané v theorii birracionálních bodových transformací, i pro naše úvahy, a sice v tomto smyslu:

V rovině Σ buďtež $[\xi]$ a $('x)$ přímka a bod, s ní incidentní, které si odpovídají v příbuznosti $\boldsymbol{H}$; v rovině $'\Sigma$ buďtež (x) a $['\xi]$ bod a přímka, s ním incidentní, které si odpovídají v příbuznosti $\boldsymbol{H}^{-1}$. Nechť roviny Σ, $'\Sigma$ splynou; existují-li body $(x) \equiv ('x)$ resp. existují-li přímky $[\xi] \equiv ['\xi]$, s nimi incidentní, nazveme je samodružné body resp. samodružné přímky naší příbuznosti. Nastane-li tato okolnost pro křivku (bod za bodem pro křivku jakožto geometrické místo bodů; tečna za tečnou pro křivku jakožto geometrické místo tečen), nazveme ji analogicky samodružnou křivkou naší příbuznosti.

3.1. Ukážeme, že takové útvary existují, a určíme je.

Nutné a postačující podmínky, aby *bod* (x) splynul s odpovídajícím $('x)$ („odpovídajícím" ve výše uvedeném smyslu), jsou patrně

$$x_1 : x_2 : x_3 = 'x_1 : 'x_2 : 'x_3 ,$$

to jest, vzhledem k rovnicím (2.3,1),

$$x_1 : x_2 : x_3 = \xi_2\xi_3 : \xi_1\xi_3 : -2\xi_1\xi_2 . \tag{3.1,1}$$

Nutné a postačující podmínky, aby *přímka* $['\xi]$ splynula s odpovídající $[\xi]$ („odpovídající" ve výše uvedeném smyslu), jsou obdobně

$$'\xi_1 : '\xi_2 : '\xi_3 = \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 ,$$

to jest, vzhledem k rovnicím (2.3,2) (a po vynechání akcentů),

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = x_2x_3 : x_1x_3 : -2x_1x_2 . \tag{3.1,2}$$

To však jsou rovnice, které obdržíme obrácením rovnic (1); výsledek samozřejmý.

Ptejme se nyní, zda existuje bodový útvar $f = 0$, který je samodružný („samodružný" ve výše uvedeném smyslu)! Je-li kladná odpověď na tuto otázku, pak tento útvar bude ovšem samodružný i tehdy, budeme-li jej uvažovat jako obálku tečen.

Tečna křivky $f = 0$ má rovnici

$$\sum_i f_i x_i = 0 \quad \left(f_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}\right),$$

o jejích souřadnicích platí

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = f_1 : f_2 : f_3 .$$

Po dosazení do rovnic (1) máme tedy tyto nutné a postačující podmínky pro samodružnost *bodového útvaru* $f = 0$:

$$x_1 : x_2 : x_3 = f_2 f_3 : f_1 f_3 : -2 f_1 f_2 . \qquad (3.1,3)$$

Především můžeme předpokládat, že $f_i \not\equiv 0$. Neboť předpoklad $f_1 \equiv 0$, $f_2 \not\equiv 0$, $f_3 \not\equiv 0$ (a dva další obdobné předpoklady) dávají výsledek triviální:

Vrcholy základního trojstranu jsou samodružné body harmonické příbuznosti. [3.1,1]

3.2. Pak ale můžeme psát podmínky (3.1,3) ve tvaru

$$f_1 = \frac{\varrho}{x_1}, \quad f_2 = \frac{\varrho}{x_2}, \quad f_3 = \frac{-2\varrho}{x_3} \quad (\varrho \not\equiv 0) \qquad (3.2,1)$$

a odtud

$$\left.\begin{aligned} & f = \varrho \log |x_1| + \varphi_{23} \\ \text{resp.} \quad & f = \varrho \log |x_2| + \varphi_{13} \\ \text{resp.} \quad & f = -2\varrho \log |x_3| + \varphi_{12} , \end{aligned}\right\} \qquad (3.2,2)$$

kde φ_{ik} jsou (zatím ještě neurčené) funkce proměnných x_i, x_k.

