ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

1

79

ČSAV

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 79 • Č. 1 • STR. 1—100 • PRAHA 31. III. 1954

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky")

SVAZEK 79 (1954)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Obsah:

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV
SVAZEK 79 * PRAHA, 31. III. 1954 * ČÍSLO 1

ČLÁNKY

NOVÉ ÚKOLY

Časopis pro pěstování matematiky začíná svůj 79. ročník. Při této příležitosti se zamýšlíme nad tím, jaké úkoly má matematika u nás dnes a co z toho vyplývá pro náš časopis. ČSAV vydává mimo tento časopis ještě mezinárodní Чехословацкий математический журнал-Czechoslovak mathematical journal. Každý z obou časopisů má své speciální úkoly. Co chceme od českého matematického časopisu, který na rozdíl od mezinárodního je určen skoro výhradně pro čtenáře naší matematické obce?

Všichni u nás v republice jsme uprostřed velké budovatelské práce. Každý přispívá k budování svým dílem. Proto musí také matematika pomáhat co nejvíce výstavbě státu, a to zejména tam, kde nové methody moderní matematiky mohou přinést větší užitek než methody matematiky minulých století. Z toho plyne, že se musíme snažit klást do popředí problematiku aplikací matematiky.

Přáli bychom si, aby všichni, pro něž matematika je v praxi základní pomocnou vědou, inženýři výzkumníci, matematikové v podnicích a j. nejen do časopisu přispívali, ale aby se jim časopis stal účinnou pomůckou při práci.

Proto budeme uveřejňovat také články, kde jest otevřená problematika, kde nejsou všechny části přesně a úplně dokázány, ale které přinášejí něco nového, nebo které mohou pomoci čtenářům. Budou to také inženýrské methody, které vedou často v obvyklých jednoduchých případech rychle k cíli, a při tom není zřejmé, proč tomu tak jest. Připomeňme si zde případ GALERKINOVY methody. Galerkin byl inženýrem a navrhl tuto methodu již v roce 1915. Její účinnost byla prakticky vyzkoušena mnohokráte, ale teprve v posledních letech byly provedeny její základní konvergenční důkazy.

Aby se matematický časopis stal účinným pomocníkem v práci čtenářů, budeme ve větší míře než dosud uveřejňovat souborné referáty, seznamující čtenáře šíře s partiemi moderní matematiky, zejména s těmi, které jsou nejdůležitější pro aplikace, a ovšem v prvé řadě s těmi obory, které se u nás pěstují.

V minulých letech jsme se věnovali v dostatečné míře ideologickým, pedagogickým a jiným otázkám; i v tomto směru budeme pokračovat, poněvadž nechceme, aby náš časopis byl jen pro ty, kteří matematiky užívají v praxi, v průmyslu, ve výzkumu výrobních sektorů, nýbrž chceme, aby byl i pro širokou obec učitelů matematiky na našich školách všech stupňů.

Chceme, aby náš časopis platně pomáhal všem, kteří u nás pěstují matematiku. Proto budeme také uveřejňovat rubriku, kde budou některé matematické dotazy čtenářů, neboť se často stává, že o problému, který někdo řeší, ví něco druhý, případně ví něco o příslušné literatuře. Nechceme, aby z rubriky vznikl odstavec neřešených problémů, ale snažíme se tak hledat účinný spojovací článek se čtenáři.

Konečně bychom si přáli, aby se časopis stal spojovacím prvkem mezi všemi, kteří u nás pěstují matematiku. Proto chceme uveřejňovat zprávy o matematickém životě v Praze, v Bratislavě, v Brně a v ostatních krajích naší republiky.

Při úvaze nad plánem nového ročníku časopisu si klademe velké cíle, kterých však můžeme dosáhnout za předpokladu, že všichni, kteří pěstují matematiku, budou s námi úzce spolupracovat, budou nám psát o svých problémech a o matematickém životě.

Všichni členové redakční rady si uvědomují svou odpovědnost a jsou si vědomi, že bez pomoci a věcné kritiky široké čtenářské obce by nemohli naprosto splnit úkoly, které si kladou.

A proto se dnes obracíme k čtenářům s prosbou o připomínky k uvedeným úkolům a o spolupráci v novém ročníku.

Redakce

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 79 (1954)

VRCHOLY JEDNOTKOVÉ KOULE V PROSTORU FUNKCIONÁL NA DANÉM POLOUSPOŘÁDANÉM PROSTORU

JAN MAŘÍK, Praha.

(Došlo 16. ledna 1953.) DT 519.4

Hlavním výsledkem této práce je věta 82, z níž lze pak odvodit jednak věty, které dokazují *Kakutani* a *Bohnenblust* v [2] a [3] o representaci (M)-prostorů, jednak *Hewittovu* větu z [4] o homomorfismech okruhu všech spojitých funkcí na daném topologickém prostoru. Věta 92 pak říká, že pro (L)-prostory platí tvrzení obdobné výsledku, který je v [3] uveden pro (M)-prostory.

ÚVOD

Zatím co Kantorovič, Vulich a Pinsker vyšetřují ve své knize [1] většinou t. zv. K-prostory, budeme si všímat obecnějších prostorů, a to K-lineálů (název je převzat také z [1]). K-lineálem rozumíme, zhruba řečeno, „lineární svaz"; K-prostor by se podobně dal charakterisovat slovy „úplný lineární svaz". Budeme se zabývat zejména normovanými K-lineály a mimo to K-lineály, které jsou zároveň okruhy — tak zvanými K-okruhy. Budeme ovšem předpokládat, že mezi normou (resp. okruhovým násobením) a polouspořádáním platí jisté vztahy.

V K-lineálu lze přirozeným způsobem definovat pojem nezáporné funkcionály; rozdíl dvou nezáporných funkcionál se nazývá regulární funkcionálou. Množina všech regulárních funkcionál na daném K-lineálu tvoří opět K-lineál (dokonce K-prostor). Je-li původní K-lineál normovaný, tvoří množina všech funkcionál, které jsou při této normě spojité, opět K-lineál; ten je vždy částí K-lineálu všech regulárních funkcionál. Je-li původní K-lineál K-okruhem, lze normovat celou množinu regulárních funkcionál.

Naznačíme nyní hlavní výsledky tohoto článku. *Vrcholem* množiny (která je částí nějakého lineárního prostoru) nazveme takový její bod, který není vnitřním bodem žádné úsečky, obsažené v této množině. *Multiplikativní funkcionálou* nazveme regulární funkcionálu f na K-lineálu Y takovou, že $f(a) . f(b) = 0$, kdykoli a, b jsou prvky Y takové, že $a \wedge b = 0$. (Symboly $\vee$, $\wedge$ značí svazové operace v Y). Pak platí:

a) *Buď Y normovaný K-lineál, kde pro libovolné nezáporné prvky x, y je* $\|x \vee y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$. *Pak vrcholy jednotkové koule v prostoru všech spojitých funkcionál na Y jsou právě všechny (spojité) multiplikativní funkcionály s normou* 1.

b) *Je-li Y K-okruh, jsou vrcholy jednotkové koule v prostoru všech regulárních funkcionál právě všechny regulární funkcionály tvaru $\pm h$, kde h je okruhový homomorfismus; kladnými vrcholy jsou právě všechny okruhové homomorfismy, které jsou regulárními funkcionálami.* (Zmínili jsme se, že v prostoru všech regulárních funkcionál na K-okruhu lze definovat normu.)

Věty a) i b) jsou důsledky věty 82 této práce. Použijeme-li dále věty a) a důkazu první věty z [5], dostaneme snadno KAKUTANIHO větu z [2] o representaci (M)-prostorů (v našem označení M-lineálů; viz větu 91 a poznámku k větě 92). Podobného postupu používají též BOHNENBLUST a KAKUTANI v [3] a dokazují zároveň, že předpoklad $x \wedge y \geqq 0 \Rightarrow \|x \vee y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ plyne již ze slabšího předpokladu $x \wedge y = 0 \Rightarrow \|x \vee y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$. Věta 92 této práce říká, že také ze vztahu $x \wedge y = 0 \Rightarrow \|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ plyne $x \wedge y \geqq 0 \Rightarrow \|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. (Symbol $\|x\|$ značí ovšem normu prvku $x \in Y$, kde Y je nějaký normovaný K-lineál.)

Věta b) je pak zřejmým zobecněním věty, kterou uvádí HEWITT ve své práci [4] na str. 184. Hewitt vyslovuje tuto větu pro případ, že daný K-okruh je množina všech spojitých funkcí na daném úplně regulárním topologickém prostoru. (Hewittův důkaz je však nejasný a patrně chybný.) Je-li daný K-okruh množina všech omezených spojitých funkcí na úplně regulárním prostoru, je — jak lze očekávat — množina všech kladných vrcholů jednotkové koule v prostoru všech regulárních funkcionál (to jsou v tomto případě všechna okruhově homomorfní zobrazení na těleso reálných čísel) ve slabé topologii homeomorfní s β-obalem základního topologického prostoru.

Polouspořádané prostory a jejich representace.

1. Množinu Y nazveme *K-lineálem*, má-li tyto vlastnosti:

K 1) Y je reálný lineární prostor.[1])

K 2) Na množině Y je definována relace $\geqq$ (to znamená, že o každé uspořádané dvojici a, b prvků z Y je ustanoveno, zda platí $a \geqq b$ či ne) tak, že platí

K 3) $a \in Y \Rightarrow a \geqq a$,

K 4) $a, b \in Y,\ a \geqq b,\ b \geqq a \Rightarrow a = b$,

K 5) $a, b \in Y,\ a \geqq 0,\ b \geqq 0 \Rightarrow a + b \geqq 0$,

K 6) $\alpha \in E_1$ [2]), $\alpha \geqq 0,\ a \in Y,\ a \geqq 0 \Rightarrow \alpha a \geqq 0$,

K 7) $a, b, c \in Y,\ a \geqq b \Rightarrow a + c \geqq b + c$,

---

[1]) Slovy „lineární prostor" rozumíme to, čemu *Katětov* v [6], def. 1.1, říká „vektorový prostor".

[2]) E_1 značí množinu reálných čísel.

K 8) ke každému $a \in Y$ existuje prvek $a_+ \in Y$ takový, že platí $a_+ \geqq a$, $a_+ \geqq 0$ a že je $c \geqq a_+$, kdykoli $c \in Y$, $c \geqq a$, $c \geqq 0$.

Pro $a, b \in Y$, $a \geqq b$, $a \neq b$ píšeme $a > b$. Je-li tedy $a \geqq b$, je buď $a > b$ nebo $a = b$. Je-li naopak buď $a > b$ nebo $a = b$, je (v druhém případě podle K 3)) také $a \geqq b$. Značí tedy $a \geqq b$ opravdu totéž co ,,buď je $a > b$ nebo je $a = b$''.

Je-li $a > b$, plyne snadno z K 7), že je $a + c > b + c$ pro každé c.

Všimněme si, že podle K 4) nemůže platit zároveň $a \geqq b$, $b > a$ a že je $-b \geqq -a$ ($-b > -a$), kdykoli $a \geqq b$ ($a > b$).

,,$a > b$'' (,,$a \geqq b$'') čteme obyčejně jako ,,a je větší než b'' (,,a je větší nebo rovno b'').

Místo $a > b$ ($a \geqq b$) píšeme též $b < a$ ($b \leqq a$) a čteme to opět obvyklým způsobem.

Je-li $a > 0$, říkáme, že je a kladné. Význam slov ,,záporný'', ,,nezáporný'', ,,nekladný'' je jistě zřejmý.

Množinu $A \subset Y$ nazveme *shora omezenou*, existuje-li $b \in Y$ tak, že $a \in A \Rightarrow a \leqq b$. Existuje-li dokonce $b \in A$ tak, že $a \in A \Rightarrow a \leqq b$, řekneme, že b je největší prvek množiny A.

Jistě je zřejmé, co znamená ,,množina zdola omezená'', ,,množina omezená'', ,,nejmenší prvek množiny A'' a pod.

2. Nechť $a \geqq b$, $b \geqq c$. Z K 7), K 5) plyne $a - b \geqq 0$, $b - c \geqq 0$, $a - c = (a - b) + (b - c) \geqq 0$, tedy $a \geqq c$. Je-li $a \geqq 0$, $b > 0$, je podle K 5) $a + b \geqq 0$. Kdyby však bylo $a + b = 0$, bylo by $0 = a + b > a + 0 = a$, tedy $0 > a$ ve sporu s $a \geqq 0$; je tedy $a + b > 0$. Odtud opět snadno plyne

$$a \geqq b, \quad b > c \Rightarrow a > c .$$

Je-li $\alpha \in E_1$, $\alpha > 0$, $a \in Y$, $a > 0$, je $\alpha a \neq 0$, tedy $\alpha a > 0$ (kdyby bylo $\alpha a = 0$, měli bychom $0 = \alpha^{-1} . 0 = \alpha^{-1}(\alpha a) = 1 . a = a$).

3. Věta: *Buďte a, b prvky K-lineálu Y. Pak existuje právě jedno $s \in Y$, které má tyto vlastnosti:*

s 1) $s \geqq a$, $s \geqq b$,
s 2) $d \geqq a$, $d \geqq b \Rightarrow d \geqq s$.

Platí pak $s = a + (b - a)_+ = b + (a - b)_+$.

Důkaz: Položme $s_1 = a + (b - a)_+$. Protože $(b - a)_+ \geqq 0$, je $s_1 = a + (b - a)_+ \geqq a$. Dále je $s_1 - a = (b - a)_+ \geqq b - a$, tedy $s_1 \geqq b$. Buď nyní d takové, že $d \geqq a$, $d \geqq b$. Pak je $d - a \geqq 0$, $d - a \geqq b - a$, tedy $d - a \geqq (b - a)_+$, $d \geqq a + (b - a)_+ = s_1$. Prvek s_1 má tedy vlastnosti s 1), s 2); podobně zjistíme, že má tyto vlastnosti také prvek $s_2 = b + (a - b)_+$. Má-li nyní nějaký prvek s vlastnosti s 1), s 2), platí jednak $s \geqq s_1$, jednak $s_1 \geqq s$, tedy $s = s_1$; zejména je tedy $s_1 = s_2$.

4. Prvek $s = a + (b - a)_+$ nazveme *(svazovým) spojením* prvků a, b a označíme
$$s = a \vee b \ .$$

5. Věta: *Buďte a, b prvky K-lineálu Y. Pak existuje právě jedno $p \in Y$, které má tyto vlastnosti:*
p 1) $p \leqq a$, $p \leqq b$,
p 2) $d \leqq a$, $d \leqq b \Rightarrow d \leqq p$.
Platí pak $p = -((-a) \vee (-b))$.

Důkaz: Buď $q = (-a) \vee (-b)$. Pak $q \geqq -a$, $q \geqq -b$, tedy $-q \leqq a$, $-q \leqq b$. Je-li $d \leqq a$, $d \leqq b$, je $-d \geqq -a$, $-d \geqq -b$, tedy $-d \geqq q$, $d \leqq -q$. Prvek $-q$ tedy splňuje p 1) i p 2); zřejmě opět existuje jen jeden takový prvek.

6. Prvek $p = -((-a) \vee (-b))$ nazveme *(svazovým) průsekem* prvků a, b a označíme
$$p = a \wedge b \ .$$

7. Platí zřejmě $a_+ = a \vee 0$, $a \wedge b = -((-a) \vee (-b))$.

8. Věta: *Pro libovolné prvky $a, b, c \in Y$ platí*
$$a + (b \vee c) = (a + b) \vee (a + c) \ ,$$
$$a + (b \wedge c) = (a + b) \wedge (a + c) \ .$$

Důkaz: Platí $b \vee c \geqq b$, $b \vee c \geqq c$, tedy $a + (b \vee c) \geqq a + b$, $a + (b \vee c) \geqq$ $\geqq a + c$; jestliže $d \geqq a + b$, $d \geqq a + c$, je $d - a \geqq b$, $d - a \geqq c$, tedy $d - a \geqq b \vee c$, $d \geqq a + (b \vee c)$. Prvek $a + (b \vee c)$ má tedy vlastnosti s 1) i s 2). — Stejně se dokáže druhá rovnost.

9. Věta: *Pro libovolné prvky $a, b, c \in Y$ platí* $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge$ $\wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$.

