O AXIÁLNÍCH A DUÁLNĚ AXIÁLNÍCH SYSTÉMECH ČAR NA PLOŠE V S_3, OBSAHUJÍCÍCH KONJUGOVANÉ SÍTĚ

JOSEF BREJCHA, Brno.

(Došlo dne 17. prosince 1953.) DT: 513.621

V práci „*Sistemi coniugati e sistemi assiali di linea sopra una superficie dello spazio ordinario*“ (Bolletino dell'Unione Matematica Italiana, Febbraio, 1924) řeší *E. Bompiani* otázku, *existují-li na ploše S v S_3 konjugované sítě, obsažené v systému axiálním.* Rozřešil zejména otázku, kdy těchto konjugovaných systémů je jednoparametrická soustava a dokázal, že je to možno jen tehdy, *když S je konstantní střední projektivní křivosti —16 a axiální systém je indukován kongruencí Γ_1 Greenových hran.*

V dalším se řeší obdobné otázky s tím rozdílem, že se klade podmínka, aby *jedna soustava konjugované sítě náležela do axiálního systému a druhá do axiálního systému reciprokého.* Je-li takových sítí jednoparametrická soustava, pak *plocha S je Čechova plocha o projektivní křivosti —2 a Γ_1 je její kongruencí Wilczynskiho direktric.*

Otázka je podrobně studována též u ploch přímkových.

I. Budiž

$$\left.\begin{aligned} x_{uu} &= p_{11}x + \Theta_u x_u + \beta x_v , \\ x_{vv} &= p_{22}x + \gamma x_u + \Theta_v x_v , \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

soustava parciálních dif. rovnic, jíž vyhovují normální Fubiniovy souřadnice ($\Theta = \log \beta\gamma$) bodu x nepřímkové ($\beta\gamma \neq 0$) plochy S trojrozměrného projektivního prostoru, vztažené na asymptotiky.

Ke každému bodu x plochy S přidružme jím procházející přímku l_1 a v jeho tečné rovině ležící přímku l_2, jež jsou definovány jako spojnice bodů

$$x, \quad x_{uv} - ax_u - bx_v , \tag{2}$$

resp. dvojice bodů

$$x_u - bx, \quad x_v - ax , \tag{3}$$

kde a, b jsou funkce asymptotických parametrů u, v. Snadno se vidí, že l_1, l_2 je dvojice polár v základní[1]) polaritě; proto kongruenci Γ_1 přímek l_1 a kongruenci Γ_2 přímek l_2 budeme nazývat *kongruencemi reciprokými.*

[1]) T. j. v polaritě vzhledem k Lieho kvadrice bodu x. Viz *Fubini-Čech*, La géométrie projective différentielle 1931, str. 64.

Kongruence Γ_1 resp. Γ_2 indukuje na ploše S systém Σ_1 axiálních čar, resp. systém Σ_2 duálních axiálních čar, definovaných takto:

Čára C_1 na S_1 náleží do systému Σ_1, když v každém jejím bodě x její oskulační rovina prochází přímkou l_1 bodu x.

Duálně čára C_2 na S_2 náleží do systému Σ_2, když bod vratu[2]) tečné roviny jejího bodu x leží na l_2.

Vyjádříme-li tyto podmínky, vychází snadno, že čára $v = v(u)$ náleží do Σ_1, resp. do Σ_2, když

$$v'' = -\beta + (\Theta_v - 2b)v' - (\Theta_v - 2a)v'^2 + \gamma v'^3\,, \tag{4}$$

resp. když

$$v'' = \beta + (\Theta_u - 2b)v' - (\Theta_u - 2a)v'^2 - \gamma v'^3\,. \tag{5}$$

Otázku, která je řešena v tomto článku (v části II. i pro plochy přímkové), lze nyní formulovati takto:

Existuje plocha S a k ní přidružená dvojice reciprokých kongruencí Γ_1 a Γ_2 tak, aby indukovaný axiální systém Σ_1 obsahoval jednu soustavu a indukovaný duální axiální systém Σ_2 druhou soustavu konjugované sítě L čar na S?