Jejich tvar určíme takto: Z rovnic (2) odvodíme

$$\left.\begin{aligned} f_2 &= \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_2}, & f_3 &= \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_3} \\ f_1 &= \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_1} & f_3 &= \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_3} \\ f_1 &= \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_1}, & f_2 &= \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_2} \end{aligned}\right\},$$

čili, vzhledem k rovnicím (1),

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_1} = \frac{\varrho}{x_1} \\ f_2 &= \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_2} = \frac{\varrho}{x_2} \\ f_3 &= \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_3} = \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_3} = \frac{-2\varrho}{x_3} . \end{aligned}\right\} \qquad (3.2,3)$$

Ale první řada těchto rovnic ukazuje, že

$$\varphi_{12} = A_1 + A_2, \qquad \varphi_{13} = B_1 + B_3 ,$$

kde $A_1, \ldots, B_3$ jsou už funkce jediné proměnné x_i, a to té, jejíž index se shoduje s indexem funkčního symbolu; přitom je

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\mathrm{d}B_1}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\varrho}{x_1} ,$$

a tedy ($c_1, c_2, \ldots$ arbitrární konstanty)

$$A_1 = \varrho \log |c_1 x_1|, \qquad B_1 = \varrho \log |c_2 x_1| .$$

Obdobně plyne z druhé řady rovnic (3):

$$\varphi_{23} = C_2 + C_3, \qquad \varphi_{12} = D_1 + D_2 ,$$
$$C_2 = \varrho \log |c_3 x_2|, \qquad D_2 = \varrho \log |c_4 x_2| ;$$

z třetí řady rovnic (3):

$$\varphi_{13} = E_1 + E_3, \qquad \varphi_{23} = F_2 + F_3 ,$$
$$E_3 = -2\varrho \log |c_5 x_3|, \qquad F_3 = -2\varrho \log |c_6 x_3| .$$

Srovnáním všech těchto vyjádření poznáváme, že

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{12} &= A_1 + A_2 = D_1 + D_2 \\ \varphi_{13} &= B_1 + B_3 = E_1 + E_3 \\ \varphi_{23} &= C_2 + C_3 = F_2 + F_3 \end{aligned}\right\}$$

čili

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= D_1, & B_1 &= E_1, & C_2 &= F_2 \\ A_2 &= D_2, & B_3 &= E_3, & C_3 &= F_3 . \end{aligned}\right\}$$

Mají tedy funkce φ_{ik} tyto tvary (α, β, γ arbitrární konstanty):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{12} &= A_1 + D_2 = \varrho \log |\gamma x_1 x_2| \\ \varphi_{13} &= B_1 + E_3 = \varrho \log \left| \beta \frac{x_1}{x_3^2} \right| \\ \varphi_{23} &= C_2 + F_3 = \varrho \log \left| \alpha \frac{x_2}{x_3^2} \right| . \end{aligned}\right\}$$

Po dosazení do rovnic (2) nalezneme (k arbitrární konstanta):

$$f = \varrho \log \left| \frac{1}{k} \frac{x_1 x_2}{x_3^2} \right| . \tag{3.2,4}$$

To znamená: Nutným a postačujícím podmínkám (3.1,3) bude vyhověno, jestliže f_1, f_2, f_3 budou derivace funkce (4); jinak: v příbuznosti $\boldsymbol{H}$ (a ovšem i $\boldsymbol{H}^{-1}$) bude si křivka

$$f = 0 \quad \text{čili} \quad x_1 x_2 - k x_3^2 = 0$$

odpovídat („odpovídat“ ve smyslu uvedeném výše) bod za bodem (tečna za tečnou).

Nalezli jsme tedy úhrnem:

Harmonická příbuznost má tyto a jen tyto samodružné útvary: Vrchol P základního trojstranu a svazek kuželoseček, které se dotýkají obou stran základního trojstranu vycházejících z bodu P v obou zbývajících jeho vrcholech. [3.2,1]

4.0. Pro studium dalších vlastností příbuznosti $\mathbf{H}(\mathbf{H}^{-1})$ je vhodné zavést ještě jinou její definici, vyplývající z okolnosti, že příbuznost je součinem dvou jednoduchých a známých příbuzností (odst. 4.1). Toto vyjádření příbuznosti umožňuje nejobecnější vyjádření analytické, z něhož vyplývají další jednoduché transformační rovnice při zvláštní volbě soustavy souřadnic. Konečně tento rozklad příbuznosti $\mathbf{H}(\mathbf{H}^{-1})$ umožňuje odpověď na některé otázky velmi obecné povahy (odst. 4.4, 4.5), zejména otázku o útvarech, které se v naší příbuznosti reprodukují jakožto celek.

4.1. Označme $\mathbf{P}$ *polární příbuznost*, jejíž řídicí kuželosečka je K; označme $\mathbf{I}$ *kvadratickou inversi*, jejíž řídicí kuželosečka je opět K a středem bod P (pól přímky p vzhledem ke kuželosečce K).