Důkaz: Buď $s = (a \vee b) \vee c$. Pak $s \geqq a \vee b$, $s \geqq c$, tedy $s \geqq a$, $s \geqq b$, $s \geqq c$, tedy $s \geqq a$, $s \geqq b \vee c$. Je-li naopak $d \geqq a$, $d \geqq b \vee c$, je opět $d \geqq a$, $d \geqq b$, $d \geqq c$, tedy $d \geqq s$. Prvek s má tedy vlastnosti s 1), s 2). Druhý vztah se dokáže podobně; třetí a čtvrtý jsou zřejmé.

10. $a \leqq b \Rightarrow a \vee c \leqq b \vee c$, $a \wedge c \leqq b \wedge c$.
(Zřejmé.)

11. Prvek $a \vee b$ je tedy nejmenším z prvků, které jsou větší nebo rovny a a zároveň větší nebo rovny b; podobně lze charakterisovat prvek $(a \vee b) \vee c$, který nyní můžeme psát jako $a \vee b \vee c$. Obdobná poznámka platí i pro průsek.

12. Položme nyní pro libovolné $a \in Y$
$$a_- = (-a) \vee 0, \quad |a| = a_+ + a_- \ ;$$
pak platí
$$a_+ = a \vee 0 = a + (0 \vee (-a)) = a + a_- \ ,$$
tedy
$$a_+ - a_- = a \ .$$

Vidíme, že lze každý prvek vyjádřit jako rozdíl dvou nezáporných prvků.

Pro $p = a \wedge b$ platí $a + (b - p) \geqq a$, $a + b - p \geqq b$, tedy $a + b - p \geqq$ $\geqq a \vee b$, $a + b \geqq (a \wedge b) + (a \vee b)$. Podobně platí $-a - b \geqq ((-a) \wedge (-b)) +$ $+ ((-a) \vee (-b)) = -(a \vee b) - (a \wedge b)$, tedy $a + b \leqq (a \vee b) + (a \wedge b)$. Dostáváme tak

$$a + b = (a \vee b) + (a \wedge b) .$$

Dále je $a_+ + a_- = a \vee 0 + a_- = (a + a_-) \vee a_- = a_+ \vee a_-$, tedy

$$a_+ \wedge a_- = 0 .$$

13. Je-li $b \wedge c \geqq 0$, $a = b - c$, je zřejmě $b \geqq a_+$, tedy $b = a_+ + h$, kde $h \geqq 0$; pak je $c = a_- + h$. Zřejmě $h \leqq b \wedge c$. Je-li dokonce $b \wedge c = 0$, je tedy $h = 0$, $b = a_+$, $c = a_-$.

Pro libovolné prvky b, c platí

$$(b - (b \wedge c)) \wedge (c - (c \wedge b)) = (b + ((-b) \vee (-c))) \wedge (c + ((-c) \vee (-b))) =$$
$$= (0 \vee (b - c)) \wedge (0 \vee (c - b)) = ((b - c)_+) \wedge ((b - c)_-) = 0.$$

Je-li $b \wedge c = k$, $a = b - c$, je též $a = (b - k) - (c - k)$, kde $(b - k) \wedge$ $\wedge (c - k) = 0$, tedy

$$a_+ = b - k, \quad a_- = c - k .$$

14. Protože $a \wedge (-a) \leqq a_+ \wedge (a_-) = 0$, je

$$0 = a + (-a) = (a \vee (-a)) + (a \wedge (-a)) \leqq a \vee (-a) .$$

Platí tedy

$$a_+ + a_- = (a_+ \vee a_-) + (a_+ \wedge a_-) = a_+ \vee a_- = (a \vee 0) \vee ((-a) \vee 0) =$$
$$= a \vee (-a) \vee 0 = a \vee (-a) .$$

Dostáváme tak

$$|a| = a_+ + a_- = a \vee (-a) = a_+ \vee a_- .$$

15. Buď $c = a + b$. Je $\pm a \leqq |a|$, $\pm b \leqq |b|$, $\pm c = \pm (a + b) \leqq |a| +$ $+ |b|$, $|c| = c \vee (-c) \leqq |a| + |b|$, tedy

$$|a + b| \leqq |a| + |b| .$$

Všimněme si, že $a \geqq 0 \Leftrightarrow a_- = 0 \Leftrightarrow a = |a|$.

16. Věta: *Jestliže* $a_1 \wedge a_2 \geqq 0$, $0 \leqq b \leqq a_1 + a_2$, *pak existují* b_1, b_2 *tak, že platí* $0 \leqq b_i \leqq a_i$ $(i = 1, 2)$, $b_1 + b_2 = b$.

Důkaz: Buď $b_1 = b \wedge a_1$, $b_2 = b - b_1$. Pak je $b = b_1 + b_2$, $b_1 \geqq 0$, $b_2 \geqq 0$, $b_1 \leqq a_1$. Dále je $b_1 + a_2 = (b \wedge a_1) + a_2 = (b + a_2) \wedge (a_1 + a_2) \geqq b$, tedy $b_1 + a_2 \geqq b$, $a_2 \geqq b - b_1 = b_2$. Tím je vše dokázáno.

Poznámka. Buďte a, b, c nezáporné prvky. Položme $d = a \wedge (b + c)$. Protože $d \leqq b + c$, existují $e \geqq 0$, $f \geqq 0$ tak, že platí $e \leqq b$, $f \leqq c$, $e + f = d$. Pak je $e \leqq d \leqq a$, $f \leqq d \leqq a$, tedy $e \leqq a \wedge b$, $f \leqq a \wedge c$; odtud plyne

$$a \wedge (b + c) = d = e + f \leqq a \wedge b + a \wedge c .$$

Je-li zejména $a \wedge b = a \wedge c = 0$, je též $a \wedge (b + c) = 0$.

Platí-li $b = \sum_{i=1}^{m} b_i$, $c = \sum_{j=1}^{n} c_j$ a je-li $b_i \wedge c_j = 0$ pro všechna i, j, plyne z předešlého snadno, že je též $b \wedge c = 0$. Je-li pak $a = b - c$, je $b = a_+$, $c = a_-$.

17. Věta: *Buďte a, b libovolné prvky K-lineálu Y. Pak platí*

$$a_+ - b_+ \leqq (a - b)_+, \quad |a_+ - b_+| \leqq |a - b| .$$

Důkaz: Platí $a_+ \wedge (b + a_-) \leqq a_+ \wedge (b_+ + a_-) \leqq a_+ \wedge b_+ + a_+ \wedge a_- \leqq b_+$, tedy

$$a_+ - b_+ \leqq a_+ - (a_+ \wedge (b + a_-)) = (a + a_-) - ((a \wedge b) + a_-) = a - a \wedge b = \\ = (a - b)_+$$

(podle 13). Dále je $b_+ - a_+ \leqq (b - a)_+ = (a - b)_-$, tedy $|a_+ - b_+| = (a_+ - b_+) \vee (b_+ - a_+) \leqq ((a - b)_+) \vee ((a - b)_-) = |a - b|$.

18. Věta: *Nechť a, b, c ϵ Y. Pak platí*

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) ,$$
$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c) .$$

Důkaz: Napřed dokážeme, že platí

$$(a \wedge b)_+ = a_+ \wedge b_+ . \qquad (*)$$

Buď $d = a \wedge b$. Je $d \wedge 0 \leqq a \wedge 0$, $-d_- \leqq -a_-$, tedy

$$a = a_+ - a_- \geqq a_+ - d_- .$$

Podobně se dokáže vztah

$$b \geqq b_+ - d_-;$$

dostáváme tak

$$d = a \wedge b \geqq (a_+ - d_-) \wedge (b_+ - d_-) = (a_+ \wedge b_+) - d_-,$$

tedy

$$(a \wedge b)_+ = d_+ = d + d_- \geqq a_+ \wedge b_+ .$$

Protože však $a_+ \geqq d_+$, $b_+ \geqq d_+$, platí též $a_+ \wedge b_+ \geqq d_+ = (a \wedge b)_+$; odtud plyne (*).

Nyní je $(a \wedge b) \vee c = \{[(a - c) \wedge (b - c)] \vee 0\} + c = \{[(a - c) \vee 0] \wedge [(b - c) \vee 0]\} + c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$. Dále platí $(a \vee b) \wedge c = -\{[-(a \vee b)] \vee (-c)\} = -\{[(-a) \wedge (-b)] \vee (-c)\} = -\{[(-a) \vee (-c)] \wedge [(-b) \vee (-c)]\} = -\{[-(a \wedge c)] \wedge [-(b \wedge c)]\} = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

19. Věta: *Jestliže* $0 \leqq \alpha \in E_1$, $a, b \in Y$, *pak* $\alpha(a \vee b) = \alpha a \vee \alpha b$, $\alpha(a \wedge b) = \alpha a \wedge \alpha b$.

Důkaz: Zřejmě

$$\alpha(a \vee b) \geqq \alpha a \vee \alpha b .$$

Pro $\alpha = 0$ platí zde ovšem rovnost; pro $\alpha > 0$ platí také $\frac{1}{\alpha}(\alpha a \vee \alpha b) \geqq$
$\geqq \left(\frac{1}{\alpha} . \alpha a\right) \vee \left(\frac{1}{\alpha} . \alpha b\right) = a \vee b$, tedy

$$\alpha a \vee \alpha b \geqq \alpha(a \vee b) .$$

Odtud plyne

$$\alpha(a \vee b) = \alpha a \vee \alpha b .$$

Dosadíme-li sem $-a$, $-b$ za a, b, dostaneme

$$\alpha(a \wedge b) = \alpha a \wedge \alpha b .$$

Poznámka 1. Z této věty plyne zejména, že pro $\alpha \geqq 0$ platí vždy

$$(\alpha a)_+ = \alpha a \vee 0 = \alpha a \vee \alpha 0 = \alpha(a \vee 0) = \alpha a_+ ;$$

pro libovolné $\alpha \in E_1$ pak máme

$$|\alpha|\, |a| = |\alpha|\, (a \vee (-a)) = (|\alpha| a) \vee (|\alpha|\, (-a)) = (\alpha a) \vee (-\alpha a) = \\ = |\alpha a| .$$

Poznámka 2. Čtenář si jistě všiml, že jsme málokde použili toho, že Y je lineární prostor. Kdybychom místo K 1) (viz 1) předpokládali jen, že Y je Abelova grupa a kdybychom vynechali K 6), dostali bychom definici t. zv. K-grupy a většina dosavadních výsledků by zůstala v platnosti.

Je-li na nějaké množině definována transitivní relace $\geqq$, která splňuje podmínky K 3) a K 4), říká se této relaci polouspořádání a příslušná množina se nazývá *polouspořádanou*. Polouspořádaná množina, v níž ke každé dvojici a, b existují prvky s, p o vlastnostech s 1), s 2) a p 1), p 2) (viz 3 a 5), se nazývá *svaz*. K-lineál by se tedy mohl nazvat také „lineárním svazem".

Platí-li v nějakém svazu Y věta 18, nazývá se tento svaz *distributivním*. Vidíme, že je každý K-lineál (ba dokonce každá K-grupa) distributivním svazem.

20. Věta: *Budiž Y K-lineál. Nechť pro lineární prostor $Y_1 \subset Y$ platí*

1) $a \in Y_1 \Rightarrow a_+ \in Y_1$,

2) $0 \leqq a \leqq b, \quad a \in Y, \quad b \in Y_1 \Rightarrow a \in Y_1$.

Definujme v prostoru Y/Y_1 relaci $\geqq$ tímto předpisem: Jestliže $T, V \in Y/Y_1$, pak $T \geqq V$ znamená, že existuje $x \in T$ a $y \in V$ tak, že $x \geqq y$. Pak je Y/Y_1 K-lineál.

Důkaz: Zřejmě platí K 1), K 2), K 3), K 5), K 6), K 7). Máme dokázat, že platí také K 4) a K 8). Nechť tedy $T, V \in Y/Y_1$, $T \geqq V$, $V \geqq T$. Pak existují $x_i \in T$, $y_i \in V$ tak, že platí $x_1 \geqq y_1$, $y_2 \geqq x_2$. Protože $x_1 - x_2 \in Y_1$, $y_2 - y_1 \in Y_1$, platí též $x_1 - x_2 + y_2 - y_1 \in Y_1$. Protože však $0 \leqq x_1 - y_1 \leqq (x_1 - y_1) + (y_2 - x_2) = x_1 - x_2 + y_2 - y_1 \in Y_1$, platí podle 2) $x_1 - y_1 \in Y_1$, tedy $T = V$.

Zvolme nyní $T \in Y/Y_1$, $x, y \in T$. Pak je $x - y \in Y_1$. Podle 17 je $x_+ - y_+ \leqq \leqq (x - y)_+$; podle 1) platí tedy

$$0 \leqq (x_+ - y_+)_+ \leqq (x - y)_+ \in Y_1 \ .$$

Z 2) nyní plyne

$$(x_+ - y_+)_+ \in Y_1 \ .$$

Podobně je

$$(x_+ - y_+)_- = (y_+ - x_+)_+ \in Y_1 \ ,$$

tedy

$$x_+ - y_+ \in Y_1 \ .$$

Vidíme, že všechny prvky x_+ pro $x \in T$ padnou do téže třídy; označme ji T_+. Zřejmě $T_+ \geqq 0$, $T_+ \geqq T$. Jestliže $S \geqq 0$, $S \geqq T$, existují $s_1, s_2 \in S$, $t \in T$ tak, že $s_1 \geqq 0$, $s_2 \geqq t$. Protože $(s_1)_+ = s_1 \in S$, patří též $(s_2)_+$ do S a platí $(s_2)_+ \geqq \geqq t_+ \in T_+$; je tedy $S \geqq T_+$.

Tím je vše dokázáno.

21. *Archimedovským K-lineálem* nazveme K-lineál Y, kde pro žádné $a \neq 0$ není množina $\{a, 2a, 3a, \ldots\}$ omezená.

Poznámka. Jestliže množina $\{a, 2a, 3a, \ldots\}$ není (shora) omezená pro žádné $a > 0$, je již Y archimedovský K-lineál; je-li pak totiž $b \leqq na \leqq c$ pro $n = 1, 2, \ldots$, je $(na)_+ = n \,.\, a_+ \leqq c_+$ pro každé n, tedy $a_+ = 0$, podobně $a_- = 0$, $a = 0$.

22. *Kj-lineálem* nazveme archimedovský K-lineál Y, který obsahuje prvek j takový, že lze ke každému $a \in Y$ určit přirozené číslo n tak, že platí

$$a < nj \ .$$

Prvek j, který je zřejmě kladný, nazveme *jednotkou Kj*-lineálu Y.

Poznámka 1. Mohli bychom zřejmě definovat též pojem nearchimedovského Kj-lineálu. Je-li na př. T nějaké nearchimedovsky uspořádané nadtěleso tělesa reálných čísel a je-li Y okruh všech prvků z T, které leží mezi nějakými dvěma reálnými čísly, mohli bychom pokládat Y za nearchimedovský Kj-lineál, kde jednotkou je číslo 1. Protože však budeme dále mluvit jen o archimedovských Kj-lineálech, dali jsme raději slovo „archimedovský" přímo do definice.

Poznámka 2. Je-li j jednotka Kj-lineálu Y a je-li α kladné číslo, je αj zřejmě opět jednotkou. Každý Kj-lineál má tedy nekonečně mnoho jednotek.

23. Konečnou funkci f na lineárním prostoru Y nazveme *aditivní (homogenní)*, platí-li

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$
$$(\text{resp. } \alpha f(a) = f(\alpha a)) \ ,$$

kdykoli $a, b \in Y$, $\alpha \in E_1$.

Poznámka: Stejně lze definovat aditivní (homogenní) zobrazení lineárního prostoru Y do lineárního prostoru Y_1.

24. Konečnou aditivní funkci f na K-lineálu Y nazveme *nezápornou funkcionálou*, platí-li implikace

$$a \in Y,\ a \geqq 0 \Rightarrow f(a) \geqq 0 .$$

Poznámka. Všimněme si, že pro nezápornou funkcionálu f platí $a \leqq b \Rightarrow \Rightarrow f(a) \leqq f(b)$.