Buď

$$v' = M(u, v), \qquad M \neq 0 \tag{6}$$

dif. rovnice soustavy L_1 čar na S

a

$$v' = -M(u, v) \tag{7}$$

dif. rovnice druhé soustavy L_2, která spolu s prvou tvoří konjugovanou síť L.

Že všechny čáry soustavy L_1 náležejí do Σ_1 je vyjádřeno parciální dif. rovnicí pro M

$$M_u + MM_v = -\beta + (\Theta_u - 2b)M - (\Theta_v - 2a)M^2 + \gamma M^3\,; \tag{8}$$

obdobně vyjadřuje rovnice

$$-M_u + MM_v = \beta - (\Theta_u - 2b)M - (\Theta_v - 2a)M^2 + \gamma M^3\,, \tag{9}$$

že čáry soustavy L_2 náležejí do Σ_2.

Odečtením a sečtením rovnic soustavy (8), (9) vychází nová soustava

$$M_u = -\beta + (\Theta_u - 2b)M \tag{10}$$
$$M_v = M[-(\Theta_v - 2a)] + \gamma M^2 \tag{11}$$

s jedinou podmínkou integrability $M_{uv} = M_{vu}$, t. j.

$$\beta(\Theta_v - 2a) + \beta_v + 2(a_u + b_v - \beta\gamma - \Theta_{uv})M + [\gamma(\Theta_u - 2b) + \gamma_u]M^2 = 0. \tag{12}$$

Z ní je patrno, že při obecných S, Γ_1, Γ_2 neexistuje žádná konjugovaná síť L čar na S požadované vlastnosti; ve zvláštních případech může existovati

[2]) Point de rebroussement, *Fubini-Čech*, l. c., str. 109.

jedna nebo dvě takové konjugované sítě podle toho, vyhovuje-li jeden nebo dva z kořenů rovnice (12), kvadratické v M, soustavě (10), (11).

V případě, že (12) je splněna identicky v M je

$$\begin{aligned} \beta(\Theta_v - 2a) + \beta_v &= 0\,, \\ \gamma(\Theta_u - 2b) + \gamma_u &= 0\,, \\ a_u + b_v - \beta\gamma - \Theta_{uv} &= 0\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Z prvých dvou těchto rovnic vychází

$$2a = \Theta_v + \frac{\beta_v}{\beta} = (\log \beta\gamma)_v + (\log \beta)_v = (\log \beta^2\gamma)_v\,,$$

$$2b = \Theta_u + \frac{\gamma_u}{\gamma} = (\log \beta\gamma)_u + (\log \gamma)_u = (\log \beta\gamma^2)_u\,;$$

t. j. zavedeme-li označení

$$\psi = (\log \beta^2\gamma)_v, \quad \varphi = (\log \beta\gamma^2)_u\,,$$

bude

$$a = \tfrac{1}{2}\psi, \quad b = \tfrac{1}{2}\varphi\,. \tag{14}$$

Kongruence Γ_1 je tedy vytvořena přímkou

$$l_1 = [x, x_{uv} - \tfrac{1}{2}\psi x_u - \tfrac{1}{2}\varphi x_v]\,,$$

t. j.[3]) *kanonickou přímkou (prvého druhu) s* $\lambda = -\frac{1}{2}$, *t. j. prvou Wilczynského direktricí*, kdežto Γ_2 je vytvořena druhou direktricí. Zatím co prvé 2 rovnice (13) určují Γ_1, Γ_2, z třetí vyplývá

$$-\frac{1}{\beta\gamma}\log(\beta\gamma)_{uv} = -2 \tag{15}$$

t. j. plocha S *je Čechova plocha*[4]) *o konstantní projektivní křivosti* -2. Srovnáním se soustavou rovnic pro ϱ na str. 151 cit. knihy[4]) (kde je klásti $m = -b$, $l = -a$) vychází, že soustava rovnic (10), (11) je s ní totožná, klademe-li $M = \dfrac{1}{\varrho}$. Z Liouvilleovy rovnice (15) pro $\beta\gamma$ plyne, že transformací asymptotických parametrů lze docíliti, aby bylo

$$\beta\gamma = (u + v)^{-2}\,. \tag{16}$$

Nechť $\beta\gamma$ splňují rovnici (16). Pak lze klásti

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{1}{\gamma}\,\frac{k-u}{k+v}\cdot\frac{1}{u+v}\,, \\ M &= \beta\cdot\frac{k-u}{u+v}\,(u+v)\,, \end{aligned}\right\}, \quad k = \text{konst.} \tag{16a}$$