Viz opět obr. 2.1. V příbuznosti $\mathbf{P}$ odpovídá obecné tečně t základní křivky Γ její pól vzhledem ke kuželosečce K, to jest bod Z. V příbuznosti $\mathbf{I}$ odpovídá bodu Z průsečík přímky PZ s polárou bodu Z vzhledem ke kuželosečce K, to jest bod Y. Tím dokázána věta:

Příbuznost $\mathbf{H}$ je součinem příbuzností $\mathbf{P}$, $\mathbf{I}$ v tomto pořadí (to znamená: provedeme nejdříve polární transformaci $\mathbf{P}$, poté na výsledek provedeme inversní transformaci $\mathbf{I}$),

$$\mathbf{H} = \mathbf{P}\mathbf{I}\,. \qquad [4.1,1]$$

Vzhledem k involutorní povaze příbuzností $\mathbf{P}$, $\mathbf{I}$ plyne dále ze symbolické rovnice věty [1]:

$$\mathbf{P}\mathbf{H} = \mathbf{P}\mathbf{P}\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{P}\mathbf{H}\,, \qquad (4.1,1)$$

$$\mathbf{H}\mathbf{I} = \mathbf{P}\mathbf{I}\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{H}\mathbf{I}\,. \qquad (4.1,2)$$

Tím dokázáno dále:

Každou ze tří příbuzností $\mathbf{H}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{I}$ lze vyjádřit jako součin zbývajících dvou (ve vhodném pořadí). [4.1,2]

Ze symbolické rovnice věty [1] plyne postupně:

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{I}\mathbf{H}^{-1} \Rightarrow 1 = \mathbf{P}\mathbf{I}\mathbf{H}^{-1}\,,$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{P}\mathbf{I}\mathbf{H}^{-1} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{I}\mathbf{H}^{-1}\,,$$

$$\mathbf{I}\mathbf{P} = \mathbf{I}\mathbf{I}\mathbf{H}^{-1} \Rightarrow \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{I}\mathbf{P}\,.$$

Tím dokázána věta:

Příbuznost $\mathbf{H}^{-1}$ je součinem příbuzností $\mathbf{I}$, $\mathbf{P}$ v tomto pořadí (to znamená: nejprve $\mathbf{I}$, poté $\mathbf{P}$),

$$\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{I}\mathbf{P}\,. \qquad [4.1,3]$$

A obdobně k větě [2]:

Každou ze tří příbuzností $\mathbf{H}^{-1}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{I}$ *lze vyjádřit jako součin zbývajících dvou:*

$$\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{I}\mathbf{P}, \quad \mathbf{I} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{I}\mathbf{H}^{-1}. \qquad [4.1,4]$$

Okolnost, že harmonickou příbuznost $\mathbf{H}$ a „inversní" harmonickou příbuznost $\mathbf{H}^{-1}$ lze vyjádřit jako součin dvou příbuzností jednodušších, má také tento význam. Známe-li Plückerovy charakteristiky základní křivky Γ, tu lze snadno udati takové charakteristiky i pro křivku, která křivce Γ odpovídá v polární příbuznosti $\mathbf{P}$. Užijeme-li nyní na tuto křivku jakožto základní známých vět z theorie kvadratických Cremonových transformací, získáme tím vzájemné vztahy mezi Plückerovými charakteristikami křivky základní a křivky harmonické. Obdobně pro „inversní" harmonickou příbuznost. Úvahy tohoto druhu však opomíjíme.

4.2. Rozklad příbuznosti $\mathbf{H}(\mathbf{H}^{-1})$ ve dvě příbuznosti jednodušší podle vět odst. 4.1 umožňuje *nejobecnější analytické vyjádření* naší příbuznosti.