25. Věta: *Buď f nezáporná funkcionála na K-lineálu Y. Pak je f homogenní,*

Důkaz: Je $f(nb) = f(b) + \ldots + f(b) = n \,.\, f(b)$ pro každé přirozené n a každé $b \in Y$, tedy též

$$f(b) = f\left(n \,.\, \frac{b}{n}\right) = n \,.\, f\left(\frac{b}{n}\right),\quad f\left(\frac{b}{n}\right) = \frac{1}{n} \,.\, f(b)$$

pro každé b a každé n. Jsou-li m, n přirozená čísla, $r = \frac{m}{n}$, je $f(rb) = f\left(m \,.\, \frac{b}{n}\right) = m \,.\, f\left(\frac{b}{n}\right) = m \,.\, \frac{1}{n} \,.\, f(b) = r \,.\, f(b)$; protože $-f(rb) = f((-r)b)$, platí $f(rb) = r \,.\, f(b)$ pro každé racionální r a každé $b \in Y$. Zvolme nyní α reálné, $0 < b \in Y$. Nechť r_n, s_n jsou racionální, $r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots, r_n \to \alpha$, $s_1 \geqq s_2 \geqq \ldots, s_n \to \alpha$. Pak platí $r_n b \leqq \alpha b \leqq s_n b$, tedy $f(r_n b) \leqq f(\alpha b) \leqq f(s_n b)$ pro každé n. Dále je $f(s_n b) - f(r_n b) = f((s_n - r_n)b) = (s_n - r_n) \,.\, f(b) \to 0$, tedy $f(r_n b) = r_n \,.\, f(b) \to f(\alpha b)$. Avšak $r_n \,.\, f(b) \to \alpha f(b)$, tedy $\alpha f(b) = f(\alpha b)$; totéž ovšem platí také pro $b \leqq 0$ a pro každé $\alpha \in E_1$. Pro libovolné $b \in Y$ je $f(\alpha b) = f(\alpha b_+ - \alpha b_-) = f(\alpha b_+) - f(\alpha b_-) = \alpha f(b_+) - \alpha f(b_-) = \alpha(f(b_+) - f(b_-)) = \alpha f(b_+ - b_-) = \alpha f(b)$.

26. Věta: *Budiž f konečná funkce, definovaná na množině všech nezáporných prvků z K-lineálu Y. Nechť platí*

$$f(a + b) = f(a) + f(b) ,$$

kdykoli $a, b \in Y$, $a \wedge b \geqq 0$.

Pak existuje právě jedna aditivní funkce f_1 na K-lineálu Y taková, že platí

$$f_1(a) = f(a)$$

pro každé $a \geqq 0$.

Důkaz: Položme $f_1(a) = f(a_+) - f(a_-)$ (jinou možnost zřejmě nemáme). Nechť $a, b \in Y$, $c = a + b$. Je $c_+ \leqq a_+ + b_+$, tedy $a_+ + b_+ = c_+ + h$, $a_- + b_- = c_- + h$, kde $h \geqq 0$. Pak platí

$$f(a_+) + f(b_+) = f(c_+) + f(h) ,$$
$$f(a_-) + f(b_-) = f(c_-) + f(h) ,$$

tedy

$$f_1(a) + f_1(b) = f(a_+) - f(a_-) + f(b_+) - f(b_-) = f(c_+) - f(c_-) = f_1(c) .$$

Pro $a \geqq 0$ je zřejmě $f_1(a) = f(a)$.

27. Věta: *Budiž f konečná aditivní funkce na K-lineálu Y. Položme pro každé $a \geqq 0$*

$$f_+(a) = \sup f(x), \quad kde\ 0 \leqq x \leqq a\ .$$

(Může být ovšem $f_+(a) = \infty$.) Pak platí

$$f_+(a + b) = f_+(a) + f_+(b)\ ,$$

kdykoli $a, b \in Y$, $a \wedge b \geqq 0$.

Důkaz: Nechť $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$; pak je $0 \leqq x + y \leqq a + b$, tedy

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leqq f_+(a + b)\ ,$$

tedy

$$f_+(a) + f_+(b) \leqq f_+(a + b)\ .$$

Buď naopak $0 \leqq z \leqq a + b$. Podle 16 existují a', b', $0 \leqq a' \leqq a$, $0 \leqq b' \leqq b$, $a' + b' = z$. Platí tedy

$$f(z) = f(a') + f(b') \leqq f_+(a) + f_+(b)\ ,$$

tedy též

$$f_+(a + b) \leqq f_+(a) + f_+(b)\ .$$

Poznámka. Zřejmě je $f(0) = 0$, $0 \leqq 0 \leqq a$ pro každé $a \geqq 0$; je tedy (pro $a \geqq 0$) vždy $f_+(a) \geqq 0$. Podobně zjistíme, že pro $a \geqq 0$ je $f_+(a) \geqq f(a)$.

28. Funkci f na K-lineálu Y nazveme *regulární funkcionálou*, je-li f rozdílem dvou nezáporných funkcionál. Symbolem

$$R(Y)$$

označíme množinu všech regulárních funkcionál na K-lineálu Y.

29. Věta: *Aditivní funkce f na K-lineálu Y je regulární funkcionálou, právě když je funkce f_+ (definovaná v 27) konečná.*

Důkaz: Buď $f = f_1 - f_2$, kde f_1, f_2 jsou nezáporné funkcionály. Je-li $0 \leqq x \leqq a$, je $f(x) = f_1(x) - f_2(x) \leqq f_1(x) \leqq f_1(a)$, tedy

$$0 \leqq f_+(a) \leqq f_1(a) < \infty\ .$$

Je-li naopak f aditivní a f_+ konečná funkce, můžeme podle 27 a 26 předpokládat, že je funkce f_+ definována na celém Y a že je aditivní. Podle poznámky k 27 je pak f_+ nezáporná funkcionála; rovněž $f_+ - f$ je nezáporná funkcionála a zřejmě platí

$$f = f_+ - (f_+ - f)\ .$$

30. Věta: *Buď Y K-lineál. Klademe-li pro $f_1, f_2 \in R(Y)$*

$$f_1 \geqq f_2\ ,$$

je-li $f_1 - f_2$ nezáporná funkcionála, je $R(Y)$ rovněž K-lineál.

Důkaz: $R(Y)$ je zřejmě lineární prostor. Rovněž je zřejmé, že platí K 2) — K 7). Ukážeme nyní, že platí i K 8). Nechť $f \in R(Y)$; utvořme funkci f_+ podle

27 a rozšiřme ji podle 26 na celé Y. Rozšířenou funkci označme opět f_+. Je $f_+ \geqq 0$, $f_+ - f \geqq 0$, tedy $f_+ \geqq f$. Je-li naopak $g \in R(Y)$, $g \geqq 0$, $g \geqq f$, platí pro každé $a \geqq 0$ $f_+(a) = \sup_{0 \leqq x \leqq a} f(x) \leqq \sup_{0 \leqq x \leqq a} g(x) = g(a)$, tedy je $g \geqq f_+$. Funkcionála f_+ tedy splňuje podmínku K 8).

31. Věta: *Nechť $f, g \in R(Y)$. Pak platí pro každé $a \geqq 0$*

$$(f \vee g)(a) = \sup\,(f(x) + g(y)),\ kde\ x \wedge y \geqq 0, x + y = a\ ,$$

$$(f \wedge g)(a) = \inf\,(f(x) + g(y)),\ kde\ x \wedge y \geqq 0, x + y = a\ ,$$

$$f_-(a) = \sup f(x),\ kde - a \leqq x \leqq 0,$$

$$|f|(a) = \sup f(x),\ kde\ |x| \leqq a\ .$$

Důkaz: Je $f \vee g = f + (g - f)_+$, tedy $(f \vee g)(a) = f(a) + \sup_{0 \leqq x \leqq a} (g - f)(x) = \sup_{0 \leqq x \leqq a} (f(a) + g(x) - f(x)) = \sup_{0 \leqq x \leqq a} (f(a - x) + g(x)) = \sup_{\substack{x \geqq 0,\, y \geqq 0 \\ x + y = a}} (g(x) + f(y))$. Tím je dokázán první vztah. Další z něho snadno plyne pomocí rovnosti $f \wedge g = -((-f) \vee (-g))$. Podobně dostaneme třetí vztah z rovnosti $f_- = (-f)_+$. Budiž nyní (pro $a \geqq 0$) $\varphi(a) = \sup_{|x| \leqq a} f(x)$. Je-li $|x| \leqq a$, označme $b = a - |x|$; pak je $(x_+ + \frac{1}{2}b) + (x_- + \frac{1}{2}b) = x_+ + x_- + b = a$, tedy $f(x) = f(x_+) - f(x_-) = f(x_+ + \frac{1}{2}b) - f(x_- + \frac{1}{2}b) \leqq \sup_{\substack{x \wedge y \geqq 0 \\ x + y = a}} (f(x) - f(y)) = (f \vee (-f))(a) = |f|(a)$, tedy

$$\varphi(a) \leqq |f|(a)\ . \tag{*}$$

Platí-li naopak $x \wedge y \geqq 0, x + y = a$, je zřejmě $-a \leqq -y \leqq x - y \leqq x \leqq a$, tedy $|x - y| \leqq a$. Odtud plyne $f(x) - f(y) = f(x - y) \leqq \varphi(a)$, takže máme též

$$|f|(a) = (f \vee (-f))\,(a) \leqq \varphi(a)\ .$$

Podle (*) platí nyní $|f|(a) = \varphi(a) = \sup_{|x| \leqq a} f(x)$.

Poznámka. Protože $|a| \leqq |a|, |-a| \leqq |a|$, je $\pm f(a) = f(\pm a) \leqq \sup_{|x| \leqq |a|} f(x) = |f|(|a|)$, tedy

$$|f(a)| \leqq |f|(|a|)\ .$$

32. Věta: *Buď Y K-lineál, $a \in Y$, $a \geqq 0$, $f \in R(Y)$, $f \geqq 0$. Pak existují $g, h \in R(Y)$ tak, že platí*

1) $g \wedge h = 0,\ g + h = f$,
2) $h(a) = f(a)$,
3) $x \wedge a = 0 \Rightarrow g(x) = f(x)$.

Důkaz: Pro $c \geqq 0$ buď $g(c) = \sup f(x)$, kde $0 \leqq x \leqq c$, $x \wedge a = 0$; pro libovolné c buď $g(c) = g(c_+) - g(c_-)$.

Dokážeme napřed, že je g nezápornou funkcionálou. Zřejmě $c \geqq 0 \Rightarrow g(c) \geqq 0$; podle 26 stačí tedy dokázat, že $c \wedge d \geqq 0 \Rightarrow g(c + d) = g(c) + g(d)$. Nechť tedy $c \wedge d \geqq 0$. Zvolme x, y, $0 \leqq x \leqq c$, $0 \leqq y \leqq d$, $x \wedge a = y \wedge$

$\wedge a = 0$. Pak je $0 \leqq x + y \leqq c + d$; podle 16 je též $(x + y) \wedge a = 0$, tedy $f(x) + f(y) = f(x + y) \leqq g(c + d)$, $g(c) + g(d) \leqq g(c + d)$.

Zvolme naopak z, $0 \leqq z \leqq c + d$, $z \wedge a = 0$. Podle 16 existují z_1, z_2 tak, že platí $0 \leqq z_1 \leqq c$, $0 \leqq z_2 \leqq d$, $z_1 + z_2 = z$. Tím spíše je $z_i \wedge a = 0$, tedy $f(z) = f(z_1) + f(z_2) \leqq g(c) + g(d)$, $g(c + d) \leqq g(c) + g(d)$.

Je tedy $g \in R(Y)$, $g \geqq 0$; zřejmě je pro $c > 0$ $g(c) \leqq f(c)$, tedy $g \leqq f$. Buď $h = f - g$; dokážeme, že je $g \wedge h = 0$. Zvolme tedy $c \in Y$, $c \geqq 0$ a dále číslo $\varepsilon > 0$. Pak existuje $x \in Y$ tak, že platí $0 \leqq x \leqq c$, $x \wedge a = 0$, $f(x) > g(c) - \varepsilon$. Avšak $f(x) = g(x)$, tedy $g(c - x) < \varepsilon$ a ovšem $h(x) = 0$. Pro $y = c - x$ tedy platí $y \wedge x \geqq 0$, $x + y = c$, $g(y) + h(x) < \varepsilon$; podle 31 je $g \wedge h \leqq 0$. Platí ovšem rovnost.

Vztahy 2) a 3) jsou zřejmé; tím je vše dokázáno.

33. Věta: *Buď Y K-lineál. Přiřaďme každému $a \in Y$ funkci F_a na množině $R(Y)$ předpisem $F_a(f) = f(a)$ pro každé $f \in R(Y)$.*

Pak platí $(a, b \in Y, \alpha \in E_1)$

1) $F_a \in R(R(Y))$,

2) $F_{\alpha a} = \alpha F_a$,

3) $F_{a+b} = F_a + F_b$,

4) $F_{a_+} = (F_a)_+$.

Důkaz: Vztahy 2) a 3) jsou zřejmé. Rovněž je zřejmé, že pro $a \geqq 0$ je F_a nezápornou funkcionálou na K-lineálu $R(Y)$; protože pro libovolné $a \in Y$ je $F_a = F_{a_+} - F_{a_-}$, je vždy $F_a \in R(R(Y))$. Stačí tedy dokázat 4). Pro $f \in R(Y)$, $v \geqq 0$ je $((F_a)_+)(f) = \sup_{0 \leqq \varphi \leqq f} F_a(\varphi) = \sup_{0 \leqq \varphi \leqq f} \varphi(a)$. Zvolme na okamžik pevně prvky $f \in Y$ a $f \in R(Y)$, $f \geqq 0$. Podle předešlé věty existují $g, h \in R(Y)$ tak, že platí

$$g \wedge h \geqq 0,\ g + h = f\ ,$$
$$h(a_+) = f(a_+)\ ,$$
$$x \wedge a_+ = 0 \Rightarrow g(x) = f(x)\ .$$

Protože $a_- \wedge a_+ = 0$, je $g(a_-) = f(a_-)$, tedy $h(a_-) = 0$, $h(a) = h(a_+) = f(a_+)$. Protože je $0 \leqq h \leqq f$, je $((F_a)_+)(f) = \sup_{0 \leqq \varphi \leqq f} \varphi(a) \geqq h(a) = f(a_+) = (F_{a_+})(f)$; odtud plyne $(F_a)_+ \geqq F_{a_+}$. Zřejmě však v $R(R(Y))$ platí $F_{a_+} \geqq 0$, $F_{a_+} \geqq F_a$, tedy $F_{a_+} \geqq (F_a)_+$. Tím je dokázáno 4).

34. Buďte Y_1, Y_2 K-lineály. Řekneme, že zobrazení φ K-lineálu Y_1 do K-lineálu Y_2 je *homomorfní*, jestliže

1) φ je aditivní a homogenní,

2) φ zachovává svazové operace, t. j. pro libovolné prvky x, y z Y_1 platí

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y), \quad \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)\ .$$

Je-li zobrazení φ K-lineálu Y_1 do K-lineálu Y_2 aditivní a platí-li pro libovolné $a \in Y_1$

$$\varphi(a_+) = (\varphi(a))_+\ ,$$

pak zachovává φ svazové operace a tedy i polouspořádání (t. j. $a \leqq b \Rightarrow \Rightarrow \varphi(a) \leqq \varphi(b)$), jak se snadno dokáže. Odtud pak podobně jako v 25 vyplývá, že φ je též homogenní, takže předpoklad homogenity lze v definici homomorfního zobrazení vynechat.

Z předešlé věty tedy plyne, že zobrazení $a \to F_a$ K-lineálu Y do K-lineálu $R(R(Y))$ je homomorfní.

Prosté homomorfní zobrazení se nazývá *isomorfní*. Má-li homomorfní zobrazení φ tu vlastnost, že pro každé $a > 0$ je $\varphi(a) \neq 0$, je již φ isomorfní; je-li totiž $\varphi(a) = 0$, je $\varphi(a_+) = \varphi(a \vee 0) = \varphi(a) \vee \varphi(0) = 0$, tedy $a_+ = 0$, podobně $a_- = 0$, $a = 0$.

35. Věta: *Buď Y K-lineál. Nechť pro lineární prostor $Z \subset Y$ platí*

1) $a \in Z \Rightarrow a_+ \in Z$,

2) $0 \leqq a \leqq b, \quad a \in Y, \quad b \in Z \Rightarrow a \in Z$.

Pak je Z rovněž K-lineál. Přiřadíme-li každému $f \in R(Y)$ parciální funkci f_z na množině Z, je přiřazení $f \to f_z$ homomorfní zobrazení $R(Y)$ do $R(Z)$.

