Časopis pro pěstování matematiky, roč. 79 (1954)

O DVOU NOVÝCH KONFIGURACÍCH $(12_4, 16_3)$

B. BYDŽOVSKÝ, Praha.

(Došlo dne 18. prosince 1953.) 513.84

Prof. *M. Zacharias* studuje v práci, uvedené v pozn. [6]) konfiguraci $(12_4, 16_3)$, která je jiného typu než čtyři konfigurace tohoto druhu dotud známé. V této práci jsem podrobil tuto novou konfiguraci bližší úvaze a při tom zjistil, že příslušná incidenční tabulka připouští ještě druhé řešení, čímž byla nalezena další konfigurace. Tyto úvahy vedly pak k otázce po konfiguracích určitých vlastností; jako odpověď na tuto otázku byla nalezena další konfigurace.

První konfiguraci $(12_4, 16_3)$ — t. j. soustavu 12 bodů a 16 přímek takových, že každým bodem procházejí 4 tyto přímky a na každé této přímce leží tři z těchto bodů — objevil v r. 1848 L. O. HESSE,[1]) když ukázal, že 12 dotykových bodů tečen vedených z tří bodů kubické křivky rodu jedna ležících v přímce leží po třech na 16 přímkách, jež po čtyřech procházejí vždy jedním dotykovým bodem. Budu tuto konfiguraci v dalším označovati jako konfiguraci Hesseovu (nesmí se zaměňovati s konfigurací $(9_4, 12_3)$ inflexních bodů kubiky rodu jedna, která se rovněž spojuje se jménem Hesseovým). Další konfiguraci $(12_4, 16_3)$ sestrojil v r. 1889 J. DE VRIES.[2]) Také body této konfigurace leží na kubice, která může býti také rodu nula[3]), čemuž tak není pro konfiguraci Hesseovu. Obě konfigurace se shodují v tom, že se skládají ze tří čtveřin bodů takových, že body téže čtveřice jsou navzájem vesměs odděleny (dva body konfigurace se nazývají spojenými, leží-li na přímce konfigurace, jinak se nazývají oddělenými). V práci předložené r. 1939 Král. české společnosti nauk[4]) jsem dokázal existenci konfigurace $(12_4, 16_3)$, která má jen jednu takovou čtveřinu bodů, a r. 1944 nalezl Dr J. METELKA[5]) další takovou konfiguraci. Body obou těchto konfigurací leží na kubické křivce rodu jedna. Konečně r. 1948 podal M. ZACHARIAS[5]) prostorovou konstrukci nové konfigurace $(12_4, 16_3)$; její konstrukci

[1]) *L. O. Hesse*, Journal für Mathematik *36* (1948), str. 143.
[2]) *J. De Vries*, Acta mathematica *12* (1889), str. 67.
[3]) *B. Bydžovský*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky *74* (1950), str. 249.
[4]) *B. Bydžovský*, Věstník Král. čes. spol. nauk, roč. 1939, II.
[5]) *J. Metelka*, Věstník Král. čes. spol. nauk, roč. 1944, XXI.
[6]) *M. Zacharias*, Math. Nachrichten, 1948, str. 332.

rovinnou podal v další práci,[7]) ve které provedl rovinné konstrukce také ostatních do té doby známých konfigurací uvažovaného druhu. Tato konfigurace souvisí jednoduše s konfigurací Hesseovou, jak jsem shledal, když jsem podrobil bližší pozornosti incidenční tabulku, kterou je tato konfigurace definována. V obr. 1 je reprodukována tato tabulka v tom znění, jak je obsažena v práci M. Zachariově; podržel jsem i označení jím zavedené. V této tabulce velká písmena značí konfigurační body, malá písmena konfigurační přímky, křížek označuje incidenci bodu, se kterým je v témže řádku, s přímkou, se kterou je v témže sloupci. Ježto všechny dotud známé konfigurace uvažovaného druhu mají tu vlastnost, že jejich body leží na kubice, zkusil jsem, je-li tomu tak i u konfigurace vyjádřené touto tabulkou. Užívaje známého vyjádření bodů kubiky eliptickým parametrem, dokázal jsem, že tomu tak je a sice platí věta: *Na kubické křivce rodu jedna existuje konfigurace odpovídající tab. 1. Její body jsou: tři inflexní body ležící v přímce a dotykové body vedených ke křivce z těchto tří inflexních bodů.*