Buďtež

$$\sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k = 0 \text{ resp. } \sum_i b_ix_i = 0$$

rovnice kuželosečky K resp. přímky p. I jsou souřadnice $p_1 : p_2 : p_3$ pólu P, poláry p vzhledem ke kuželosečce K

$$p_1 : p_2 : p_3 = |b_1, a_{12}, a_{13}| : |a_{11}, b_1, a_{13}| : |a_{11}, a_{12}, b_1| .$$

Budiž dále

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad (4.2,1)$$

rovnice základní křivky Γ. Její tečna v bodě (x) (a v souřadnicích $'x_i$)

$$\sum_i f_i\,'x_i = 0 \qquad \left(f_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

má vzhledem ke kuželosečce K pól Z, jehož souřadnice $z_1 : z_2 : z_3$ jsou

$$z_1 : z_2 : z_3 = |f_1, a_{12}, a_{13}| : |a_{11}, f_1, a_{13}| : |a_{11}, a_{12}, f_1| . \qquad (4.2,2)$$

Eliminujeme-li x_i z rovnic (1), (2), obdržíme (v souřadnicích z_i) křivku, která odpovídá základní křivce (1) v příbuznosti $\mathbf{P}$. Hledaná harmonická křivka $'\Gamma$ je křivka, která této polární křivce odpovídá v příbuznosti $\mathbf{I}$. Nalezneme tedy její rovnici nejjednodušeji tak, že stanovíme průsečík $('x)$ spojnice PZ s tečnou základní křivky Γ, to jest

$$'x_1 : 'x_2 : 'x_3 =$$

$$= \begin{vmatrix} f_2, & f_3 \\ p_3z_1 - p_1z_3, & p_1z_2 - p_2z_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_3, & f_1 \\ p_1z_2 - p_2z_1, & p_2z_3 - p_3z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_1, & f_2 \\ p_2z_3 - p_3z_2, & p_3z_1 - p_1z_3 \end{vmatrix},$$

kde ovšem třeba klást za $z_1 : z_2 : z_3$ výrazy dané rovnicemi (2). Eliminujeme-li x_i z těchto rovnic a rovnice (1), obdržíme (v souřadnicích $'x_i$) křivku $'\Gamma$ harmonickou ke křivce Γ.

Budiž

$$'f('x_1, 'x_2, 'x_3) = 0 \tag{4.2,3}$$

rovnice harmonické křivky $'\Gamma$. Polára jejího bodu $('x)$ vzhledem ke kuželosečce K (a v souřadnicích x_i)

$$\sum_i 'f_i x_i = 0 \quad \left('f_i \equiv \frac{\partial' f}{\partial' x_i}\right)$$

protne přímku p v bodě, jehož souřadnice jsou

$$y_1 : y_2 : y_3 = \begin{vmatrix} b_2, & b_3 \\ 'f_2, & 'f_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_3, & b_1 \\ 'f_3, & 'f_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_1, & b_2 \\ 'f_1, & 'f_2 \end{vmatrix}. \tag{4.2,4}$$

Spojnice bodů (y), $('x)$ má souřadnice

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \begin{vmatrix} 'x_2, & 'x_3 \\ y_2, & y_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 'x_3, & 'x_1 \\ y_3, & y_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 'x_1, & 'x_2 \\ y_1, & y_2 \end{vmatrix}. \tag{4.2,5}$$

Eliminujeme-li $'x_i$ z rovnic (3), (5) (při čemž za $y_1 : y_2 : y_3$ třeba klást výrazy dané rovnicemi (4)), obdržíme křivku (v souřadnicích ξ_i), která odpovídá harmonické křivce (3) v příbuznosti $\boldsymbol{H}^{-1}$, to jest křivku $'\Gamma$, „inversně" harmonickou ke křivce Γ.

Přejděme ke dvěma *zvláštním volbám soustavy souřadnic.*

a) Zvolme trojstran souřadnic tak, že střed P bude vrcholem O_3 (0; 0; 1), přímka p osou $x_3 = 0$, tečny z bodu P ke kuželosečce K osami $x_1 = 0$ a $x_2 = 0$. Touto volbou uvede se rovnice řídicí kuželosečky K na tvar

$$a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

a rovnice příbuznosti na tvar

$$\boxed{'x_1 : 'x_2 : 'x_3 = f_2f_3 : f_1f_3 : -2f_1f_2}\,. \tag{a}$$

Eliminací x_i z rovnice základní křivky $f(x) = 0$ a z rovnic právě napsaných nalezneme bodovou rovnici harmonické křivky $'f('x) = 0$. Rovnice příbuznosti (a) nezávisejí na parametrech a_{12}, a_{33} kuželosečky K, v souhlase s úvahami odst. 2.1.