Důkaz: Je zřejmé, že Z je K-lineál, že $f_z \in R(Z)$ pro každé $f \in R(Y)$ a že zobrazení $f \to f_z$ je aditivní a homogenní. Buď nyní $f \in R(Y)$, $f_z = g \in R(Z)$. Zvolme $a \in Z$, $a \geqq 0$. Pak $g_+(a) = \sup g(x)$, kde $0 \leqq x \leqq a$, $x \in Z$, což je zřejmě $\sup f(x)$, kde $0 \leqq x \leqq a$, $x \in Y$; je tedy $g_+(a) = f_+(a)$. Odtud plyne snadno $g_+ = (f_+)_z$, tedy $(f_z)_+ = g_+ = (f_+)_z$. Tím je vše dokázáno.

36. *Multiplikativní funkcionálou* na K-lineálu Y nazveme regulární funkcionálu f, splňující vztah

$$a \wedge b = 0 \Rightarrow f(a) \, . \, f(b) = 0 \, .$$

Poznámka. Podle 13 lze multiplikativní funkcionálu definovat také takto: Je to regulární funkcionála f taková, že pro každé a je buď $f(a_+) = 0$ nebo $f(a_-) = 0$.

37. Věta: *Buď f multiplikativní funkcionála. Pak je buď $f \geqq 0$ nebo $f \leqq 0$.*

Důkaz: Předpokládejme, že $f \in R(Y)$, $f_+ > 0$, $f_- > 0$; dokážeme, že f není multiplikativní funkcionála. Existují $a > 0$, $b > 0$ tak, že $f_+(a) > 0$, $f_-(b) > 0$. Pro $c = a + b$ je pak tím spíše $f_+(c) > 0$, $f_-(c) > 0$. Nechť $2\varepsilon = \min(f_+(c), f_-(c))$. Protože $(f_+) \wedge (f_-) = 0$, existují u, v tak, že

$$u + v = c, \quad u \wedge v \geqq 0, \quad f_+(u) + f_-(v) < \varepsilon \, .$$

Položme

$$p = u \wedge v, \quad u_1 = u - p, \quad v_1 = v - p \, .$$

Pak platí (podle 13)

$$u_1 \wedge v_1 = 0, \quad f_+(p) \leqq f_+(u) < \varepsilon, \quad f_-(p) \leqq f_-(v) < \varepsilon \, ,$$

tedy

$$f_+(v_1) = f_+(c - u - p) = f_+(c) - f_+(u) - f_+(p) > f_+(c) - 2\varepsilon \geqq 0 \, ,$$
$$f_-(u_1) = f_-(c - v - p) = f_-(c) - f_-(v) - f_-(p) > f_-(c) - 2\varepsilon \geqq 0 \, .$$

Existují tudíž u_2, v_2, splňující vztahy

$$0 \leqq u_2 \leqq u_1, \quad 0 \leqq v_2 \leqq v_1, \quad f(v_2) > 0, \quad f(u_2) < 0$$

a zřejmě $u_2 \wedge v_2 = 0$; f tedy není multiplikativní funkcionála.

Poznámka. Všimněme si, že pro multiplikativní funkcionálu f platí $f(a) = 0 \Leftrightarrow f(|a|) = 0$. Je-li totiž $f(a) = 0$, je na př. $f(a_+) = 0$, tedy platí též $f(a_-) = f(a_+) - f(a) = 0$, $f(|a|) = f(a_+) + f(a_-) = 0$.

Je-li naopak $f(|a|) = 0$ a na př. $f \geqq 0$, je $-|a| \leqq a \leqq |a|$, tedy $0 = f(-|a|) \leqq f(a) \leqq f(|a|) = 0$.

38. Příkladem K-lineálu může být množina všech konečných funkcí na nějaké množině $P \neq \emptyset$, klademe-li ovšem $x \geqq y$, jestliže $x(t) \geqq y(t)$ pro každé $t \in P$. Je jistě zřejmé, jak definujeme lineární operace. Všimněme si, že platí na př. $(x \vee y)(t) = \max\,(x(t),\ y(t))$, $|x|(t) = |x(t)|$ pro každé $t \in P$ (a pod.).

Pokud budou x, y funkce na téže množině a pokud neučiníme nějaké zvláštní ustanovení, budeme symbolům $|x|$, $x \vee y$ a pod. dávat tento význam.

39. Věta: *Budiž Y K-lineál; budiž N neprázdná množina, jejíž prvky jsou nezáporné multiplikativní funkcionály na Y. Přiřaďme každému $x \in Y$ funkci $\bar{x}$ na množině N předpisem*

$$\bar{x}(f) = f(x) \ \textit{pro} \ f \in N \ .$$

Pak je zobrazení $x \to \bar{x}$ homomorfní.

Důkaz: Platí $\overline{(x + y)}(f) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \bar{x}(f) + \bar{y}(f)$, $\overline{(\alpha x)}(f) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \bar{x}(f)$, tedy $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$, $\overline{\alpha x} = \alpha \bar{x}$.

Budiž nyní $x \in Y$, $f \in N$, $f(x_+) - f(x_-) = f(x) \geqq 0$. Kdyby bylo $f(x_-) \neq 0$, bylo by $f(x_+) = 0$, tedy $f(x_-) \leqq 0$, $f(x_-) < 0$ — spor; je tedy $f(x)_- = 0$, $f(x_+) = f(x)$.

Je-li $f(x) < 0$, nemůže být zase $f(x_+) \neq 0$; pak by totiž bylo $f(x_-) = 0$, $f(x) = f(x_+) < 0$. Je tedy $f(x_+) = 0$; vidíme, že vždy platí

$$f(x_+) = \max\,(f(x),\ 0) \ ,$$

tedy

$$\overline{(x_+)} = (\bar{x})_+ \ .$$

Odtud plyne podle 34, že zobrazení $x \to \bar{x}$ je homomorfní.

Poznámka 1. Tato věta je sama téměř bezcenná; může se totiž i u „velkých“ K-lineálů stát, že dokonce množina všech regulárních funkcionál obsahuje samotnou nulu. V tomto případě neříká ovšem věta 39 nic zajímavého.

Poznámka 2. Větu 39 lze v jistém smyslu obrátit. Platí totiž tato věta, kterou čtenář sám snadno dokáže:

Buď Y K-lineál; buď F neprázdná množina, jejíž prvky jsou konečné funkce na Y. Přiřaďme každému $x \in Y$ funkci $\bar{x}$ na množině F předpisem

$$\bar{x}(f) = f(x) \ \textit{pro každé} \ f \in F.$$

Dále předpokládejme, že zobrazení $x \to \bar{x}$ je homomorfní.

Pak je každý prvek $f \in F$ nezápornou multiplikativní funkcionálou.

40. *Lineárním prostorem s obecnou normou* nazveme lineární prostor Y, v němž je každému prvku a přiřazeno (konečné) číslo $\|a\|$ (*norma* prvku a) tak, že platí

O 1) $a \in Y$, $\|a\| = 0 \Rightarrow a = 0$,

O 2) $a, b \in Y \Rightarrow \|a\| + \|b\| \geqq \|a + b\|$,

O 3) $a \in Y \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \left\|\dfrac{a}{n}\right\| = 0$,

O 4) $a \in Y$, $\alpha, \beta \in E_1$, $|\alpha| \leqq |\beta| \Rightarrow \|\alpha a\| \leqq \|\beta a\|$.

41. Podle O 4) platí

$$\|a\| = \|1 \,.\, a\| = \|(-1) \,.\, a\| = \|-a\| \;;$$

dále platí $\|\frac{1}{2}a\| \leqq \|a\|$, tedy

$$\|a\| + \|a\| \geqq \|\tfrac{1}{2}a\| + \|\tfrac{1}{2}a\| \geqq \|\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a\| = \|a\| ,$$

tedy

$$\|a\| \geqq 0 .$$

Z O 4), O 3) plyne $\|0\| = \|0 \,.\, a\| \leqq \left\|\dfrac{1}{n} \,.\, a\right\| \to 0$, tedy

$$\|0\| = 0 .$$

42. Věta: *$\|a - b\|$ definuje v Y metriku, při níž jsou lineární operace spojité.*

Důkaz: Z 41 plyne snadno, že $\|a - b\|$ je opravdu metrika. Jestliže $a_n \to a$, $b_n \to b$, je $\|a_n + b_n - (a + b)\| \leqq \|a_n - a\| + \|b_n - b\| \to 0$, tedy $a_n + b_n \to \to a + b$. Nechť nyní $\alpha_n \in E_1$, $\alpha_n \to \alpha$, $a_n \in Y$, $a_n \to a$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a určeme $N_1 > 0$ tak, aby bylo $\left\|\dfrac{a}{N_1}\right\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; dále určeme přirozené číslo N_2 tak, aby platilo $|\alpha_n| \leqq N_2$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Konečně určeme N tak, aby pro každé $n > N$ platilo zároveň

$$|\alpha - \alpha_n| < \frac{1}{N_1}, \quad \|a - a_n\| < \frac{\varepsilon}{2N_2} .$$

Pro $n > N$ pak dostaneme $\|(\alpha - \alpha_n)a\| \leqq \left\|\dfrac{a}{N_1}\right\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

$$\|\alpha_n(a - a_n)\| \leqq \|N_2(a - a_n)\| \leqq \|a - a_n\| + \|a - a_n\| + \ldots + \|a - a_n\| < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

tedy

$$\|\alpha a - \alpha_n a_n\| \leqq \|(\alpha - \alpha_n)a\| + \|\alpha_n(a - a_n)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

43. Budiž Y lineární prostor s obecnou normou. Funkci f, definovanou na Y, nazveme *spojitou funkcionálou*, jestliže f je (konečná), aditivní a spojitá (jako funkce na metrickém prostoru Y). Množinu všech spojitých funkcionál označíme

$$C(Y) .$$

44. Věta: *Buď Y lineární prostor s obecnou normou. Pak je $C(Y)$ lineární prostor; je-li aditivní funkce f na množině Y spojitá v bodě 0, je $f \in C(Y)$. Každá spojitá funkcionála je homogenní.*

Důkaz: Je-li f aditivní, zjistíme jako v 25, že platí $r \, . \, f(b) = f(rb)$ pro každé racionální číslo r a každé $b \in Y$; je-li nadto f spojitá, plyne z 42 snadno, že platí $\alpha f(b) = f(\alpha b)$ pro každé $\alpha \in E_1$ a každé $b \in Y$. Ostatní je zřejmé.

45. Buď Y K-lineál. Řekneme, že Y je *K-lineál s obecnou normou*, je-li Y zároveň lineárním prostorem s obecnou normou a platí-li nadto

OK 1) $a \in Y \Rightarrow \|a\| = \| \, |a| \, \|$,
OK 2) $0 \leqq a \leqq b, \quad a, b \in Y \Rightarrow \|a\| \leqq \|b\|$.

Poznámka. Snadno zjistíme, že z OK 1), OK 2) plyne již O 4).

46. Věta: *Budiž Y K-lineál s obecnou normou. Pak platí:*

a) *Y je archimedovský K-lineál,*
b) *$C(Y) \subset R(Y)$,*
c) *$C(Y)$ je K-lineál,*
d) *jestliže $f \in C(Y)$, $g \in R(Y)$, $|g| \leqq f$, pak $g \in C(Y)$.*

Důkaz: Nechť $a, b \in Y$, $0 \leqq na \leqq b$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Pak je $\|a\| \leqq \left\|\frac{b}{n}\right\| \to 0$, tedy $\|a\| = 0$, $a = 0$; je tedy Y archimedovský K-lineál.

Předpokládejme nyní, že existuje $f \in C(Y) - R(Y)$. Podle 29 existuje $a \in Y$, $a > 0$ tak, že platí $\sup\limits_{0 \leqq x \leqq a} f(x) = \infty$. Existují tedy x_n, $0 \leqq x_n \leqq a$ tak, že $f(x_n) > n$. Je však $0 \leqq \frac{x_n}{n} \leqq \frac{a}{n}$, $\left\|\frac{x_n}{n}\right\| \leqq \left\|\frac{a}{n}\right\| \to 0$, $\left\|\frac{x_n}{n}\right\| \to 0$, tedy $\frac{1}{n} \, . \, f(x_n) = f\left(\frac{x_n}{n}\right) \to 0$ ve sporu s $\frac{1}{n} \, . \, f(x_n) > 1$. Je tedy $C(Y) \subset R(Y)$.

Zvolme nyní $f \in C(Y)$, $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$ tak, že $\|x\| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$. Budiž $a \in Y$, $\|a\| < \delta$. Je-li $0 \leqq x \leqq |a|$, je $\|x\| \leqq \| \, |a| \, \| = \|a\| < \delta$; je tedy $|f_+(a)| \leqq f_+(|a|) = \sup\limits_{0 \leqq x \leqq |a|} f(x) \leqq \sup\limits_{\|x\| < \delta} f(x) \leqq \varepsilon$. Odtud plyne, že je též $f_+ \in C(Y)$.

Jestliže $f \in C(Y)$, $g \in R(Y)$, $|g| \leqq f$, zvolme opět $\varepsilon > 0$. Určeme $\delta > 0$ tak, aby platilo $|f(x)| < \varepsilon$, kdykoli $\|x\| < \delta$. Pro takové x pak platí (viz též poznámku k 31)

$$|g(x)| \leqq |g|(|x|) \leqq f(|x|) < \varepsilon \; ;$$

je tedy $g \in C(Y)$.

Poznámka 1. Může se stát, že daný K-lineál Y obsahuje lineární prostor Y_1, který při polouspořádání, vytvořeném polouspořádáním v K-lineálu Y, je rovněž K-lineálem, že však pro některý prvek $a \in Y_1$ je kladná část prvku a

v K-lineálu Y_1 větší než kladná část prvku a v K-lineálu Y. (Pamatujme, že jsme kladnou část prvku a definovali jako nejmenší prvek b, pro nějž platí zároveň $b \geqq a$ i $b \geqq 0$. Je zřejmé, že záleží na tom, které prvky b „připustíme ke konkurenci".) Taková situace nastává na př., je-li Y množina všech spojitých funkcí na čtvrtrovině $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ a je-li Y_1 množina všech lineárních funkcí na této čtvrtrovině. Jestliže však lineární prostor $Y_1 \subset Y$ obsahuje s každým svým prvkem b též prvek b_+ (kde b_+ „je vzato" v Y), pak je již Y_1 K-lineálem, v němž svazové operace souhlasí s operacemi v Y; v tomto případě bychom mohli Y_1 nazvat „pod-K-lineálem" K-lineálu Y. Takový vztah je tedy podle 46 mezi $C(Y)$ a $R(Y)$.

Poznámka 2. Je-li Y K-lineál, v němž je definována taková topologie, že jsou při ní lineární i svazové operace spojité a jednobodové množiny uzavřené, řekneme, že Y je *topologický K-lineál*. Buď $\mathfrak{V}$ množina všech okolí nuly topologického K-lineálu Y. Snadno se zjistí, že

a) *ke každému $U \in \mathfrak{V}$ existuje takové $V \in \mathfrak{V}$, že pro každé $a \in V$ platí* $|a| = a \vee (-a) \in U$, $a_+ = a \vee 0 \in U$.

Protože ke každému $U \in \mathfrak{V}$ existuje takové $V \in \mathfrak{V}$, že platí implikace $x - y \in V \Rightarrow x_+ - y_+ \in U$, vidíme, že

b) *ke každému $U \in \mathfrak{V}$ existuje takové $V \in \mathfrak{V}$, že platí*

$$0 \leqq a \leqq b, \quad b \in V \Rightarrow a \in U$$

(volíme-li totiž $x = a$, $y = a - b$, je $x - y = b \in V$, tedy $x_+ - y_+ = a - 0 = a \in U$). Čtenář nyní snadno zjistí, že věta 46 platí i pro topologické K-lineály. Dále můžeme na př. větu 49 pro topologický K-lineál formulovat takto:

Pro každé $b \in Y$ je množina $\underset{x}{E}[x \leqq b]$ uzavřená. Tato věta je snadným důsledkem spojitosti svazových operací; platí totiž zřejmě $\underset{x}{E}[x \leqq b] = \underset{x}{E}[x \vee b = b]$.

Naopak se snadno zjistí, že je každý K-lineál Y s obecnou normou zároveň topologickým K-lineálem; stačí dokázat, že v Y platí $a_n \to a \Rightarrow (a_n)_+ \to a_+$. To však plyne ze vztahu $|b_+ - a_+| \leqq |b - a|$ (viz 17) a z OK 1), OK 2).