	a	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	d_1	d_2	d_3	e_1	e_2	e_3
A_1	×				×	×	×									
A_2	×							×	×	×						
A_3	×										×	×	×			
B_1		×						×			×			×		
B_2		×							×			×			×	
B_3		×								×			×			×
C_1			×		×			×								×
C_2			×			×			×					×		
C_3			×				×			×					×	
D_1				×	×						×				×	
D_3				×		×						×				×
D_3				×			×						×	×		

Obr. 1.

Tyto body inflexní jsou body A_i; z bodu A_1 jsou položeny ke křivce tečny A_1B_i (pro $i = 1, 2, 3$), při čemž body B_i leží v přímce, jak plyne ze známých vlastností inflexních bodů kubiky. Podobně jsou C_i dotykové body tečen položených ke křivce z bodu A_3 a body D_i dotykové body tečen položených ke křivce z bodu A_2. Avšak těchto dvanáct bodů tvoří zároveň konfiguraci Hesseovu výše zmíněnou v tom zvláštním případě, kdy tři body ležící v přímce, ze kterých vedeme tečny ke křivce, jsou inflexní, takže k bodům dotykovým je třeba počítat i tyto body inflexní samé, ježto jen potom vede každý tento bod ke čtyřem dotykovým bodům tečen z něho vedených. Ovšem do této konfigurace nenáležejí přímky $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$, neboť přímky Hesseovy konfigurace spojují vždy tři body, které mají různé body tečnové. Naproti tomu náležejí k této Hessevě konfiguraci ještě přímky $B_1C_3D_2$, $B_2C_1D_3$, $B_3C_2D_1$, které nejsou v tabulce uvedeny, protože nenáleží ke konfiguraci uvažované v uvedené práci prof. Zachariase, kterou budu v dalším označovati stručně — jako se to činí v práci právě uvedené — jako konfiguraci Z. Shrneme tedy dosavadní úvahy v tento výsledek:

[7]) *M. Zacharias*, Math. Nachrichten, 1952.

Tři inflexní body kubické křivky rodu jedna, ležící v přímce, a devět bodů dotykových tečen položených ke křivce z těchto tří bodů tvoří skupinu dvanácti bodů, které leží po třech na devatenácti přímkách. Vynecháme-li z nich vhodně volené tři, dostaneme buď konfiguraci Hesseovu nebo konfiguraci Z.

Je však zajímavo, že konfigurace Z není jediným řešením tabulky 1. Zjistíme to, když vyjádříme početně incidence tabulkou vyjádřené. Budu v dalším užívati těchto stručných označení: $X(a, b, c)$ značí, že bod X má projektivní homogenní souřadnice a, b, c; XYZ značí, že body X, Y, Z leží v přímce. Přímky $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$ procházejí týmž bodem;[8]) tento bod vezmeme za bod souřadnicový $O_1(1, 0, 0)$. Dále budiž $B_1(0, 1, 0)$, $D_1(0, 0, 1)$, $C_1(1, 1, 1)$. Pak je $B_2(y, 1, 0)$, kde y je nějaké nenulové číslo, $B_3(y', 1, 0)$, $D_2(z, 0, 1)$, $D_3(z', 0, 1)$, $C_2(u, 1, 1)$, $C_3(u', 1, 1)$, jak plyne z toho, že $B_1B_2B_3$ prochází bodem O_1, atd. Ježto je $A_1C_1D_1$ a $A_1C_2D_2$, obdrží se bod A_1 jako průsečík přímek C_1D_1 a C_2D_2; tak se dostane $A_1(z, z, 1 - z - u)$ a podobně $A_2(a, 1 - y - u, y)$, $A_3(0, z, -y)$. Z toho, že je $A_2B_3C_3$, $A_3B_3D_3$, $B_1C_2D_3$, $B_2C_3D_1$, $B_3C_1D_2$, plynou tyto rovnice mezi šesti čísly y, z, u, y', z', u':