Obrácení rovnic příbuznosti má tvar

$$\boxed{\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = 'x_2'x_3 : 'x_1'x_3 : -2'x_1'x_2}\,; \tag{a*}$$

tedy tvar rovnic (2.3,2), jak jsme mohli očekávat. Eliminací $'x_i$ z rovnice harmonické křivky $'f('x) = 0$ a z rovnice právě napsaných nalezneme přímkovou rovnici základní křivky; výsledek eliminace je rovnice

$$\boxed{'f(\xi_2\xi_3, \ \xi_1\xi_3, \ -2\xi_1\xi_2) = 0}\,. \tag{a**}$$

b) Zvolme trojstran souřadnic tak, že bude polárním trojstranem kuželosečky K, při čemž volme střed P za vrchol O_3(0; 0; 1), přímku p za osu $x_3 = 0$. Rovnice kuželosečky K uvede se touto volbou na tvar

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$$

a rovnice příbuznosti na tvar

$$\boxed{'x_1 : 'x_2 : 'x_3 = a_{22}f_1f_3 : a_{11}f_2f_3 : -(a_{22}f_1^2 + a_{11}f_2^2)} \,. \tag{b}$$

Obráceně

$$\boxed{\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = a_{11}'x_1'x_3 : a_{22}'x_2'x_3 : -(a_{11}'x_1^2 + a_{22}'x_2^2)} \,, \tag{b*}$$

a tedy

$$\boxed{'f(a_{22}\xi_1\xi_3,\quad a_{11}\xi_2\xi_3,\quad -(a_{22}\xi_1^2 + a_{11}\xi_2^2)) = 0} \tag{b**}$$

Rovnice příbuznosti nezávisejí ovšem na parametru a_{33} kuželosečky K.

K oběma volbám soustavy souřadnic sub a), b) poznamenejme ještě toto. V obou případech jedná se o vyjádření téhož geometrického principu, nezávislého na volbě soustavy souřadnic. Lze tedy přejít od jednoho vyjádření naší příbuznosti k druhému pouhou transformací souřadnic, to jest nesingulární kolineací. Snadno lze udat nejobecnější transformaci, která převádí trojstran jedné volby v trojstran druhý; tak poznáváme, že existuje ∞^1 nesingulárních kolineací, jimiž lze jedno z obou vyjádření převést v druhé. Úvahy tohoto druhu opět opomíjíme.

4.3. Vyjádření harmonické příbuznosti rovnicemi (4.2,a, b) aplikujeme na některé *zvláštní případy*!

a) Základní křivkou budiž *projektivní křivka Laméova*

$$\sigma_1x_1^n + \sigma_2x_2^n + \sigma_3x_3^n = 0 \quad (\varrho_i, n \text{ konstanty})\,.$$

Při první volbě soustavy souřadnic (4.2,a) nalezneme (po vynechání akcentů)

$$\sigma_1^{\frac{1}{1-n}}\, x_1^{\frac{n}{1-n}} + \sigma_2^{\frac{1}{1-n}}\, x_2^{\frac{n}{1-n}} + (-\tfrac{1}{2})^{\frac{n}{1-n}}\, \sigma_3^{\frac{1}{1-n}}\, x_3^{\frac{n}{1-n}} = 0;$$

harmonická křivka je tedy téhož *typu* jako křivka základní. Speciálně pro kuželosečku, pro niž trojstran souřadnic je trojstranem polárním ($n = 2$), nalezneme jako harmonickou křivku projektivní lemniskatu; pro kuželosečku, jež je souřadnicovému trojstranu opsána ($n = -1$), je harmonickou křivkou projektivní křivka Steinerova. Atd.

Při druhé volbě soustavy souřadnic (4.2,b) je výsledkem křivka (opět po vynechání akcentů)

$$\sigma_1^{\frac{1}{1-n}}\, (a_{11}x_1x_3)^{\frac{n}{n-1}} + \sigma_2^{\frac{1}{1-n}}\, (a_{22}x_2x_3)^{\frac{n}{n-1}} + (-1)^{\frac{n}{n-1}}\, \sigma_3^{\frac{1}{1-n}}\, (a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2)^{\frac{n}{n-1}} = 0\,.$$

b) Základní křivkou budiž *projektivní křivka W*

$$x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3} - k = 0 \;\; (\sigma_i, k \text{ konstanty};\ \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0).$$

Při první volbě soustavy souřadnic nalezneme

$$x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3} - \frac{(-2)^{\sigma_3}}{\sigma_1^{\sigma_1}\sigma_2^{\sigma_2}\sigma_3^{\sigma_3}} k = 0 \quad (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0)\,;$$

i je harmonická křivka téhož *druhu* jako křivka základní. Obě křivky splynou, jestliže

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1^{\sigma_1}\sigma_2^{\sigma_2}\sigma_3 &= (-2)^{\sigma_3} \\ \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= 0; \end{aligned}\right\}$$

jedno řešení je

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = -2$$

a vede na samodružné kuželosečky naší příbuznosti (viz odst. 3.2).