Je-li v nějakém K-lineálu Y definována taková topologie, že jsou při ní lineární operace spojité, jednobodové množiny uzavřené a že platí podmínky a) a b), dá se podobně dokázat, že je Y topologickým K-lineálem.

47. Věta: *Nechť K-lineál Y s obecnou normou má tuto vlastnost: Jestliže $0 \leqq a_n \in Y$, $\|a_n\| \to 0$, pak lze z $\{a_n\}$ vybrat posloupnost (svazově) omezenou. Pak platí*

$$C(Y) = R(Y) .$$

Důkaz: Předpokládejme, že existuje $f \in R(Y)$, $f \geqq 0$, f non $\in C(Y)$. Pak existují $a_n \in Y$ tak, že je sice $\|a_n\| \to 0$, ale není $f(a_n) \to 0$; lze pak určit $\varepsilon > 0$ a vybranou posloupnost $\{a_{i_n}\}$ tak, že $|f(a_{i_n})| \geqq \varepsilon$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Klademe-li

$b_n = |a_{i_n}|$, je $\pm a_{i_n} \leqq b_n$, tedy $\pm f(a_{i_n}) \leqq f(b_n)$, tedy $f(b_n) \geqq |f(a_{i_n})| \geqq \varepsilon$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Je ovšem $\|b_n\| > 0$, $\|b_n\| = \|a_{i_n}\| \to 0$. Určeme nyní posloupnost celých čísel α_n tak, aby platilo

$$0 \leqq \alpha_n \leqq \frac{1}{\sqrt{\|b_n\|}}, \quad \alpha_n \to \infty .$$

Pak platí $\|\alpha_n b_n\| \leqq \alpha_n \|b_n\| \leqq \frac{1}{\sqrt{\|b_n\|}} \cdot \|b_n\| = \sqrt{\|b_n\|} \to 0$.

Podle předpokladu lze z posloupnosti $\alpha_n b_n$ vybrat posloupnost omezenou; nechť tedy

$$\alpha_{j_n} b_{j_n} \leqq c \quad \text{pro } n = 1, 2, \ldots$$

Potom platí

$$\varepsilon \cdot \alpha_{j_n} \leqq \alpha_{j_n} \cdot f(b_{j_n}) = f(\alpha_{j_n} b_{j_n}) \leqq f(c)$$

pro každé n, což není možné, protože $\alpha_{j_n} \to \infty$.

Tím jsme dokázali, že je každá nezáporná funkcionála spojitá; odtud plyne snadno $R(Y) \subset C(Y)$. Podle 46 je však $C(Y) \subset R(Y)$, takže platí $C(Y) = R(Y)$.

Poznámka. Naskýtá se otázka, zda existuje K-lineál Y s obecnou normou, kde platí $C(Y) = R(Y)$, kde však nelze z každé posloupnosti prvků a_n, pro něž platí $\|a_n\| \to 0$, vybrat posloupnost omezenou. Tuto otázku klade autor čtenářům jako problém.

48. Věta: *Buď Y K-lineál s obecnou normou. Nechť $b_n \in Y$, $b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots$; nechť existuje b tak, že $\|b_n - b\| \to 0$. Pak je $b_n \leqq b$ pro $n = 1, 2, \ldots$*

Důkaz: Nechť není $b_N \leqq b$. Pak je $(b - b_N)_- > 0$; pro $n > N$ je $b_n - b \geqq b_N - b$, tedy $(b - b_n)_- = (b_n - b) \vee 0 \geqq (b_N - b) \vee 0 = (b - b_N)_-$. Odtud plyne, že pro $n > N$ platí

$$\|b - b_n\| = \| |b - b_n| \| \geqq \|(b - b_n)_-\| \geqq \|(b - b_N)_-\| > 0 ,$$

takže není $\|b - b_n\| \to 0$ — spor.

49. Věta: *Buď Y K-lineál s obecnou normou. Nechť $a_n \leqq b$ pro $n = 1, 2, \ldots$; nechť existuje $a \in Y$ tak, že $\|a_n - a\| \to 0$. Pak je $a \leqq b$.*

Důkaz: Položme $\bar{a}_n = a_n - a$, $\bar{b} = b - a$. Pak platí $\bar{a}_n \leqq \bar{b}$, $\|\bar{a}_n\| \to 0$, $|\bar{a}_n| \geqq (\bar{a}_n)_- \geqq (\bar{b})_- \geqq 0$, tedy $\|(\bar{b})_-\| \leqq \|\bar{a}_n\| \to 0$, $\|(\bar{b})_-\| = 0$, $(\bar{b})_- = 0$, $\bar{b} \geqq 0$, $b \geqq a$.

50. Věta: *Buď K-lineál Y s obecnou normou úplný jako metrický prostor. Pak je $C(Y) = R(Y)$.*

Důkaz: Nechť $a_n \in Y$, $a_n \geqq 0$, $\|a_n\| \to 0$. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_{i_n}\| < \infty$. Z úplnosti Y plyne, že existuje $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n}$. Je-li $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_{i_n}$, je $s_1 \leqq s_2 \leqq \ldots$; podle 48 je $s_n \leqq a$, tím spíše $a_{i_n} \leqq a$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Podle 47 je $C(Y) = R(Y)$.

51. Věta: *Buď Y K-lineál s obecnou normou. Nechť ke každé posloupnosti $0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots$, kde $\sup_n \|a_n\| < \infty$, existuje $a \in Y$ tak, že $\|a_n - a\| \to 0$. Pak je Y úplný metrický prostor.*

Důkaz: Stačí dokázat, že je konvergentní každá řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, kde $\sum_{n=1}^{\infty} \|b_n\| < \infty$. Budiž za tohoto předpokladu $a_n = \sum_{i=1}^{n} (b_i)_+$. Pak je $0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots$, $\|a_n\| \leqq \sum_{i=1}^{n} \|(b_i)_+\| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \|b_n\| < \infty$, tedy je posloupnost $\{a_n\}$ i řada $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n)_+$ konvergentní. Podobně zjistíme, že je řada $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n)_-$ a tedy i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní.

Poznámka. Příkladem K-lineálu s obecnou normou může být množina Y všech spojitých funkcí v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, při čemž normu definujeme vztahem $\|a\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |a(t)|$. Snadno zjistíme, že k posloupnosti funkcí $b_n(t) = 1 - t^n$ neexistuje funkce $b \in Y$ taková, aby platilo $\|b_n - b\| \to 0$; při tom je Y úplný prostor. Předpoklad existence prvku b ve větě 48 není tedy zbytečný.

Definujeme-li v témže prostoru Y normu předpisem $\|b\|_1 = \int_0^1 |b(t)| dt$, snadno zjistíme, že nezáporná funkcionála f, definovaná pro $x \in Y$ vztahem $f(x) = x(0)$, není při této normě spojitá; při normě $\|b\| = \max_{0 \leqq t \leqq 1} |b(t)|$ ovšem funkcionála f spojitá je (což plyne též z věty 50).

Vidíme, že polouspořádání lze na našem prostoru definovat jen jedním přirozeným způsobem, kdežto normu můžeme definovat různými „rozumnými" způsoby a množiny spojitých funkcionál mohou být přitom různé. Může tedy být přirozenější vyšetřovat na daném konkretním prostoru množinu všech regulárních funkcionál než množinu všech spojitých funkcionál.

Obě normy, o nichž jsme nyní mluvili, splňovaly též předpoklad H) z 52. Jako příklad K-lineálu s obecnou normou, kde tento předpoklad není splněn, lze uvést prostor S takto definovaný: Buď Z množina všech konečných měřitelných funkcí v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, N buď množina všech funkcí ze Z, které jsou rovny nule skoro všude. Klademe nyní $S = Z/N$; polouspořádání v S definujeme podle 20, normu pro $T \in S$ určíme předpisem $\|T\| = \int_0^1 \frac{|x(t)|}{1 + |x(t)|} dt$, kde x je libovolný prvek z třídy T. Prostor S má tu zajímavou vlastnost, že na něm neexistuje žádná nenulová regulární funkcionála.

Dále si všimněme, že každý K-lineál s obecnou normou lze snadno vnořit do úplného K-lineálu. Můžeme totiž utvořit množinu Z všech cauchyovských posloupností prvků daného K-lineálu a množinu $N \subset Z$ všech nulových posloupností; je jistě zřejmé, že Z můžeme opět pokládat za K-lineál a že v prostoru Z/N můžeme definovat normu. Lze pak snadno ukázat, že Z/N je úplný K-lineál s obecnou normou a že se původní K-lineál dá ztotožnit s jistou částí Z/N.

52. *Normovaným lineárním prostorem* (s homogenní normou) budeme rozumět lineární prostor Y, kde je každému prvku a přiřazeno (konečné) číslo $\|a\|$ (norma prvku a) tak, že platí

O 1) $a \in Y, \|a\| = 0 \Rightarrow a = 0,$

O 2) $a, b \in Y \Rightarrow \|a\| + \|b\| \geqq \|a + b\|,$

H) $\alpha \in E_1, a \in Y \Rightarrow \|\alpha a\| = |\alpha| \,.\, \|a\|.$

Poznámka 1. Z H) plyne ihned O 3) i O 4) (viz 40), takže je každý normovaný lineární prostor zároveň lineárním prostorem s obecnou normou.

Poznámka 2. Je-li Y normovaný lineární prostor, je $C(Y)$ rovněž normovaným lineárním prostorem, klademe-li pro $f \in C(Y)$

$$\|f\| = \sup f(x), \text{ kde } \|x\| \leqq 1 \,.$$

(Viz na př. [6], věta 3.5.) $\|f\|$ je pak nejmenším z čísel α, splňujících vztah $f(x) \leqq \leqq \alpha\|x\|$ pro každé x.

53. *Normovaným K-lineálem* budeme rozumět K-lineál Y, který je zároveň normovaným lineárním prostorem, při čemž platí

OK 1) $a \in Y \Rightarrow \|a\| = \||a|\|,$

OK 2) $0 \leqq a \leqq b, \quad a, b \in Y \Rightarrow \|a\| \leqq \|b\|.$

54. Věta: *Budiž Y normovaný K-lineál. Položme pro $f \in R(Y)$*

$$\|f\| = \sup f(x) \textit{ pro } \|x\| \leqq 1$$

(ať je toto supremum konečné nebo nekonečné). Pak platí

$$f \in R(Y) \Rightarrow \|f\| = \||f|\| \,,$$

$$0 \leqq g \leqq f, \quad f, g \in R(Y) \Rightarrow \|g\| \leqq \|f\| \,.$$

Důkaz: Zvolme $f \in R(Y)$, $\|x\| \leqq 1$. Protože též $\||x|\| \leqq 1$, je $f(x) \leqq |f|(|x|) \leqq \leqq \||f|\|$, takže platí

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqq 1} f(x) \leqq \||f|\| \,.$$

Zvolme naopak $x \in Y$, $\|x\| \leqq 1$. Pak platí

$$|f|(x) \leqq |f|(|x|) = \sup_{|y| \leqq |x|} f(y) \leqq \sup_{\|y\| \leqq 1} f(y) = \|f\| \,.$$

Odtud plyne

$$\||f|\| = \sup_{\|x\| \leqq 1} |f|(x) \leqq \|f\| \,,$$

tedy

$$\||f|\| = \|f\| \,.$$

Nechť nyní $0 \leqq g \leqq f$, $f, g \in R(Y)$. Zvolme $a \in Y$, $\|a\| \leqq 1$. Pak je též $\||a|\| \leqq \leqq 1$, tedy $g(a) \leqq g(|a|) \leqq f(|a|) \leqq \|f\|$; odtud plyne $\|g\| = \sup_{\|a\| \leqq 1} g(a) \leqq \|f\|$.

55. Věta: *Budiž Y normovaný K-lineál. Pak je $C(Y)$ rovněž normovaný K-lineál.*

Důkaz: Podle 46 je $C(Y)$ K-lineál; víme, že je $C(Y)$ normovaný lineární prostor. Podle předešlé věty platí také OK 1), OK 2).

56. Věta: *Buď Y normovaný K-lineál. Přiřaďme každému $a \in Y$ funkci F_a na množině $C(Y)$ předpisem*

$$F_a(f) = f(a) \quad (f \in C(Y)) \ .$$

Pak je $a \to F_a$ isometrické a isomorfní zobrazení Y do $C(C(Y))$.

Důkaz: Podle známé věty (viz na př. [6], věta 6.2) existuje ke každému $a \in Y$ prvek $f_a \in C(Y)$ tak, že platí $\|f_a\| = 1$, $f_a(a) = \|a\|$. Je tedy $\|F_a\| = \sup_{\|f\| \leqq 1} F_a(f) = \sup_{\|f\| \leqq 1} f(a) \geqq f_a(a) = \|a\|$, zároveň však $\|F_a\| = \sup_{\|f\| \leqq 1} f(a) \leqq \sup_{\|f\| \leqq 1} \|f\| \cdot \|a\| = \|a\|$, takže platí $\|F_a\| = \|a\|$; zobrazení $a \to F_a$ je tedy isometrické.

Přiřaďme nyní každému $a \in Y$ funkci Φ_a na množině $R(Y)$ předpisem

$$\Phi_a(f) = f(a) \qquad (f \in R(Y)) \ .$$

Podle 33 je zobrazení $a \to \Phi_a$ homomorfní; protože podle 46 platí implikace $0 \leqq f \leqq g$, $g \in C(Y)$, $f \in R(Y) \Rightarrow f \in C(Y)$, je podle 35 také zobrazení $\Phi_a \to F_a$ homomorfní, pokládáme-li F_a za prvek K-lineálu $R(C(Y))$. Avšak svazové operace v $C(C(Y))$ souhlasí se svazovými operacemi v $R(C(Y))$; zobrazení $a \to F_a$ je tedy homomorfní, i když pokládáme F_a za prvek $C(C(Y))$. Zjistili jsme však, že $a \to F_a$ je zobrazení isometrické, tedy prosté; je tudíž také isomorfní.

57. Buď Y normovaný K-lineál, kde platí

L_0) $a, b \in Y$, $\quad a \wedge b = 0 \Rightarrow \|a + b\| = \|a\| + \|b\|$.

Pak řekneme, že Y je *L_0-lineál.* Platí-li dokonce implikace

L) $a, b \in Y$, $a \wedge b \geqq 0 \Rightarrow \|a + b\| = \|a\| + \|b\|$,

nazveme Y *L-lineálem.*

Poznámka. Všimněme si, že L_0-lineál by se dal definovat jako normovaný K-lineál, kde platí

$$\|a\| = \|a_+\| + \|a_-\|$$

pro každé a.

58. Věta: *Buď Y K-lineál; nechť $f \in R(Y)$ a nechť platí implikace*

$$a \in Y, \quad a > 0 \Rightarrow f(a) > 0 \ .$$

Položme

$$\|b\| = f(|b|)$$

pro každé $b \in Y$. Pak je Y L-lineál.

Důkaz: $b \neq 0 \Rightarrow |b| > 0 \Rightarrow \|b\| = f(|b|) > 0$. Dále platí $\|a\| + \|b\| = f(|a|) + f(|b|) = f(|a| + |b|) \geqq f(|a + b|) = \|a + b\|$; pro $a \wedge b \geqq 0$ platí zřejmě rovnost.

Pro $\alpha \in E_1$ je $\|\alpha a\| = f(|\alpha a|) = f(|\alpha|\,|a|) = |\alpha| f(|a|) = |\alpha| \,.\, \|a\|$. Tím jsme dokázali, že platí O 1), O 2), H), L); zřejmě platí i OK 1), OK 2).

Poznámka. Předpokládáme-li, že v nějakém K-lineálu Y je každému prvku a přiřazeno číslo $\|a\| \geqq 0$ tak, že platí O 1), OK 1), L), je již Y L-lineál; položíme-li totiž $f(a) = \|a\|$ pro $a \geqq 0$, můžeme podle 26 rozšířit funkci f na nezápornou funkcionálu, která splňuje podmínky věty 58. Podle OK 1) je pak $f(|b|) = \|b\|$ pro každé b.