$$uy' - u'y + y - y' = 0\,, \tag{1}$$
$$yz' - y'z = 0\,, \tag{2}$$
$$z' - u = 0\,, \tag{3}$$
$$u' - y = 0\,, \tag{4}$$
$$y' + z - 1 = 0\,. \tag{5}$$

Není třeba vyjadřovati, že je $A_1A_2A_3$, neboť to plyne z Desarguesovy věty o perspektivních trojúhelnících; že je $A_1C_3D_3$, to dává podmínku, která se dostane vyloučením y, y' z (1) a (2). Vyloučením y', z', u', u z napsaných rovnic se obdrží rovnice

$$(z - y)[z^2 + z(y - 2) + y^2 - y + 1] = 0\,, \tag{6}$$

jež má dvojí řešení:

I. $z = y$. Toto řešení dává, pro reálné y, body vesměs reálné, které tvoří, jak se snadno zjistí, konfiguraci Z. Toto řešení budu nazývati stručně řešením „reálným“.

II. $$z^2 + z(y - 2) + y^2 - y + 1 = 0\,.$$

Odtud plyne

$$z = 1 + \alpha y\,,$$

kde α je imaginární třetí odmocnina z jedné. Toto řešení budu označovati jako „imaginární“. Konfigurační body jsou v tomto případě:

---

[8]) Viz práci uvedenou v pozn. [6]), str. 333.

$A_1(1+\alpha y, 1+\alpha y, 1-\alpha^2-y)$, $A_2(y, -\alpha^2-\alpha y, y)$, $A_3(0, 1+\alpha y, -y)$,
$B_1(0, 1, 0)$, $B_2(y, 1, 0)$, $B_3(-\alpha y, 1, 0)$,
$C_1(1, 1, 1)$, $C_2(-\alpha-\alpha^2 y, 1, 1)$, $C_3(y, 1, 1)$,
$D_1(0, 0, 1)$, $D_2(1+\alpha y, 0, 1)$, $D_3(-\alpha-\alpha^2 y, 0, 1)$.

Snadno se zjistí, že tyto body splňují incidenční tabulku, zároveň však, že není $B_1C_3D_2$, $B_2C_1D_3$, $B_2C_1D_3$. Z toho plyne, že tato konfigurace neleží na kubické křivce a je to první známá konfigurace této vlastnosti. Zde tedy se nevyskytují, jako je tomu v konfiguraci Z, spojnice trojic konfiguračních bodů, které nenáleží do konfigurace, což vyjádříme stručně obratem, že tato konfigurace neobsahuje přímky cizí (konfiguraci). Naproti tomu však obsahuje cizí bod; zjistí se totiž snadno, že přímky $B_1C_2D_3$, $B_2C_3D_1$, $B_3C_1D_2$ se protínají na přímce $A_1A_2A_3$, tímto průsečíkem tedy procházejí čtyři konfigurační přímky, avšak tento bod ke konfiguraci nenáleží.

Lze také snadno zjistiti, že v žádné z obou konfigurací zde uvažovaných neexistuje čtveřina bodů navzájem oddělených, kdežto v konfiguracích $(12_4, 16_3)$ dosud známých se vyskytuje vždy alespoň jedna taková čtveřina. Tabulka také ukazuje, že konfigurace má tři body takové, že tři body od každého z nich oddělené leží vždy v přímce, avšak tři body oddělené od každého dalšího bodu tvoří takové tři dvojice, že jedna se skládá z bodů navzájem oddělených, zbývající dvě z bodů navzájem spojených.