Při druhé volbě je výsledkem křivka

$$(\sigma_3 x_3)^{\sigma_3} - (-1)^{\sigma_3} k(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2)^{\sigma_3} \left(\frac{a_{11}}{\sigma_1} x_1\right)^{\sigma_1} \left(\frac{a_{22}}{\sigma_2} x_2\right)^{\sigma_2} = 0$$

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_2 = 0)\,.$$

4.4. Povšimneme si případů, kdy základní křivka je autopolární nebo anallagmatická.

Budiž základní křivka Γ *autopolární* vzhledem ke kuželosečce K. Pro tento případ plyne ze symbolické rovnice věty [4.1,1], že

$$\boldsymbol{H}_* = \boldsymbol{I}\,,$$

to jest harmonická křivka je k základní křivce inversní. A obráceně plyne z rovnic

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{PI}$$

postupně

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{PI}, \quad \boldsymbol{II} = \boldsymbol{PII}, \text{ a tedy } \boldsymbol{P} = 1\,,$$

to jest základní křivka musí býti taková, aby se příbuzností $\boldsymbol{P}$ reprodukovala. A poněvadž existuje v dané příbuznosti $\boldsymbol{P}$ nekonečně mnoho autopolárních křivek, máme tuto větu:

V příbuznosti $\boldsymbol{H}$ *existuje nekonečně mnoho křivek, které jsou k základním křivkám inversní. Nutnou a postačující podmínkou pro to je, aby křivka základní byla autopolární ke kuželosečce K.* [4.4,1]

Budiž základní křivka Γ *analagmatická* vzhledem ke kuželosečce K a středu P. Pak ze symbolické rovnice věty [4.1,3] plyne, že

$$\boldsymbol{H}_*^{-1} = \boldsymbol{P}\,,$$

to jest „inversně“ harmonická křivka je k základní křivce polární. A obráceně z rovnic

$$\boldsymbol{H}^{-1} = \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{H}^{-1} = \boldsymbol{IP}$$

plyne postupně

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{IP}, \quad \boldsymbol{PP} = \boldsymbol{IPP}, \text{ a tedy } \boldsymbol{I} = 1\,,$$

to jest základní křivka musí být analagmatická. A poněvadž zase v dané příbuznosti I existuje nekonečně mnoho analagmatických křivek, máme větu:

V příbuznosti H^{-1} existuje nekonečně mnoho křivek, které jsou k základním křivkám polární. Nutnou a postačující podmínkou pro to je, aby křivka základní byla analagmatická vzhledem ke kuželosečce K a středu P. [4.4,2]

4.5. Základní křivka Γ budiž zároveň autopolární i analagmatická ve smyslu uvedeném v odst. 4.4. Pak je

$$H_{**} = 1 \text{ a zároveň } H_{**}^{-1} = 1 ,$$

to jest základní křivka se reprodukuje v příbuznosti H (i v příbuznosti H^{-1}). Obráceně pak z rovnic

$$H = 1, \quad H = PI$$

plyne postupně

$$PI = 1, \quad PPI = P \quad \text{nebo} \quad PII = I ,$$

a tedy

$$P = I ;$$

tentýž výsledek plyne i z rovnic

$$H^{-1} = 1, \quad H^{-1} = IP .$$

I musí být základní křivka taková, že se transformuje stejně jak v příbuznosti P, tak v příbuznosti I, tedy zároveň autopolární i analagmatická. I platí:

Nutná a postačující podmínka, aby se křivka v příbuznosti H reprodukovala, je, aby byla zároveň autopolární vzhledem ke kuželosečce K i analagmatická vzhledem ke kuželosečce K a středu P. Tato křivka se pak reprodukuje i v příbuznosti H^{-1}. [4.5,1]

Věta [1] ovšem neříká nic o tom, zda takové křivky vskutku existují. Otázka existence invariantních útvarů v příbuznosti $H(H^{-1})$ by vyžadovala hlubší studium souvislosti analagmatických a autopolárních křivek.

5.0. Harmonickou křivku (a „inversně“ harmonickou křivku) lze konečně vytvořit jako obálku jisté jednoparametrické soustavy kuželoseček, jak ukázáno v odst. 5.1, 5.3. Tohoto způsobu vytvoření použijeme k odvození konstrukce tečny harmonické křivky (odst. 5.2) a konstrukce bodů „inversně“ harmonické křivky (odst. 5.4).