59. **Věta:** *Buď Y L-lineál. Nechť $a + b \geqq 0$, $\|a + b\| = \|a\| + \|b\|$. Pak platí $a \wedge b \geqq 0$.*

Důkaz: Buď $c = a + b = c_1 - c_2$, kde $c_1 = a_+ + b_+$, $c_2 = a_- + b_-$. Pak platí

$$\begin{aligned} \|a\| &= \|a_+\| + \|a_-\| \,, \\ \|b\| &= \|b_+\| + \|b_-\| \,, \\ \|c_1\| &= \|a_+\| + \|b_+\| \,, \\ \|c_2\| &= \|a_-\| + \|b_-\| \,, \end{aligned}$$

tedy $\|c\| = \|a + b\| = \|a\| + \|b\| = \|c_1\| + \|c_2\|$, tedy

$$\|c_2\| = \|c\| - \|c_1\| \,.$$

Protože však $c_1 = c + c_2$, je $\|c_1\| = \|c\| + \|c_2\|$, takže máme zároveň

$$\|c_2\| = \|c_1\| - \|c\| \,.$$

Odtud plyne $\|c_2\| = 0$, $c_2 = 0$, $a_- = b_- = 0$, $a \wedge b \geqq 0$.

60. Budiž Y normovaný K-lineál, kde platí

M_0) $a, b \in Y$, $a \wedge b = 0 \Rightarrow \|a \vee b\| = \max(\|a\|, \|b\|)$.

Pak nazveme Y *M_0 — lineálem.*

Platí-li dokonce

M) $a, b \in Y$, $a \wedge b \geqq 0 \Rightarrow \|a \vee b\| = \max(\|a\|, \|b\|)$,

řekneme, že Y je *M-lineál.*

Poznámka. Kakutani a Bohnenblust dokázali v [3], že je každý M_0-lineál zároveň M-lineálem. V této práci je rovněž podán důkaz tohoto tvrzení (viz větu 92, která říká též, že je každý L_0-lineál zároveň L-lineálem), a to v podstatě stejným způsobem jako v [3]. Naskýtá se ovšem otázka, zda nelze podat nějaký jednodušší důkaz.

61. **Věta:** *Buď Y M_0-lineál. Pak je $C(Y)$ L_0-lineál.*

Důkaz: Nechť $f_1, f_2 \in C(Y)$, $f_1 \wedge f_2 = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Existují $a_i \in Y$ tak, že platí

$$\|a_i\| \leqq 1, \quad f_i(a_i) > \|f_i\| - \varepsilon \quad (i = 1, 2) \,;$$

dále můžeme předpokládat $a_i \geqq 0$. Protože $f_1 \wedge f_2 = 0$, existují (viz 31) a_i', a_i''

tak, že platí $a_i' \wedge a_i'' \geqq 0$, $a_i' + a_i'' = a_i$, $f_1(a_1'') + f_2(a_1') < \varepsilon$, $f_1(a_2') + f_2(a_2'') < \varepsilon$, tedy $f_i(a_i') = f_i(a_i - a_i'') = f_i(a_i) - f_i(a_i'') > f_i(a_i) - \varepsilon$. Buď $h = a_1' \wedge a_2'$, $b_i = a_i' - h$ $(i = 1, 2)$. Pak je $f_1(h) \leqq f_1(a_2') < \varepsilon$, $f_2(h) \leqq f_2(a_1') < \varepsilon$, tedy $f_i(b_i) = f_i(a_i') - f_i(h) > f_i(a_i) - \varepsilon - \varepsilon > \|f_i\| - 3\varepsilon$. Podle 13 je $b_1 \wedge b_2 = 0$; zřejmě je $b_i \leqq a_i$, tedy $\|b_i\| \leqq 1$. Buď $b = b_1 \vee b_2$. Protože je Y M_0-lineál, je též $\|b\| = \max(\|b_1\|, \|b_2\|) \leqq 1$, tedy $\|f_1 + f_2\| \geqq (f_1 + f_2)(b) = f_1(b) + f_2(b) > \|f_1\| + \|f_2\| - 6\varepsilon$. Odtud plyne $\|f_1 + f_2\| \geqq \|f_1\| + \|f_2\|$; platí zde ovšem rovnost.

62. Věta: *Budiž Y M-lineál. Pak je $C(Y)$ L-lineál.*

Důkaz: Nechť $f_1, f_2 \in C(Y)$, $f_1 \wedge f_2 \geqq 0$, $x_i \in Y$, $\|x_i\| \leqq 1$ $(i = 1, 2)$. Buď $y = (x_1)_+ \vee (x_2)_+$. Pak je $\|y\| = \max(\|(x_1)_+\|, \|(x_2)_+\|) \leqq 1$, tedy $f_1(x_1) + f_2(x_2) \leqq f_1((x_1)_+) + f_2((x_2)_+) \leqq f_1(y) + f_2(y) = (f_1 + f_2)(y) \leqq \|f_1 + f_2\|$, tedy $\|f_1\| + \|f_2\| \leqq \|f_1 + f_2\|$. Platí ovšem rovnost.

63. Věta: *Je-li Y L_0-lineál, je $C(Y)$ M_0-lineál.*

Důkaz: Nechť $f_1, f_2 \in C(Y)$, $f_1 \wedge f_2 = 0$. Zřejmě můžeme předpokládat $\max(\|f_1\|, \|f_2\|) = 1$; stačí pak dokázat, že $\|f_1 \vee f_2\| \leqq 1$. Zvolme proto $a \in Y$, $a \geqq 0$, $\|a\| \leqq 1$; dále zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Protože $f_1 \wedge f_2 = 0$, existují a_1, a_2 tak, že $a_1 \wedge a_2 \geqq 0$, $a_1 + a_2 = a$, $f_1(a_2) + f_2(a_1) < \varepsilon$, tedy

$$f_i(a) = f_i(a_1) + f_i(a_2) < f_i(a_i) + \varepsilon\,,$$
$$f_i\,(a_1 \wedge a_2) < \varepsilon\,.$$

Buď $b_i = a_i - (a_1 \wedge a_2)$. Pak je $f_i(a_i) < f_i(b_i) + \varepsilon$, tedy

$$f_i(a) < f_i(b_i) + 2\varepsilon\,.$$

Protože je $\|f_i\| \leqq 1$, je $f_i(b_i) \leqq \|b_i\|$; protože je (podle 13) $b_1 \wedge b_2 = 0$, je $\|b_1\| + \|b_2\| = \|b_1 + b_2\|$, tedy $\|b_1\| + \|b_2\| \leqq \|a\| \leqq 1$. Odtud plyne

$$(f_1 + f_2)(a) = f_1(a) + f_2(a) < f_1(b_1) + 2\varepsilon + f_2(b_2) + 2\varepsilon \leqq \|b_1\| + \|b_2\| + 4\varepsilon \leqq 1 + 4\varepsilon\,,$$

tedy

$$\|f_1 \vee f_2\| = \|f_1 + f_2\| \leqq 1.$$

64. Věta: *Buď Y Kj-lineál[3]) s jednotkou j. Položme pro každé $a \in Y$*

$$\|a\| = \inf \alpha, \quad kde \quad \alpha j \geqq |a|\,.$$

Pak je Y M-lineál.

Důkaz: Zřejmě je $0 \leqq \|a\| < \infty$ pro každé a. Napřed dokážeme, že pro každé $a \in Y$ platí také

$$\|a\| j \geqq |a|\,,$$

takže příslušné infimum je dokonce minimem. Zřejmě pro každé přirozené n platí $\left(\|a\| + \frac{1}{n}\right) . j \geqq |a|$, tedy $\frac{1}{n} j \geqq |a| - \|a\|\, j$,

[3]) Viz 22.

$$j \geqq n \cdot (|a| - \|a\|j)_+ ,$$

tedy $(|a| - \|a\|j)_+ = 0$, $|a| - \|a\|j \leqq 0$, $|a| \leqq \|a\|j$.

Zejména pro $\|a\| = 0$ je také $|a| = a = 0$.

Protože $\|a\|j \geqq |a|$, $\|b\|j \geqq |b|$, je $(\|a\| + \|b\|)j \geqq |a| + |b| \geqq |a + b|$, tedy $\|a\| + \|b\| \geqq \|a + b\|$.

Pro libovolné $\beta \in E_1$, $a \in Y$ platí nyní $|\beta| \cdot \|a\|j \geqq |\beta| \cdot |a| = |\beta a|$, tedy $|\beta| \cdot \|a\| \geqq \|\beta a\|$. Pro $\beta = 0$ platí ovšem rovnost; pro $\beta \neq 0$ je též $\left|\frac{1}{\beta}\right| \cdot \|\beta a\| \geqq \left\|\frac{1}{\beta} \cdot \beta a\right\| = \|a\|$, tedy platí zároveň $\|\beta a\| \geqq |\beta| \cdot \|a\|$, $\|\beta a\| = |\beta| \cdot \|a\|$.

Vztah $\|a\| = \| |a| \|$ je zřejmý.

Je-li $0 \leqq a \leqq b$, je $\|b\|j \geqq |b| = b \geqq a = |a|$, tedy $\|b\| \geqq \|a\|$. Pro $a \wedge b \geqq 0$, $\lambda = \max(\|a\|, \|b\|)$ je $\lambda j \geqq |a| = a$, $\lambda j \geqq |b| = b$, tedy $\lambda j \geqq a \vee b = |a \vee b|$, $\lambda \geqq \|a \vee b\|$. Platí zde ovšem rovnost.

65. Věta: *Buď Y L-lineál. Pak je $C(Y)$ Kj-lineál s jednotkou $j(x) = \|x_+\| - \|x_-\|$. Norma, definovaná v $C(Y)$ podle* 64, *souhlasí s obvyklou normou.*

Důkaz: Protože Y je L-lineál, je podle 26 funkce $j(x) = \|x_+\| - \|x_-\|$ aditivní; zřejmě je to nezáporná a spojitá funkcionála. Je-li $f \in C(Y)$, $a \in Y$, $a \geqq 0$, je $|f|(a) \leqq \| |f| \| \cdot \|a\| = \|f\| \cdot j(a)$; tedy platí $|f| \leqq \|f\|j$. Označíme-li normu, definovanou v $C(Y)$ podle 64, na okamžik symbolem $[f]$, vidíme, že $[f] \leqq \|f\|$. Protože však podle 64 je $|f| \leqq [f]j$, je pro libovolné $a \in Y$ $|f(a)| \leqq |f|(|a|) \leqq [f] \cdot j(|a|) = [f] \, \|a\|$; odtud plyne (viz poznámku 2 k 52) též $\|f\| \leqq [f]$.

Poznámka. Vidíme zejména, že $C(Y)$ je M-lineál, je-li Y L-lineál.

66. Věta: *Buď Y Kj-lineál s jednotkou j; pokládáme-li Y za M-lineál s normou, definovanou podle* 64, *je $R(Y) = C(Y)$ a platí*

$$\|f\| = |f|(j)$$

pro každé $f \in R(Y)$.

Důkaz: Podle 31 je $|f|(j) = \sup\limits_{|x| \leqq j} f(x) = \sup\limits_{\|x\| \leqq 1} f(x) = \|f\|$ pro každé $f \in R(Y)$; vidíme zároveň, že $R(Y) \subset C(Y)$, tedy $R(Y) = C(Y)$.

67. *K-okruhem* nazveme K-lineál Y, v němž je definováno násobení tak, že je Y zároveň komutativním okruhem s jednotkovým prvkem a že platí

$$\alpha \in E_1,\ a, b \in Y \Rightarrow \alpha(ab) = (\alpha a)b ,$$
$$a, b, c \in Y,\ c \geqq 0 \Rightarrow (a \vee b)c = ac \vee bc .$$

68. Je-li $c \geqq 0$, platí také $(a \wedge b)c = -[(-a) \vee (-b)]c = -[(-ac) \vee (-bc)] = ac \wedge bc$.

Je-li $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, je $ab = (a \vee 0)b = ab \vee 0 \geqq 0$.

69. Věta: *Jestliže* $a \wedge b = 0$, *pak* $ab = 0$.

Důkaz: Podle 12 je zde $a + b = a \vee b$, tedy $a^2 + 2ab + b^2 = (a \vee b)$ . . $(a + b) = a(a + b) \vee b(a + b) = (a^2 + ab) \vee (ba + b^2) = ab + (a^2 \vee b^2)$, tedy

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 \vee b^2 .$$

Protože však $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, je $a^2 \geqq 0$, $ab \geqq 0$, $b^2 \geqq 0$, tedy také $a^2 + b^2 \geqq$ $\geqq a^2 \vee b^2$, $ab = a^2 \vee b^2 - (a^2 + b^2) \leqq 0$. Odtud plyne

$$ab = 0 .$$

70. Věta: *Pro libovolné* $a \in Y$ *platí* $a^2 \geqq 0$.

Důkaz: $a^2 = (a_+)^2 - 2a_+a_- + (a_-)^2$, kde $(a_+)^2 \geqq 0$, $(a_-)^2 \geqq 0$, $a_+ \,.\, a_- = 0$.

Poznámka. Je-li j jednotkový prvek okruhu Y, je $j = j^2 > 0$.

71. Věta: *Jsou-li* a, b *prvky* K-*okruhu* Y, *platí*

$$|a|\,|b| = |ab| .$$

Důkaz: $ab = (a_+ - a_-)(b_+ - b_-) = a_+b_+ + a_-b_- - a_+b_- - a_-b_+$. Platí $a_+b_+ \wedge a_+b_- = a_+(b_+ \wedge b_-) = 0$ atd., takže podle poznámky k 16 máme

$(ab)_+ = a_+b_+ + a_-b_-$, $(ab)_- = a_+b_- + a_-b_+$, tedy $|ab| = (a_+ + a_-)$ . . $(b_+ + b_-) = |a| \,.\, |b|$.

72. Věta: *Buď* Y K-*okruh; buď* j *jeho jednotkový prvek. Je-li* f *nezáporná funkcionála na* Y *taková, že* $f(j) = 0$, *je* $f = 0$.

Důkaz: Zvolme $a \in Y$ a číslo α. Pak je $0 \leqq f((a - \alpha j)^2) = f(a^2 - 2a\alpha j + \alpha^2 j) = f(a^2) - 2\alpha f(a)$, tedy $2\alpha f(a) \leqq f(a^2)$. Odtud plyne snadno $f(a) = 0$, $f = 0$.

Poznámka. Buďte f, g prvky $R(Y)$ takové, že platí

$$f(x) = g(x), \text{ kdykoli } 0 \leqq x \leqq j ;$$

utvořme $h = f - g$. Pak je $h_+(j) = \sup\limits_{0 \leqq x \leqq j} h(x) = 0$, tedy $h_+(j) = 0$, $h_+ = 0$, rovněž $h_-(j) = h_+(j) - h(j) = 0$, $h_- = 0$, tedy $h = h_+ - h_- = 0$. Odtud plyne

$$f = g .$$

73. Věta: *Buď* Y K-*okruh. Položme pro* $f \in R(Y)$

$$\|f\| = |f|(j) .$$

Pak je $R(Y)$ L-*lineál.*

Důkaz: Klademe-li $J(f) = f(j)$ pro $f \in R(Y)$, vidíme, že funkcionála J splňuje podmínky věty 58.

Poznámka. Všimněme si, že $\|f\| = \sup\limits_{|x| \leqq j} f(x)$.

74. Věta: *Buď* Y K-*okruh*, $f \in R(Y)$, $f > 0$; *buď*

$$\mathfrak{A} = \underset{x}{E}[f(|x|) = 0] .$$

Pak je $\mathfrak{A}$ *ideál.*

Důkaz: Jestliže $a, b \in \mathfrak{A}$, je $0 \leqq f(|a + b|) \leqq f(|a| + |b|) = f(|a|) + f(|b|) = 0$, tedy $a + b \in \mathfrak{A}$.

Zvolme nyní $a \in \mathfrak{A}$ a položme

$$f_1(x) = f(|a|x)$$

pro každé $x \in Y$. Snadno se zjistí, že je f_1 nezáporná funkcionála a že $f_1(j) = 0$; podle 72 je $f_1 = 0$, tedy zejména $f_1(|x|) = f(|a|\,|x|) = f(|ax|) = 0$. Vidíme, že $ax \in \mathfrak{A}$ pro každé $x \in Y$.

Kdyby platilo $j \in \mathfrak{A}$, bylo by $f(j) = 0$, $f = 0$; je tedy $\mathfrak{A}$ opravdu (vlastním) ideálem.

Poznámka. Je-li $\mathfrak{B}$ libovolný ideál v Y, $\alpha \in E_1$, $b \in \mathfrak{B}$, je $\alpha b = (\alpha j)b \in \mathfrak{B}$.

75. Věta: *Buď Y K-okruh; pokládejme podle 73 $R(Y)$ za L-lineál. Pak funkcionála $f \in R(Y)$ je okruhovým homomorfismem,*[4] *právě když platí*

1) $f \geqq 0$,

2) $a \wedge b = 0 \Rightarrow f(a) \,.\, f(b) = 0$,

3) $\|f\| = 1$.