---

[3]) *Fubini-Čech*, l. c. str. 100.

[4]) *Fubini-Čech*, Geometria proiettiva diferenziale I, 1926, str. 151.

Výsledky shrnuje **věta 1**[5]):

Je-li dána obecná plocha (nepřímková) S a na ní axiální systém Σ_1 a duální axiální systém Σ_2 čar, neexistuje obecně žádná konjugovaná síť L, jejíž jedna soustava čar náleží do Σ_1, druhá do Σ_2. Ve zvláštním případě mohou existovat jedna nebo dvě takové sítě. Aby bylo možno čáry systému Σ_1 rozložiti na jednoparametrický systém soustav čar, které náležejí do Σ_1 s konjugovanými soustavami, náležejícími do Σ_2, musí plocha S být konstantní projektivní křivosti — 2 a kongruence, indukující na S axiální systémy Σ_1, Σ_2 jsou vytvořeny prvými resp. druhými Wilczynského direktricemi. V tomto případě, jsou-li asymptotické parametry u, v voleny tak, aby platila rovnice (16), náležejí čáry soustavy o diferenciální rovnici (6) resp. (7) do Σ_1, resp. Σ_2, je-li M dáno kteroukoli z rovnic (16a) s libovolným k.

II. Nyní předpokládejme, že S je plocha přímková a to — nemá-li otázka ztratit smysl — nikoli rozvinutelná.

Nechť bod $x = y(v) + uz(v)$ při konstantním u vždy vytváří asymptotiku plochy S; také čáry C_y resp. C_z náležejí soustavě asymptotik (nepřímkových) plochy S. Naopak čáry u, t. j. $v =$ *konst.*, jsou tvořicí přímky plochy. Faktor homogenity přímkových souřadnic a parametr v lze vždy normalisovat tak, aby determinant ze souřadnic bodů y, z, y', z' byl

$$(yz\; y'z') = \omega, \qquad (\omega^2 = 1) \tag{17}$$

a aby mezi koeficienty A, B, C soustavy diferenciálních rovnic

$$\left.\begin{aligned} y'' &= -(B + j)y + Az\,, \\ z'' &= -Cy + (B - j)z\,, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

jíž vyhovují $y^{(i)}(v)$, $z^{(i)}(v)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$,
platil vztah

$$B^2 - AC = \varepsilon\,, \tag{18a}$$

kde $\varepsilon^2 = 1$, nebo $\varepsilon = 0$ podle toho, jsou-li fleknodální čáry plochy různé či nikoliv (čárky značí derivace dle v). Neměníce smysl označení a, b z části I můžeme předpokládat, že kongruence Γ_1 je tvořena přímkou, spojující body

$$x, \; -az - by' + (1 - bu)z' \tag{19}$$

neboť zde je

$$\begin{aligned} x_u &= z, \; x_{uu} = 0, \quad x_v = y' + uz' \\ x_{vv} &= y'' + uz'' = \\ &= (-B - j + Cu)x + (A + 2Bu + Cu^2)x_u\,, \end{aligned} \tag{20}$$

při čemž poslední rovnice plyne z (18).

---

[5]) Srovnej s větou E. Bompianiho v Bolletine dell'Unione Matematica Italiana, Anno III, N. *1* — Febbraio 1924.