5.1. Harmonickou křivku lze vytvořit jako *obálku* jisté jednoparametrické soustavy kuželoseček.

Podle věty [2.5,1] odpovídá svazku přímek o středu v obecném bodě S v příbuznosti H kuželosečka K, jež obsahuje bod S a vrcholy O_1, O_2, O_3 základního trojstranu, a jejíž tečny v bodech O_1, O_2 protínají se v bodě M, kolineárním se středem S a vrcholem O_3. Označíme-li tedy N průsečík přímky SO_3 s přímkou O_1O_2, pak je bod M harmonický k bodu N vzhledem k bodům S, O_3, a je také touto vlastností určen. I můžeme sestrojit kuželosečku K ze dvou bodů O_1, O_2 a tečen O_1M, O_2M v nich a dalšího bodu (O_3 nebo S).

Jsou-li $x_1 : x_2 : x_3$ souřadnice bodu S v trojstranu souřadnic $O_1O_2O_3$, je rovnice kuželosečky K (v souřadnicích $'x_i$)

$$F \equiv x_1{}'x_2{}'x_3 + x_2{}'x_1{}'x_3 - 2x_3{}'x_1{}'x_2 = 0\,,$$

a bod M má souřadnice $x_1 : x_2 : -2x_3$.

Předpokládejme nyní, že bod S probíhá křivkou Γ s rovnicí $f(x) = 0$. Pak každému obecnému bodu této křivky odpovídá jediná kuželosečka K a křivce Γ jakožto (křivé) řadě těchto bodů odpovídá jednoparametrická soustava takových kuželoseček. Jejich obálka, jestliže existuje, je určena rovnicemi

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(F + \Lambda f) = 0, \quad f = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

čili

$$\left.\begin{aligned} 'x_2{}'x_3 + \Lambda f_1 &= 0 \\ 'x_1{}'x_3 + \Lambda f_2 &= 0 \\ -2'x_1{}'x_2 + \Lambda f_3 &= 0 \\ f &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left(f_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}\right),$$

kde $\Lambda \neq 0$ je zatím ještě neurčený součinitel. Ale z předcházející soustavy plyne

$$\left.\begin{aligned} f_2f_3 &= \varrho'x_1 \\ f_1f_3 &= \varrho'x_2 \\ -2f_1f_2 &= \varrho'x_3 \\ f &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left(\varrho \equiv -\frac{2}{\Lambda^2}{}'x_1{}'x_2{}'x_3\right),$$

a poněvadž tečna křivky Γ má souřadnice $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = f_1 : f_2 : f_3$, tedy

$$\left.\begin{aligned} 'x_1 : 'x_2 : 'x_3 &= \xi_2\xi_3 : \xi_1\xi_3 : -2\xi_1\xi_2 \\ f &= 0\,. \end{aligned}\right\}$$

To však jsou rovnice (2.3,1) pro příbuznost $\boldsymbol{H}$ použitou na křivku $f(x) = 0$. Větou:

Harmonická křivka $'\Gamma$ základní křivky Γ je obálkou jednoparametrické soustavy kuželoseček K, jež odpovídají bodům S křivky Γ takto: Každá z nich prochází vrcholy O_1, O_2, O_3 základního trojstranu a má v bodech O_1, O_2 tečny, jejichž průsečík M je kolineární s body S a O_3, a to tak, že platí $(O_3SNM) = -1$, kde N je průsečík přímky O_1O_2 s přímkou SO_3. [5.1,1]

5.2. Věty [5.1,1] lze použít k sestrojení *tečny harmonické křivky.*

Budiž t tečna křivky Γ v bodě S. Bod $'S$, který odpovídá bodu S v příbuznosti $\boldsymbol{H}$, je patrně průsečík přímky t s kuželosečkou K; v tomto bodě se kuželosečka K a harmonická křivka $'\Gamma$ dotýkají.

Dovedeme-li tedy sestrojiti tečnu základní křivky Γ, dovedeme sestrojit i odpovídající tečnu $'t$ harmonické křivky $'\Gamma$ (používajíce Pascalovy věty na body O_1^2, O_2^2, $'S^2$; obrázek sestrojí si čtenář sám).

5.3. Také „inversně“ harmonickou křivku (to jest základní křivku Γ při známé harmonické křivce $'\Gamma$) lze vytvořit jako obálku jednoparametrické soustavy kuželoseček.