Důkaz: Budiž $f \in R(Y)$ homomorfismem. Je-li $a \wedge b = 0$, je podle 69 také $ab = 0$, tedy $0 = f(ab) = f(a) \,.\, f(b)$. Podle 37 je buď $f \geqq 0$ nebo $f \leqq 0$. Protože pro každé $a \in Y$ platí $f(a) = f(aj) = f(a) \,.\, f(j)$, je buď $f = 0$ nebo $f(j) = 1$. Případ $f = 0$ vylučujeme, tedy je $f(j) = 1$. Odtud plyne $f > 0$, $\|f\| = f(j) = 1$.

Nechť naopak má f vlastnosti 1), 2), 3). Podle poznámky k větě 37 platí $f(a) = 0 \Leftrightarrow f(|a|) = 0$; podle 74 je tedy množina $\mathfrak{A} = \underset{x}{E}[f(x) = 0]$ ideál. Podle 3), 1) je dále $1 = \|f\| = |f|(j) = f(j)$ (tedy $f \neq 0$).

Pro libovolné $x \in Y$ platí $0 = f(x) - f(j) \,.\, f(x) = f(x - j \,.\, f(x))$, tedy

$$x \equiv j \,.\, f(x) \mod \mathfrak{A} .$$

Je-li $y \in Y$, je též

$$y \equiv j \,.\, f(y) ,$$

$$j \,.\, f(xy) \equiv xy \equiv j^2 \,.\, f(x) \,.\, f(y) = j \,.\, f(x) \,.\, f(y) ,$$

tedy

$$j \,.\, (f(xy) - f(x) \,.\, f(y)) \in \mathfrak{A} ,$$

$$0 = (f(xy) - f(x) \,.\, f(y)) \,.\, f(j) = f(xy) - f(x) \,.\, f(y) ,$$

$$f(xy) = f(x) \,.\, f(y) .$$

76. Buďte a, b různé body lineárního prostoru Y. Budiž T množina všech $c \in Y$ tvaru

$$c = \alpha a + \beta b , \tag{*}$$

kde $\alpha, \beta \in E_1$, $\alpha\beta \geqq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Pak množinu T nazveme *úsečkou* o koncových bodech a, b.

---

[4]) Nulovou funkcionálu nepokládáme za homorfismus.

Je-li $c \in T$, $a \neq c \neq b$, řekneme, že bod c je *vnitřním bodem* úsečky T. To nastane, právě když jsou obě čísla α, β ve výraze (*) kladná.

Řekneme, že bod c je *vrcholem* množiny $A \subset Y$, jestliže platí $c \in A$ a jestliže bod c není vnitřním bodem žádné úsečky, obsažené v A.

77. Věta: *Budiž Y normovaný lineární prostor, který obsahuje více než jeden prvek. Budiž S jednotková koule prostoru Y, t. j. $S = \underset{x}{E}[x \in Y, \|x\| \leqq 1]$. Pak je bod x vrcholem S, právě když má tyto vlastnosti:*

1) $\|x\| = 1$,
2) *jestliže* $x = y + z$, $\|y\| + \|z\| = 1$, *pak jsou* y, z *násobky* x.

Důkaz: Nechť má bod x vlastnosti 1), 2); nechť $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $\|x_i\| \leqq 1$, $x_1 \neq x_2$, $\alpha_i > 0$, $\Sigma\alpha_i = 1$ $(i = 1, 2)$. Pak je $\|\alpha_i x_i\| \leqq \alpha_i$, $1 = \Sigma\alpha_i \geqq \Sigma\|\alpha_i x_i\| \geqq \|\Sigma\alpha_i x_i\| = \|x\| = 1$. Vidíme, že platí všude znamení rovnosti; zejména platí $\|x_i\| = 1$. Podle 2) jsou $\alpha_i x_i$ násobky x, tedy jsou také x_i násobky x a na přímce, určené počátkem a bodem x, leží tři body s normou 1, což není možné. Odtud plyne, že x je vrchol množiny S.

Buď naopak x vrcholem S. Snadno zjistíme, že je $\|x\| = 1$ (použijeme toho, že má Y více než jeden prvek; jinak by byla nula vrcholem S). Nechť $x = y + z$, $\|y\| + \|z\| = 1$. Je-li na př. $\|y\| = 0$, jsou y, z násobky x. Jestliže $\|y\| \,.\, \|z\| > 0$, je

$$x = \|y\| \cdot \frac{y}{\|y\|} + \|z\| \cdot \frac{z}{\|z\|} \,.$$

Protože $\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| = \left\|\frac{z}{\|z\|}\right\| = 1$ a protože x je vrchol, nemůže být $\frac{y}{\|y\|} \neq \frac{z}{\|z\|}$; buď tedy $\frac{y}{\|y\|} = \frac{z}{\|z\|} = t$. Pak je $x = \|y\|t + \|z\|t = (\|y\| + \|z\|)\, t = t$, tedy

$$y = \|y\|x, \quad z = \|z\|x \,.$$

78. Věta: *Nechť L_0-lineál Y obsahuje více než jeden prvek; buď v vrchol jednotkové koule v Y. Pak je buď $v > 0$ nebo $v < 0$.*

Důkaz: Protože Y je L_0-lineál, je

$$\|v\| = \|v_+\| + \|v_-\| \;;$$

podle 77 platí $v_+ = \alpha v$, $v_- = \beta v$. Je-li na př. $\alpha \neq 0$, je

$$v = \alpha^{-1} \,.\, v_+ \,.$$

79. Věta: *Buď Y L-lineál, v buď kladný vrchol jednotkové koule; nechť $0 \leqq x \leqq v$. Pak je x násobkem v.*

Důkaz: Platí $1 = \|v\| = \|x\| + \|v - x\|$; podle 77 je x násobkem v.

80. Věta: *Buď Y L-lineál, v_1, v_2 buďte kladné vrcholy jednotkové koule. Pak je buď $v_1 = v_2$ nebo $v_1 \wedge v_2 = 0$.*

Důkaz: Buď $0 < x \leqq v_1 \wedge v_2$. Podle 79 je $x = \alpha v_1 = \beta v_2$, kde ovšem $\alpha, \beta \geqq \geqq 0$, tedy $0 < \|x\| = \alpha\|v_1\| = \beta\|v_2\| = \alpha = \beta$, tedy $v_1 = v_2$.

81. Věta: *Množina všech kladných vrcholů jednotkové koule v L-lineálu Y je lineárně nezávislá.*

Důkaz: Plyne snadno z 80 a z poznámky k 16.

82. Věta: *Buď Y K-lineál; buď K-lineál R_1 částí $R(Y)$.*

Nechť platí implikace

$$f \in R_1, \quad g, h \in R(Y), \quad g \wedge h = 0, \quad g + h = f \Rightarrow g, h \in R_1 .$$

Předpokládejme dále, že je R_1 L_0-lineálem, který obsahuje více než jeden prvek. Pak je každý vrchol jednotkové koule v R_1 multiplikativní funkcionálou[5]) *(a má normu 1). Je-li R_1 dokonce L-lineálem, je naopak též každá multiplikativní funkcionála s normou 1 vrcholem jednotkové koule v R_1.*

Důkaz: Buď f vrchol jednotkové koule v R_1. Podle 78 můžeme předpokládat $f \geqq 0$. Předpokládejme dále, že existují a, b tak, že platí $a \wedge b = 0$, $f(a) \, . \, f(b) > 0$. Podle 32 existují $g, h \in R(Y)$ tak, že platí

$$g \wedge h = 0, \quad g + h = f ,$$
$$h(a) = f(a), \quad g(b) = f(b) .$$

Podle předpokladu $g, h \in R_1$; protože je R_1 L_0-lineál, je $\|g\| + \|h\| = \|f\|$. Avšak g, h zřejmě nejsou násobky f, což je ve sporu s větou 77; tím je dokázáno, že f je multiplikativní funkcionála.

Budiž nyní R_1 L-lineál; buď f multiplikativní funkcionála, $f \in R_1$, $\|f\| = 1$. Podle 37 můžeme předpokládat $f \geqq 0$. Nechť $f = f_1 + f_2$, $1 = \|f\| = \|f_1\| + \|f_2\|$. Podle 59 je $f_i \geqq 0$ $(i = 1, 2)$. Je-li $f(a) = 0$, je (viz poznámku k 37) také $f(|a|) = 0$, tím spíše $f_i(|a|) = 0$, $f_i(a) = 0$. Podle známé věty (viz na př. [6], věta 1.17) jsou f_i násobky f. Podle 77 je f vrchol.

Poznámka. Obsahuje-li normovaný lineární prostor Y více než jeden prvek, obsahuje množina $C(Y)$ také více než jeden prvek. (K důkazu můžeme použít na př. věty 6.2 z [6], kde vezmeme za Q množinu, obsahující samotnou nulu, a kde volíme $a \neq 0$.) Je-li zejména Y M_0-lineál (resp. M-lineál), který obsahuje více než jeden prvek, můžeme podle 46 a 61 (resp. 62) položit v předešlé větě $R_1 = C(Y)$.

Dostáváme tak tyto věty:

Je-li Y M_0-lineál, je každý vrchol jednotkové koule v $C(Y)$ multiplikativní funkcionálou (s normou 1). Je-li Y M-lineál, je množina všech vrcholů jednotkové koule v $C(Y)$ rovna množině všech multiplikativních funkcionál s normou 1.

83. Věta: *Buď Y K-okruh. Pokládejme podle 73 $R(Y)$ za L-lineál. Pak je funkcionála $f \in R(Y)$ kladným vrcholem jednotkové koule v $R(Y)$, právě když je okruhovým homomorfismem.*

---

[5]) Viz 36.

Důkaz: Plyne ihned z 75 a 82.

Poznámka. Všimněme si, že věta 83 charakterisuje jen ty homomorfismy, které patří do $R(Y)$. V některých K-okruzích však existují homomorfismy, které zobrazují okruh na těleso reálných čísel a které nejsou regulárními funkcionálami. Budiž na př. Y množina všech funkcí v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, které lze „po částech" vyjádřit polynomy. Přiřaďme každé funkci $x \in Y$ číslo $f(x)$ tímto předpisem: Existuje číslo $\varepsilon > 0$ a polynom $p(t)$ tak, že pro $t \in \langle 0, \varepsilon\rangle$ je $x(t) = p(t)$; položme

$$f(x) = p(-1) .$$

Snadno se zjistí, že f je homomorfismus a že $\sup_{0 \leqq x \leqq 1} f(x) = \infty$. Přitom je Y dokonce Kj-lineálem.

Má-li však K-okruh Y tu vlastnost, že ke každému $a \in Y$, $a \geqq 0$ existuje b tak, že $b^2 = a$, je ovšem $f(a) = f(b^2) = (f(b))^2 \geqq 0$ pro každé $a \geqq 0$ a pro každý homomorfismus f. Vidíme, že je v tomto případě každý homomorfismus, který zobrazuje Y do tělesa reálných čísel, nezápornou (a tedy regulární) funkcionálou.

84. Je-li P libovolná neprázdná množina, pak systém F všech konečných funkcí na množině P můžeme pokládat za topologický kartézský součin tolika přímek, kolik prvků má množina P.

Je-li P dokonce lineární prostor, je-li dále L množina všech aditivních a homogenních funkcí na P a pokládáme-li L za podprostor topologického prostoru F, říkáme, že jsme v L definovali *slabou topologii*. Definující okolí bodu $f_0 \in L$ jsou pak množiny tvaru

$$U(f_0; x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) = \underset{f}{E}[f \in L, \ |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon \ (i = 1, 2, \ldots, n)],$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in P$, $0 < \varepsilon \in E_1$; snadno zjistíme, že zde můžeme předpokládat $\varepsilon = 1$. Je-li P dokonce normovaný lineární prostor, můžeme předpokládat $\|x_i\| \leqq 1$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$; pak se ovšem již nesmíme omezovat na $\varepsilon = 1$.

Jednotkovou kouli v normovaném lineárním prostoru Y budeme značit S; je tedy $S = \underset{x}{E}[x \in Y, \|x\| \leqq 1]$. Jednotkovou kouli v $C(Y)$ budeme značit S_c. Pak platí:

85. Věta: *Množina S_c je kompaktní ve slabé topologii.*

Důkaz: Buď B množina všech funkcí φ na Y, pro něž platí $|\varphi(x)| \leqq \|x\|$ pro každé $x \in Y$. Pak je B kartézským součinem intervalů $\langle -\|x\|, \|x\|\rangle$. Zřejmě platí $S_c \subset B$; definujeme-li v B topologii jako v kartézském součinu topologických prostorů, snadno se zjistí, že S_c je ve slabé topologii podprostorem B. Podle známé věty je B (Hausdorffův) kompaktní prostor; stačí tedy dokázat, že množina S_c je v B uzavřená. Zvolme $\varphi \in B$, $\varphi \in \overline{S_c}$; dokážeme napřed, že je φ aditivní. Buďte x, y prvky Y; zvolme ještě $\varepsilon > 0$. Pak v okolí funkce φ, určeném body x, y, $x + y$ a číslem ε, leží nějaký prvek $f \in S_c$; platí tedy

$$|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad |\varphi(y) - f(y)| < \varepsilon, \quad |\varphi(x + y) - f(x + y)| < \varepsilon .$$

Odtud však snadno plyne $|\varphi(x) + \varphi(y) - \varphi(x + y)| < 3\varepsilon$, tedy $\varphi(x) + \varphi(y) = = \varphi(x + y)$.

Tím jsme dokázali, že je φ aditivní funkce; protože pro každé $x \in Y$ platí $|\varphi(x)| \leqq \|x\|$, je $\varphi \in S_0$.

86. Věta: *Buď Y normovaný lineární prostor. Nechť $\emptyset \neq A \subset C(Y)$; buď A kompaktní ve slabé topologii. Nechť $x \in Y$. Pak existuje vrchol v množiny A tak, že platí*

$$v(x) \geqq f(x)$$

pro každé $f \in A$.

Důkaz:[6]) Buď $x = x_1$; buďte $x_2, x_3, \ldots, x_\omega, \ldots, x_\nu, \ldots$ ostatní prvky prostoru Y v nějakém dobrém uspořádání. Položme $K_0 = A$. Jsou-li dány množiny K_ξ pro $\xi < \nu$, které jsou neprázdné, kompaktní ve slabé topologii a které tvoří nerostoucí systém, utvořme napřed množinu

$$L_\nu = \prod_{\xi<\nu} K_\xi \ .$$

Množina L_ν je opět neprázdná a kompaktní ve slabé topologii. Funkce $\overline{x_\nu}$ na množině $C(Y)$, určená vztahem $\overline{x_\nu}(f) = f(x_\nu)$, je spojitá; množina M těch bodů z L_ν, kde funkce $\overline{x_\nu}$ nabývá (na množině L_ν) svého maxima, není tudíž prázdná. Dále je M uzavřená v L_ν, tedy kompaktní, a platí $M \subset K_\xi$ pro každé $\xi < \nu$. Můžeme proto položit

$$K_\nu = M \ .$$

Tak definujeme transfinitní monotonní posloupnost neprázdných kompaktních množin K_ν; buď Q její průnik. Je ovšem opět $Q \neq \emptyset$. Nechť $f, g \in Q$, $x_\nu \in Y$. Protože $Q \subset K_\nu \subset L_\nu$, nabývá funkce $\overline{x_\nu}$ v bodech f, g maximální hodnoty na L_ν; zejména platí

$$\overline{x_\nu}(f) = \overline{x_\nu}(g) = g(x_\nu) = f(x_\nu) \ .$$

Je tedy $f(x) = g(x)$ pro každé x, $f = g$.

Vidíme, že množina Q je jednobodová; buď v její prvek. Dokážeme nyní, že v je vrcholem množiny A. Nechť tedy $v = \alpha f + \beta g$, kde $\alpha\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, $f, g \in A$, $f \neq g$. Protože Q obsahuje jen jeden prvek, existují ξ tak, že není zároveň $f \in K_\xi$, $g \in K_\xi$; buď ν nejmenší takový index. Nechť na př. f non $\in K_\nu$; je ovšem $\nu > 0$, protože $f \in A = K_0$. Je však $f \in K_\eta$, $g \in K_\eta$ pro $\eta < \nu$, tedy $f \in L_\nu$, $g \in L_\nu$.