Označíme-li ještě fleknodální kvadratickou formu plochy S

$$A + 2Bu + Cu^2 = F(u) \tag{21}$$

(která je identicky nula pouze je-li S kvadrika, což vylučme), indukuje kongruence Γ_1 na S axiální systém čar o diferenciální rovnici

$$u'' = 2bu'^2 - 2au' - F(u), \tag{22}$$

zatím co reciproká kongruence Γ_2 indukuje na S duální axiální systém čar o dif. rovnici

$$u'' = 2bu'^2 - 2au' + F(u)\,. \tag{23}$$

Buď nyní

$$u' = M(u, v); \quad M \neq 0 \tag{24}$$

diferenciální rovnice soustavy L_1 čar na S, kdežto

$$u' = - M(u, v) \tag{25}$$

dif. rovnice konjugované soustavy L_2. Nechť prvá soustava této konjugované sítě L náleží do Σ_1, druhá do Σ_2. Podmínky pro to obdržíme z rovnice (22), kam klademe

$$u' = M, \quad u'' = M_v + MM_u\,,$$

a z rovnice (23) pro $u' = -M$, $u'' = -M_v + MM_u$. Vychází soustava rovnic

$$\left.\begin{aligned} M_v + MM_u &= 2bM^2 - 2aM - F(u)\,, \\ -M_v + MM_u &= 2bM^2 + 2aM + F(u)\,, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

z nichž sečtením a odečtením vzniká soustava

$$\left.\begin{aligned} M_u &= 2bM\,, \\ M_v &= -2aM - F(u)\,. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Podmínka integrability $M_{uv} = M_{vu}$ zde dává

$$\frac{\partial F(u)}{\partial u} - 2bF(u) + 2\left(\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v}\right) M = 0\,. \tag{28}$$

Na rozdíl od obdobné rovnice (12) v části I. je rovnice (28) pouze lineární v M.

Aby byla splněna v M identicky, je třeba, aby bylo

$$\frac{\partial F(u)}{\partial u} - 2bF(u) = 0\,,$$

$$\frac{\partial b}{\partial v} + \frac{\partial a}{\partial u} = 0\,.$$

Odtud vychází

$$b = \frac{1}{2}\frac{\partial \log F(u)}{\partial u}\,,$$

$$\frac{\partial a}{\partial u} = -\frac{\partial b}{\partial v} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log F(u)}{\partial u \partial v}\,, \tag{29}$$

t. j.

$$a = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log F(u)}{\partial v} + V\,, \tag{30}$$

kde V je funkce pouze parametru v.

Soustava (27) umožňuje k a, b, daným výrazy (29), (30), určiti M. Skutečně z rovnice

$$M_u = \frac{\partial \log F(u)}{\partial u} M$$

plyne

$$M = V_1 F(u), \qquad (V_1 \neq 0 \text{ funkce pouze } v)\,. \tag{31}$$

druhá z rovnic (27) dává

$$V = -\frac{1 + V_1'}{2V_1}\,.$$

Odtud vychází **věta 2:**

Na dané nerozvinutelné, nekvadratické přímkové ploše S existuje nekonečné množství axiálních systémů Σ_1, jejichž čáry lze uspořádati do nekonečného množství soustav L_1, k nimž konjugované soustavy L_2 náležejí do Σ_2. Určení takového axiálního systému závisí na jedné funkci jedné proměnné.

Z této věty plyne, že existuje nekonečné množství kongruencí Γ_1, jejichž paprsky tvoří komplex Γ_1^*.

Studujme ony soustavy paprsků l_1 komplexu Γ_1^*, které

a) při pevně zvolené funkci V procházejí body pevné tvořicí přímky (yz) plochy S,

b) při neurčeném V procházejí pevným bodem $x = y + uz$ plochy S,

c) při neurčeném V procházejí body pevné tvořicí přímky (yz). Je možno psát podle (19), (29), (30):

$$l_1 = \left\{ y + uz,\ \left[\frac{1}{2}\frac{\partial \log F(u)}{\partial v} - V\right] z - \frac{1}{2}\frac{\partial \log F(u)}{\partial u} y' + \right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{1}{2} u \frac{\partial \log F(u)}{\partial u}\right) z' \right\}, \tag{32}$$

t. j. nehledíme-li na faktor homogenity

$$l_1 = \{y + uz,\ \ [\tfrac{1}{2}(A' + 2B'u + C'u^2) - V(A + 2Bu + Cu^2)]z,$$
$$-(B + Cu)y' + (A + Bu)z'\}\,,$$

t. j.