Konfigurace Z se vyznačuje určitými perspektivními vlastnostmi, jež jsou uvedeny v práci zmíněné v pozn. [6]). Tytéž vlastnosti má ovšem také konfigurace v případě řešení imaginárního. Avšak v tomto případě vyskytují se ještě další takové vlastnosti, jak uvedu bez důkazu.[9]) Abych se mohl stručně vyjadřovati, zavedu pro tři trojúhelníky pojem stejnorodé perspektivnosti takto: Jsou-li tři trojúhelníky po dvou perspektivní, při čemž tyto tři perspektivnosti mají týž střed a touž osu, budu tyto tři trojúhelníky nazývati stejnorodě perspektivními. I platí především věta:

Existují skupiny devíti bodů takové vlastnosti, že je lze třemi různými způsoby rozděliti vždy ve tři trojúhelníky, které jsou stejnorodě perspektivní a to tak, že společný střed a společná osa jsou ve všech třech případech tytéž. Devět bodů této vlastnosti leží po třech na třech přímkách svazku a vyhovují mimo to ještě dalším čtyřem podmínkám. Je-li rozdělení možné dvěma způsoby, je možné vždy ještě třetím.

Tyto zvláštní skupiny devíti bodů nemohou býti reálné.

Konfigurace daná tabulkou 1 v imaginárním případu souvisí pak se skupinami toho druhu podle této věty:

---

[9]) Důkaz nalezne čtenář v pojednání téhož titulu, německy psaném, které je otištěno ve 3. čísle letošního ročníku (1954) mezinárodního matematického žurnálu vydávaného Čsl. akademií věd. Tam nalezne i jiné podrobnosti v této české versi vynechané.

Konfigurace daná tabulkou 1 v imaginárním případě obsahuje tři body A_1, A_2, A_3 ležící v přímce a dalších devět bodů, které lze rozděliti trojím způsobem na trojici trojúhelníků stejnorodě perspektivních, při čemž společný střed a společná osa jsou ve všech třech případech tytéž, avšak jeden způsob rozdělení je v tom smyslu singulární, že příslušné trojúhelníky se redukují na trojice bodů ležících v přímce. Body A_1, A_2, A_3 jsou průsečíky sobě odpovídajících stran trojúhelníků jedné z uvedených trojic; v singulárním případu se protínají tři přímky nahrazující trojúhelníky v témže bodě přímky $A_1A_3A_3$.

Konfigurace Z jakož i imaginární případ s ní souvisící jsou příklady konfigurací, které se liší od konfigurací dotud známých tím, že obsahují body (a to tři), pro které trojice bodů od nich oddělených leží vždy v konfigurační přímce. Tyto konfigurace však nejsou „čisté", protože první z nich obsahuje tři cizí přímky, druhá cizí bod. Pokusil jsem se proto sestrojiti konfiguraci, která by neměla tuto závadu, avšak měla uvedenou význačnou vlastnost. To se mi podařilo a příslušná konfigurace je definována incidenční tabulkou (obr. 2). Lze ji, jak v dalším ukáži, realisovati geometricky reálně. Podle tabulky je

1	×	×	×	×												
2	×				×	×	×									
3	×							×	×	×						
4		×			×			×			×					
5			×			×		×				×				
6			×		×				×				×			
7						×					×			×		×
8							×			×			×	×		
9									×			×		×	×	
10				×						×	×				×	
11		×											×		×	×
12				×			×					×				×

Obr. 2.

bod *1* oddělen od bodů *7 8 9*,
bod *2* oddělen od bodů *9 10 11*,
bod *3* oddělen od bodů *11 12 7*,
bod *4* oddělen od bodů *8 9 12*,
bod *5* oddělen od bodů *8 10 11*,
bod *6* oddělen od bodů *7 10 12*,
bod *7* oddělen od bodů *1 3 6*,
bod *8* oddělen od bodů *1 4 5*,
bod *9* oddělen od bodů *1 2 4*,
bod *10* oddělen od bodů *2 5 6*,
bod *11* oddělen od bodů *2 3 5*,
bod *12* oddělen od bodů *3 4 6*.