Podle věty [2.5,2] odpovídá přímé bodové řadě na obecné přímce $'s$ v příbuznosti $\mathbf{H}^{-1}$ kuželosečka $'K$, jež se dotýká přímky $'s$ a stran O_2O_3, O_1O_3, O_1O_2 základního trojstranu, při čemž spojnice $'m$ bodů dotyků Ω_2, Ω_1 této kuželosečky se stranami O_1O_3, O_2O_3, přímka O_1O_2 a přímka $'s$ procházejí jedním bodem $'P$. Označíme-li tedy $'n$ spojnici bodu $'P$ s vrcholem O_3, pak $'m$ je přímka harmonická k přímce $'n$ vzhledem k přímkám $'s$, O_1O_2, a je také touto vlastností určena. I sestrojíme kuželosečku $'K$ z dvou tečen O_1O_3, O_2O_3 s body dotyku Ω_2, Ω_1 a další tečny (O_1O_2 nebo $'s$).

Jsou-li $'\xi_1 : '\xi_2 : '\xi_3$ souřadnice přímky $'s$ v trojstranu souřadnic $O_1O_2O_3$, je rovnice kuželosečky $'K$ (v souřadnicích ξ_i)

$$'F \equiv '\xi_1\xi_2\xi_3 + '\xi_2\xi_1\xi_3 - 2'\xi_3\xi_1\xi_2 = 0\,.$$

Probíhá-li přímka $'s$ všemi tečnami křivky $'f('\xi) = 0$, pak obálka příslušné jednoparametrické soustavy kuželoseček $'K$, jestliže existuje, je určena rovnicemi

$$\frac{\partial}{\partial '\xi_i}('F + '\Lambda 'f) = 0, \qquad f = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

čili

$$\left.\begin{aligned} \xi_2\xi_3 + '\Lambda 'f_1 &= 0 \\ \xi_1\xi_3 + '\Lambda 'f_2 &= 0 \\ -2\xi_1\xi_2 + '\Lambda 'f_3 &= 0 \\ 'f &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left('f_i = \frac{\partial 'f}{\partial '\xi_i}\right),$$

nebo také

$$\left.\begin{aligned} 'f_2 'f_3 &= '\varrho\xi_1 \\ 'f_1 'f_3 &= '\varrho\xi_2 \\ -2'f_1 'f_2 &= '\varrho\xi_3 \\ 'f &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left('\varrho = -\frac{2}{-\Lambda^2}\,\xi_1\xi_2\xi_3\right).$$

Poněvadž bod křivky $'\Gamma$ má souřadnice $'x_1 : 'x_2 : 'x_3 = 'f_1 : 'f_2 : 'f_3$, tedy

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = 'x_2'x_3 : 'x_1'x_3 : -2'x_1'x_2 \\ 'f = 0\,. \end{aligned}\right\}$$

To jsou rovnice (2.3,2) pro příbuznost $\mathbf{H}^{-1}$ použitou na křivku $'f('\xi) = 0$. Větou:

„Inversně“ harmonická křivka Γ harmonické křivky $'\Gamma$ je obálkou jednoparametrické soustavy kuželoseček $'K$, jež odpovídají tečnám $'s$ křivky $'\Gamma$ takto: Každá z nich dotýká se stran O_2O_3, O_1O_3, O_1O_2 základního trojstranu a body dotyku se stranami O_2O_3, O_1O_3 jsou průsečíky těchto stran s přímkou $'m$, jež prochází průsečíkem přímky $'s$ s přímkou O_1O_2 tak, že platí $(O_1O_2\ 's'n'm) = -1$, kde $'n$ je spojnice bodu O_3 s průsečíkem přímek $'s$, O_1O_2. [5.3,1]

5.4. Věty [5.3,1] použijeme k sestrojení *bodů „inversně" harmonické křivky.*

Budiž $'T$ bod dotyku křivky $'\Gamma$ s přímkou $'s$. Přímka s (tečna křivky Γ), která odpovídá tečně $'s$ v příbuznosti $\boldsymbol{H}^{-1}$, je tečnou kuželosečky $'K$, i je to přímka $'s$. Její bod dotyku T s kuželosečkou $'K$ je zároveň bodem základní křivky Γ (sestrojíme jej, používajíce Brianchonovy věty na tečny O_1O_3, O_2O_3 s body dotyku Ω_2, Ω_1 a tečnu $'s$; podrobnosti této konstrukce se týkající ponecháváme čtenáři).