$$l_1 = (y + uz,\ \ \bar{y} + u\bar{z})\,, \tag{33}$$

kde $\bar{y}$ a $\bar{z}$ jsou na u nezávislé body

$$\bar{y} = (\tfrac{1}{2}A' - VA)z - By' + Az'\,,$$
$$\bar{z} = -(\tfrac{1}{2}C' - VC)y + (B' - 2BV)z - Cy' + Bz'\,.$$

Vychází odtud

a) při pevně zvoleném V přímky kongruence Γ_1, protínající pevnou tvořicí přímku (yz) plochy S, vytvořují regulus resp. rovinný svazek, jakožto místo spojnic přidružených bodů $y + uz$, $\bar{y} + u\bar{z}$ v projektivitě bodových řad na přímkách (yz), $(\bar{y}, \bar{z})$[6]), jež jsou

α) mimoběžkami při různých fleknodech,

β) různoběžkami při splývajících fleknodech na (yz).

b) Jsou-li u, v pevná a V proměnné, opisuje l_1 rovinu

$$\mu = [y, z, -By' + Az' + u(-Cy' + Bz')] . \tag{34}$$

α) Pokud jsou oba fleknody na (yz) různé, opisuje rovina μ při měnícím se u svazek o ose (yz), projektivní s řadou bodů $y + uz$ na (yz), při čemž fleknodům jsou přidruženy roviny fleknodální.

β) Jestliže však fleknody na (yz) splývají (na př. v bodě y, takže $A = B = 0$, $C \neq 0$), je rovina μ pevná [za uvedených předpokladů $\mu = (y, z, y')$] a ztotožňuje se s rovinou fleknodální.

c) Mění-li se u, V při současně pevném $v = v_0$, přímky komplexu Γ_1^* vytvořují

α) při různých fleknodech na (yz) speciální lineární kongruenci o ose (yz),

β) při ztotožňujících se fleknodech přímkové pole, jehož nositelkou je rovina fleknodální.

Snadný, plně analogický rozbor struktury reciprokého komplexu Γ_2^* zde pomíjím.

Ukončivše takto studium soustav přímek komplexů Γ_1^* resp. Γ_2^* v bodech, resp. v tečných rovinách pevné tvořicí přímky (yz), předpokládejme, že (yz) se mění na S. Rovnice (31) pak dává při pevné volbě funkce V_1 proměnné v diferenciální rovnici soustavy L_1 a při $-V_1$ soustavy L_2 konjugované sítě L tak, že čáry z L_1 náležejí do Σ_1, čáry L_2 náležejí do Σ_2.

Obě diferenciální rovnice

$$u' = V_1 F(u) \tag{35}$$
$$u' = -V_1 F(u) \tag{36}$$

soustavy L_1, resp. L_2 jsou Ricattiovy; proto L_1 i L_2 patří mezi soustavy čar na nerozvinutelných přímkových plochách, nazvané O. MAYEREM[7]) *soustavy R*. Jsou to však soustavy R speciální tím, že buď dvojicí jejich *základních křivek* (t. j. místa bodů, ve kterých se čára soustavy dotýká asymptotiky) jest dvojice fleknodálních čar plochy, jsou-li různé,

nebo, jestliže fleknodální čáry splývají, čáry soustavy L_1 i L_2 mají ve fleknodech fleknodální tečny za tečny inflexní.

---

[6]) Je $(y, z, \bar{y}, \bar{z}) = (y, z, -By' + Az', -Cy' + Bz') = -(B^2 - AC)(y, z, y', z') = -\varepsilon\omega$; viz (17), (18a).

[7]) *O. Mayer*, Étude sur les surfaces réglées, Buletinul Facultatii de Stiinte din Cernauti *2*, 1928.