Pro body *1, 2, 3* leží body od nich oddělené vždy v přímce. Body oddělené od každého z ostatních devíti bodů jsou spojeny v trojúhelníku, t. j. každé dva jsou spojeny, aniž leží všechny v přímce.

Snadno lze zjistiti, že body této konfigurace neleží na kubické křivce, v čemž se tato konfigurace shoduje s imaginárním případem konfigurace předchozí.

Abychom tuto konfiguraci propočítali, zvolíme soustavu souřadnicovou takto:

$$7(1, 0, 0), 9(0, 1, 0), 11(0, 0, 1), 4(1, 1, 1) .$$

Pak ze *7 8 9* plyne $8(y, 1, 0)$, ze *9 10 11* a *4 7 10* plyne $10(0, 1, 1)$, ze *7 11 12* plyne $12(u, 0, 1)$, z *1 4 11* plyne $1(1, 1, z)$, ze *6 8 11* plyne $6(y, 1, v)$, ze *5 9 12* plyne $5(u, t, 1)$, ze *2 5 7* plyne $2(w, t, 1)$, ze *3 6 9* plyne $3(y, x, v)$. Koincidence *1 10 12, 1 2 3, 1 5 6, 2 4 6, 2 8 12, 3 4 5, 3 8 10* vedou pak k těmto vztahům:

$$\begin{aligned}
&1 + u - uz &&= 0\,, &(1)\\
&tv + y + wxz - tyz - x - vw &&= 0\,, &(2)\\
&tv + y + uz - tyz - 1 - uv &&= 0\,, &(3)\\
&vw + ty + 1 - y - w - tv &&= 0\,, &(4)\\
&w - u - ty &&= 0\,, &(5)\\
&y + ux + tv - uv - ty - x &&= 0\,, &(6)\\
&1 + v - x &&= 0\,. &(7)
\end{aligned}$$

Jestliže ze (7), (5), (1) dosadíme za x, w, uz do rovnice (2), dostaneme po krátkém výpočtu

$$(u + y)(tv + u) = 0\,. \tag{8}$$

První výraz v závorce nemůže býti roven nule, neboť v tom případě by bod *8* ležel na přímce *1 10 12*, což je nepřípustno. Platí tedy jen řešení

$$tv + u = 0\,. \tag{9}$$

Dosadíme-li zase z rovnic (7), (5), (1) jako nahoře a mimo to z (9) do rovnic (3), (4), (6), dostaneme

$$\begin{aligned}
&uy + vy + y - uv^2 &&= 0\,, &(3')\\
&uy - uv - 1 + y &&= 0\,, &(4')\\
&uy + vy - v - v^2 &&= 0\,. &(6')
\end{aligned}$$

Vyloučení v z rovnic (3′) a (4′) a z rovnic (4′) a (6′) vede k rovnicím

$$\begin{aligned}
uy^2(u + 1) - y(u^2 + 3u + 1) + 1 &= 0\,, &(10)\\
y^2(u + 1) + y(-u^3 + u^2 - 2) - u + 1 &= 0\,. &(11)
\end{aligned}$$

Násobíme rovnici (10) výrazem $(u - 1)$, rovnici (14) výrazem $(u + 1)$ a obě sečteme; po snadné úpravě dostaneme

$$(y - u)[uy(u^2 + u - 1) + y + u - 1] = 0\,. \tag{12}$$

I. První řešení

$$y = u$$

dosazeno do (10) dá výsledek

$$(u + 1)(u^3 - u^2 - 2u + 1) = 0\,.$$

Je pak $u \neq -1$; neboť jinak by bylo $z = 0$ a bod *1* by ležel na přímce *7 8 9*. Zbývá tedy přípustné řešení

$$u^3 - u^2 - 2u + 1 = 0\,. \tag{13}$$

Tato rovnice má tři reálné kořeny, po jednom v intervalech

$$(-2, -1),\ (0, 1),\ (1, 2)\,.$$

Každý z nich, jak uvidíme v dalším, vede k reálné konfiguraci vyhovující tabulce 2.

II. Druhé řešení

$$uy(u^2 + u - 1) + y + u - 1 = 0$$

přičtené k rovnici (11) dává

$$y(u + 1)(y + 2u - 1) = 0\,.$$

Je však $y \neq 0$, neboť jinak by body *8*, *9* splynuly; ježto také $u + 1 \neq 0$, zbývá řešení

$$y = 1 - 2u\,,$$

což dosazeno do (10) dává, po vyloučení nepřípustného kořene $u = 0$,

$$2u^2 + u + 1 = 0\,. \tag{14}$$

Tato rovnice má kořeny imaginární a může tedy vésti jen ke konfiguraci imaginární.

Obrátíme se nejprve k řešení reálnému. Z hořejších rovnic plyne pro $y = u$: $t = 1 - u$, $x = u^2$, $w = u(2 - u)$, $z = (1 + u) : u$ (při odvozování těchto výsledků je třeba také přihlédnouti k rovnici (13)). Odtud plynou souřadnice bodů konfigurace:

$$\mathit{1}(u, u, u + 1),\ \mathit{2}[u(2 - u), 1 - u, 1],\ \mathit{3}(u, u^2, u^2 - 1),\ \mathit{4}(1, 1, 1),$$
$$\mathit{5}(u, 1 - u, 1), \mathit{6}(u, 1, u^2 - 1), \mathit{7}(1, 0, 0), \mathit{8}(u, 1, 0),$$
$$\mathit{9}(0, 1, 0), \mathit{10}(0, 1, 1), \mathit{11}(0, 0, 1), \mathit{12}(u, 0, 1)\,.$$

Rovnice konfiguračních přímek pak jsou:

1 2 3	$x_1\, u(u + 1) - x_2 + x_3(1 - 2u) = 0\,,$
1 4 11	$x_1 - x_2 = 0\,,$
1 5 6	$x_1(u^2 - 1) + ux_2 + x_3(1 - 2u) = 0\,,$
1 10 12	$x_1 + ux_2 - ux_3 = 0\,,$
2 4 6	$x_1 + x_2\, u(u - 2) - x_3(u - 1)^2 = 0\,,$
2 5 7	$x_2 + x_3(u - 1) = 0\,,$
2 8 12	$x_1 - ux_2 - ux_3 = 0\,,$

3 4 5	$ux_1 + x_2(u - 1) + x_3(1 - 2u)$	$= 0$,
3 8 10	$x_1 - ux_2 + ux_3$	$= 0$,
3 6 9	$x_1 - x_3(u - 1)$	$= 0$,
4 7 10	$x_2 - x_3$	$= 0$,
5 9 12	$x_1 - ux_3$	$= 0$,
6 8 11	$x_1 - ux_2$	$= 0$,
7 8 9	x_3	$= 0$,
9 10 11	x_1	$= 0$,
7 11 12	x_2	$= 0$.

S výjimkou bodů *2, 3, 6* jsou souřadnice bodů konfigurace lineární v u; pokládáme-li u za parametr, znamená to, že příslušný bod leží v přímce. To nepřekvapuje u bodu *1*, který leží na přímce *4, 11*, a u bodů *8, 12*, které leží vždy na jedné ose souřadnic. Překvapuje to u bodu *5*. Při proměnném u se pohybuje tento bod na přímce

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0\,, \tag{15}$$

čehož lze užíti při konstrukci konfigurace.

Také mezi přímkami konfigurace jsou takové, jichž rovnice obsahují u lineárně, což tedy při proměnném u znamená, že příslušná přímka náleží do svazku. To je samozřejmé u přímek *1 10 12, 2 5 7, 3 8 10, 3 6 9, 5 9 12, 6 8 11*, překvapuje to u přímky

$$2\ 8\ 12 \qquad x_1 - ux_2 - ux_3 = 0\,.$$

Tato přímka prochází pevným bodem (0, 1, —1), čehož lze rovněž užíti při konstrukci konfigurace.

Z předchozí tabulky rovnic konfiguračních přímek ještě vysvítá, že přímky *5 9 12, 6 8 11, 4 7 10* procházejí týmž bodem o souřadnicích u, 1, 1.

Z tabulek bodů a přímek vysvítá také, že všechny obdržené body jsou navzájem různé a že žádné čtyři neleží v přímce, konečně, že neexistuje, mimo přímky konfigurační, další přímka, která by obsahovala tři body konfigurace. Zcela obdobné úvahy platí pro konfigurační přímky, takže tím je jednak dokázána existence konfigurace, jednak je dokázáno, že neobsahuje ani cizích přímek, ani cizích bodů.

To ostatně vysvítá i z obr. 3, kde je konfigurace sestrojena a sice pro kořen rovnice (13) ležící v intervalu (1, 2). Jeho hodnota, určená přesně na setiny, je

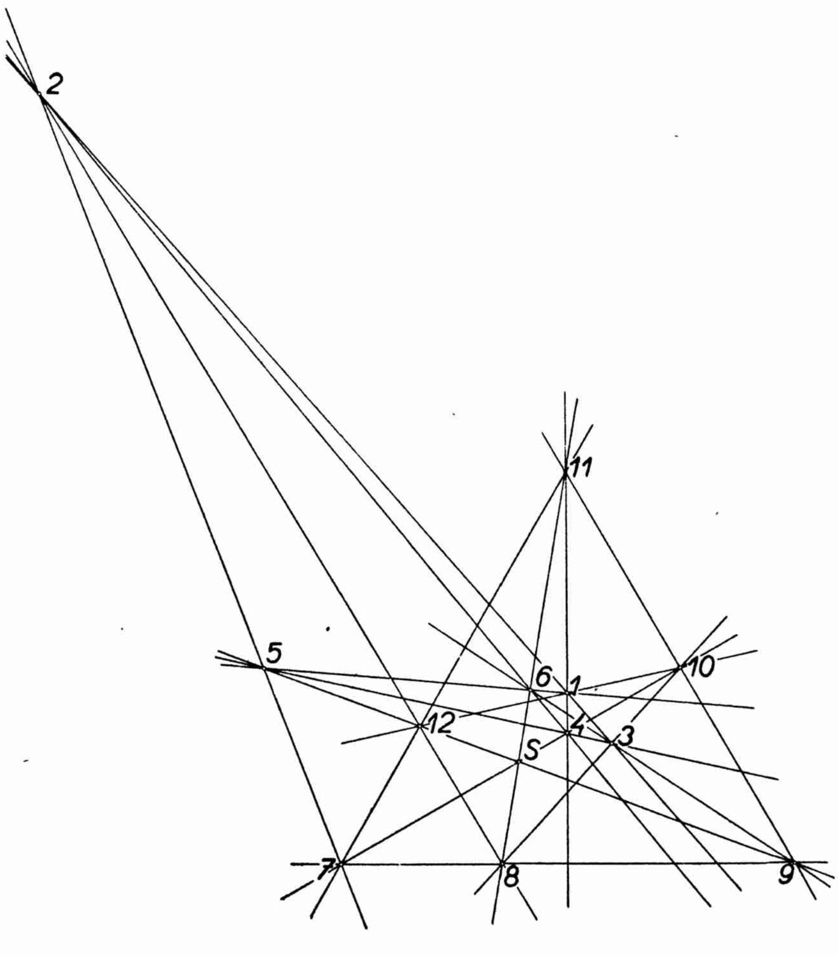
$$u = 1{,}80\,.$$

Konfigurace je určena body *7, 9, 11, 4*, ovšem trojznačně. Těmito body je určena (trojznačně) hodnota u a když u zvolíme, jsou tím určeny všechny ostatní body. V obr. je trojúhelník *7 9 11* vzat za rovnostranný s délkou strany rovnou desíti jednotkám, bod *4* je jeho střed. Když se nanese na *7 9* bod *8*, daný svými souřadnicemi, děje se další doplňování pouhým pravítkem.

Imaginární řešení incidenční tabulky 2 se obdrží, když se položí

$$y = 1 - 2u\,,$$

kde u vyhovuje rovnici (14). Užitím této rovnice se snadno zjistí, že body konfigurace jsou tyto:



Obr. 3.

$$1(1, 1, -2u),\ 2(2(u+1), u+1, 2),\ 3(2u-1, 2u, 2u+1),\ 4(1, 1, 1),$$
$$5(2u, u+1, 2),\ 6(2u-1, -1, 2u+1),\ 7(1, 0, 0),\ 8(2u-1, -1, 0)\,,$$
$$9(0, 1, 0),\ 10(0, 1, 1),\ 11(0, 0, 1),\ 12(u, 0, 1)\,,$$

kde u je kořen rovnice (14). Rovnice konfiguračních přímek jsou pak:

1 2 3	$x_1 - x_2(2u - 1) - x_3$	$= 0$,
1 4 11	$x_1 - x_2$	$= 0$,
1 5 6	$ux_1 - x_2 + x_3(u + 1)$	$= 0$,
1 10 12	$x_1(2u + 1) - x_2 + x_3$	$= 0$,
2 4 6	$x_1(u + 1) - x_2 - ux_3$	$= 0$,
2 5 7	$2x_2 - x_3(u + 1)$	$= 0$,
2 8 12	$x_1 + x_2(2u - 1) - ux_3$	$= 0$,
3 4 5	$x_1 - 2x_2 + x_3$	$= 0$,
3 8 10	$x_1 + x_2(2u - 1) - x_3(2u - 1)$	$= 0$,
3 6 9	$x_1 - x_3(2u + 1)$	$= 0$,
4 7 10	$x_2 - x_3$	$= 0$,
5 9 12	$x_1 - ux_3$	$= 0$,
6 8 11	$x_1 + x_2(2u - 1)$	$= 0$,
7 8 9	x_3	$= 0$,
9 10 11	x_1	$= 0$,
11 12 7	x_2	$= 0$.

Jako v případě reálném lze dokázati, že konfigurace neobsahuje ani cizích přímek ani cizích bodů.

Jak ukazují dosavadní práce o konfiguracích $(12_4, 16_3)$, lze zkusmo nacházeti nové konfigurace, bylo by však záhodno, kdyby se podařilo nalézti pořádací princip, který by usnadnil přehled o celé této věci. Po této stránce je důležito povšimnouti si některých pozorování: některé z uvažovaných konfigurací jsou určeny jednoznačně incidenční tabulkou, jiné nikoliv. Existují konfigurace, jejichž body leží na kubické křivce a zase takové, které tuto vlastnost nemají. Některé z dosavad známých konfigurací jsou určeny pěti svými body, kdežto konfigurace posléze studovaná je určena již čtyřmi body. Konfigurace dříve známé mají alespoň jednu čtveřinu bodů navzájem oddělených; konfigurace studované v tomto článku nemají žádnou takovou čtveřinu. Tato a podobná pozorování by mohla vésti k nalezení pořádacího principu výše naznačeného.