Protože $v \in K_\nu$, je pro $y = x_\nu$

$$f(y) < v(y) \ ,$$
$$g(y) \leqq v(y) \ ,$$

tedy $v(y) = \alpha f(y) + \beta g(y) < \alpha v(y) + \beta v(y) = v(y)$ — spor.

Tím je dokázáno, že v je vrchol množiny A.

---

[6]) Důkaz je převzat z [5].

Protože $v \in K_1 \subset L_1 = K_0 = A$, platí (pro $x_1 = x$)

$$v(x) \geqq f(x)$$

pro každé $f \in A$.

87. Věta: *Buď Y normovaný lineární prostor; nechť $x \in Y$. Pak existuje vrchol v jednotkové koule v $C(Y)$ tak, že platí $v(x) = \|x\|$.*

Důkaz: Podle známé věty (viz na př. [6], věta 6.2) existuje $f \in C(Y)$, $\|f\| = 1$ tak, že $f(x) = \|x\|$. Zvolíme-li v předešlé větě $A = S_c$, vidíme, že existuje vrchol v množiny S_c tak, že platí $v(x) \geqq f(x) = \|x\|$. Platí ovšem rovnost.

Poznámka. Je-li P libovolná neprázdná množina, pak pro každou funkci f na množině P klademe

$$\|f\| = \sup |f(x)|, \text{ kde } x \in P .$$

Je-li Y lineární prostor, jehož prvky jsou omezené funkce na množině P, stane se tak Y normovaným lineárním prostorem.

Z věty 87 nyní plyne:

Buď Y normovaný lineární prostor; buď V množina všech vrcholů jednotkové koule v $C(Y)$. Přiřaďme každému $x \in Y$ funkci $\bar{x}$ na množině V obvyklým způsobem. Pak je zobrazení $x \to \bar{x}$ aditivní, homogenní a isometrické.

(Důkaz provede čtenář snadno sám.)

88. Věta: *Buď Y normovaný K-lineál. Buď N množina všech nezáporných funkcionál z $C(Y)$, M budiž množina všech multiplikativních funkcionál z $C(Y)$. Pak jsou množiny N, M uzavřené v $C(Y)$ ve slabé topologii.*

Důkaz: Zvolme $f \in \overline{M}$, $x, y \in Y$, $x \wedge y = 0$ a předpokládejme, že není $f(x) \cdot f(y) = 0$. Buď $\varepsilon = \min(|f(x)|, |f(y)|)$. Pak existuje $g \in M$ tak, že platí

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad |f(y) - g(y)| < \varepsilon .$$

Je-li však na př. $g(x) = 0$, je $|f(x)| < \varepsilon$, což je spor.

Buď nyní $f \in \overline{N}$, $a \geqq 0$; předpokládejme, že není $f(a) \geqq 0$, nýbrž $f(a) < 0$. Buď $\varepsilon = -f(a)$. Opět existuje $g \in N$, t. j. $g \geqq 0$, tak, že platí

$$|g(a) - f(a)| < \varepsilon ,$$

tedy $\varepsilon = -f(a) \leqq g(a) - f(a) < \varepsilon$; opět máme spor.

89. Věta: *Buď Y Kj-lineál.*[7]*) Buď $Q = \underset{f}{E}[0 \leqq f \in C(Y), \|f\| = 1]$. Pak je Q kompaktní ve slabé topologii.*

Důkaz: Podle 85 stačí dokázat, že je množina Q v $C(Y)$ uzavřená (při slabé topologii). Zvolme tedy $f \in \overline{Q}$. Víme, že je $\|f\| \leqq 1$; podle 88 je $f \geqq 0$, podle 66 je tedy $\|f\| = f(j)$. Kdyby bylo $\|f\| < 1$, bylo by pro jisté $g \in Q$

$$1 - f(j) = |g(j) - f(j)| < 1 - \|f\| = 1 - f(j) ,$$

což není možné. Je tedy $\|f\| = 1$.

---

[7]) Viz 22.

Poznámka. Buď Y normovaný lineární prostor, v němž existuje nekonečná lineárně nezávislá množina. Buď $Q_1 = \underset{f}{E}[f \in C(Y), \|f\| = 1]$. Nechť $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n \in Y$. Buď Z množina všech lineárních kombinací prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Podle známé věty (viz [6], věta 4.6) je Z úplný prostor, tedy je Z uzavřené v Y. Je ovšem $Z \neq Y$; existuje tedy (viz [6], věta 6.2) funkcionála $f \in C(Y)$ tak, že platí $\|f\| = 1$, ale $f(x) = 0$ pro každé $x \in Z$. Je tedy $f \in Q_1$, ale $f(x_i) = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Vidíme, že v každém okolí $U(0; x_1, x_2, \ldots, x_n; \varepsilon)$ leží nějaký prvek $f \in Q_1$, tedy $0 \in \overline{Q_1}$; množina $\overline{Q_1}$ není ve slabé topologii uzavřená. Tvrzení věty 89 není tedy nijak triviální.

90. Věta: *Buď Y normovaný K-lineál. Pak je množina všech nezáporných multiplikativních funkcionál z jednotkové koule v $C(Y)$ kompaktní ve slabé topologii. Je-li Y Kj-lineál, je také množina všech kladných vrcholů jednotkové koule v $C(Y)$ kompaktní ve slabé topologii.*

Důkaz: První tvrzení plyne ihned z 85 a 88.

Je-li nyní Y Kj-lineál, je podle 64 také M-lineálem. Podle poznámky k větě 82 jsou kladnými vrcholy jednotkové koule v $C(Y)$ právě všechny nezáporné multiplikativní funkcionály s normou 1; ty však tvoří podle 88 a 89 kompaktní množinu.

91. Věta: *Buď Y M_0-lineál, který obsahuje více než jeden prvek; buď V množina všech kladných vrcholů jednotkové koule v $C(Y)$. Přiřaďme každému $x \in Y$ funkci $\bar{x}$ na množině V předpisem*

$$\bar{x}(v) = v(x) \text{ pro každé } v \in V .$$

Pak je zobrazení $x \to \bar{x}$ isomorfní a isometrické.

Při slabé topologii je V úplně regulární, funkce $\bar{x}$ jsou na V spojité a ke každým dvěma bodům $v_1 \neq v_2$ z V existuje $x \in Y$ tak, že $v_1(x) = 0 \neq v_2(x)$.

Důkaz: Kladné vrcholy jsou podle poznámky k větě 82 kladnými multiplikativními funkcionálami; podle 39 je zobrazení $x \to \bar{x}$ homomorfní. Budiž nyní $0 < x \in Y$. Podle 87 existuje vrchol v jednotkové koule v $C(Y)$ tak, že $v(x) = \|x\|$. Podle 78 je buď $v > 0$ nebo $v < 0$; protože $x > 0$ a $v(x) > 0$, je $v > 0$, tedy $v \in V$. Vidíme, že platí $\|x\| \leqq \|\bar{x}\|$ (význam $\|\bar{x}\|$ definujeme ovšem podle poznámky k 87). Je však $|\bar{x}(v)| = |v(x)| \leqq \|v\| \cdot \|x\| = \|x\|$ pro každé $v \in V$, tedy je též $\|\bar{x}\| \leqq \|x\|$, takže platí

$$\|x\| = \|\bar{x}\|$$

pro každé $x \geqq 0$. Pro libovolné $x \in Y$ platí nyní $\|x\| = \||x|\| = \|\overline{(|x|)}\| = \||\bar{x}|\| = \|\bar{x}\|$.

Je zřejmé, že je V úplně regulární a že funkce $\bar{x}$ jsou na V spojité. Zvolme nyní $v_1, v_2 \in V$, $v_1 \neq v_2$. Kdyby platila implikace $v_1(x) = 0 \Rightarrow v_2(x) = 0$, bylo by podle známé věty (viz [6], věta 1.17) v_2 násobkem v_1, což není možné. Existuje tedy $x \in Y$ tak, že platí $\bar{x}(v_1) = v_1(x) = 0$, ale $\bar{x}(v_2) = v_2(x) \neq 0$.

92. Věta: *Každý M_0-lineál je zároveň M-lineál; každý L_0-lineál je zároveň L-lineál.*

Důkaz: Podle předešlé věty je M_0-lineál Y isometrický a isomorfní s K-lineálem Y_1 všech funkcí $\bar{x}$; Y_1 je však zřejmě M-lineál, tedy je Y také M-lineál. Budiž nyní Z L_0-lineál. Podle 63 je $C(Z)$ M_0-lineál, tedy M-lineál; podle 62 je $C(C(Z))$ L-lineál. Podle 56 je Z isometrické a isomorfní s nějakou částí $C(C(Z))$; je tedy Z také L-lineál.

Poznámka. Ve větě 91 jsme dokázali, že lze každý M-lineál representovat (se zachováním všech operací) jako jakýsi systém funkcí, které jsou spojité na úplně regulárním topologickém prostoru. Místo množiny V všech kladných vrcholů jsme mohli vzít také na př. množinu T všech nezáporných multiplikativních funkcionál s normou ≤ 1 nebo množinu $\bar{V} \subset T$. Je celkem zřejmé, že bychom dostali „stejně dobrou" representaci a základní prostor by byl dokonce kompaktní; z naší věty by však neplatila poznámka o „oddělitelnosti" bodů základního prostoru pomocí funkcí $\bar{x}$.

Ukážeme na příkladě, že může být $\bar{V} \neq V$. Budiž Y množina všech posloupností reálných čísel, které konvergují k nule. Definice lineárních operací a polouspořádání leží nasnadě; pro $x = \{\xi_n\} \in Y$ klademe $\|x\| = \sup\limits_n |\xi_n| = \max\limits_n |\xi_n|$.

Zvolme $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Y$, $\varepsilon > 0$. Pak existuje N tak, že pro $n > N$ je

$$|\xi_n^{(i)}| < \varepsilon \ , \ i = 1, 2, \ldots, m$$

(klademe $x_i = \{\xi_n^{(i)}\}$). Zvolme nějaké $n_0 > N$ a utvořme funkcionálu

$$f(x) = \xi_{n_0}$$

(kde $x = \{\xi_n\}$). Pak je f zřejmě kladná multiplikativní funkcionála s normou 1 a platí $|f(x_i)| < \varepsilon$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$. Vidíme, že nulová funkcionála leží v uzávěru množiny V.

Označíme-li symbolem P množinu T nebo množinu $\bar{V}$, vidíme, že ke každému $t \in P - V$ existuje číslo α a prvek $v \in V$ tak, že platí $0 \leq \alpha < 1$, $t = \alpha v$; pak je ovšem

$$\bar{x}(t) = t(x) = \alpha v(x) = \alpha \bar{x}(v)$$

pro každé $x \in Y$. Vidíme, že hodnoty funkcí $\bar{x}$ na množině $P - V$ jsou v tomto smyslu určeny jejich hodnotami na množině V. Odtud plyne, že množina všech funkcí x není vždy rovna množině všech spojitých funkcí na prostoru P. (To je ostatně patrné již z toho, že množina všech spojitých funkcí na prostoru P je úplným prostorem, zatím co M-lineál Y jím být nemusí.) Zachováme-li však označení, můžeme vyslovit tuto větu:

Budiž P kompaktní prostor, pro nějž platí $\bar{V} \subset P \subset T$. Přiřaďme každému $t \in P - V$ prvek $\varphi(t) \in V$ a číslo $\alpha(t)$ tak, aby platilo

$$t = \alpha(t) \, . \, \varphi(t) \ .$$

Budiž Z množina všech funkcí z, které jsou spojité na prostoru P a které pro každé $t \in P - V$ splňují vztah

$$z(t) = \alpha(t) \, . \, z(\varphi(t)).$$

Pak je množina všech funkcí $\bar{x}$ hustá v Z.

Tuto větu v podstatě dokazuje Kakutani v [2]. Podáme zde poněkud jiný důkaz; dokážeme totiž následující větu, která podle 91 je obecnější než věta právě uvedená.

93. Věta: *Budiž P kompaktní prostor; nechť $P = P_1 + P_2$, $P_1 P_2 = \emptyset$. Buď každému $t \in P_2$ přiřazen prvek $\varphi(t) \in P_1$ a číslo $\alpha(t)$. Označme písmenem Z množinu všech funkcí z na P, které jsou spojité a splňují pro každé $t \in P_2$ vztah*

$$z(t) = \alpha(t) \, . \, z(\varphi(t)) \; .$$

Buď dále Y K-lineál, který má více než jeden prvek a který je částí Z. Nechť ke každé dvojici $t_1 \neq t_2$ bodů z P_1 existuje funkce $y \in Y$ tak, že platí $y(t_1) = 0$, $y(t_2) = 1$. Pak je Y husté v Z.

Důkaz: Zvolme libovolné $z \in Z$ a libovolné $\varepsilon > 0$. Napřed dokážeme, že ke každému $t_0 \in P$ existuje takové $y^{(t_0)} \in Y$, že platí

$$\left.\begin{aligned} y^{(t_0)}(t_0) &= z(t_0) \; , \\ y^{(t_0)} &\leq z + \varepsilon \; . \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Zvolme tedy $t_0 \in P$. Rozeznávejme dva případy:

a) $t_0 \in P_1$. Z našich předpokladů snadno plyne, že ke každému $t \in P_1$ existuje $y_t \in Y$ tak, že platí

$$y_t(t_0) = z(t_0), \quad y_t(t) = z(t) \qquad \binom{*}{*}$$

(má-li množina P_1 jen jeden prvek, je třeba použít toho, že Y má více než jeden prvek). Je-li $s \in P_2$, položme $\varphi(s) = t$; pro funkci y_t pak platí

$$y_t(s) = \alpha(s) \, . \, y_t(t) = \alpha(s) \, . \, z(t) = z(s)$$

(a ovšem $y_t(t_0) = z(t_0)$).

Klademe-li pro $s \in P_2$ $y_s = y_t$, kde $t = \varphi(s)$, vidíme tedy, že ke každému $t \in P$ existuje funkce y_t, která splňuje vztahy $\binom{*}{*}$. Přiřaďme nyní každému $t \in P$ okolí U_t tak, aby pro každé $t' \in U_t$ platilo $y_t(t') < z(t') + \varepsilon$. Jestliže nyní okolí $U_{t_1}, \ldots, U_{t_n}$ pokrývají P, pak funkce

$$y^{(t_0)} = y_{t_1} \wedge \ldots \wedge y_{t_n}$$

splňuje oba vztahy (*).

b) $t_0 \in P_2$. Položíme-li $y^{(t_0)} = y^{(t_1)}$, kde $t_1 = \varphi(t_0)$ a kde funkce $y^{(t_1)}$ je určena podle bodu a), jsou vztahy (*) zřejmě opět splněny.

Odtud plyne ihned, že můžeme každému $t \in P$ přiřadit funkci $y^{(t)}$ a okolí $U^{(t)}$ tak, že platí $y^{(t)}(t') > z(t') - \varepsilon$ pro každé $t' \in U^{(t)}$ a dále $y^{(t)} \leq z + \varepsilon$. Jestliže opět okolí $U^{(t_1)}, \ldots, U^{(t_n)}$ pokrývají P, pak funkce $y = y^{(t_1)} \vee \ldots \vee y^{(t_n)}$ zřejmě splňuje podmínku $|z - y| \leq \varepsilon$; tím je důkaz proveden.

Poznámka 1. Čtenář snadno zjistí, že žádné z čísel $\alpha(t)$, která se vyskytují v této větě, nemůže být záporné (jinak by Y nebylo K-lineálem).

Poznámka 2. Z právě dokázané věty plyne na př. tento důsledek:

Je-li P kompaktní prostor a je-li Y K-lineál, jehož prvky jsou spojité funkce na P a který má tu vlastnost, že ke každé dvojici $t_1 \neq t_2$ prvků z P existuje $y \in Y$, pro něž platí $y(t_1) = 0$, $y(t_2) = 1$, pak je Y husté v množině všech spojitých funkcí na prostoru P, pokud má prostor P aspoň dva body nebo Y více než jeden prvek.

Podobně lze dokázat na př. tuto větu:

Buď P kompaktní prostor; buď x spojitá funkce na P. Buď Y K-lineál, jehož prvky jsou spojité funkce na P. Nechť ke každé dvojici t_1, t_2 bodů z P existuje $y \in Y$ tak, že platí

$$y(t_i) = x(t_i) \quad (i = 1, 2) .$$

Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $y \in Y$ tak, že platí

$$|x(t) - y(t)| < \varepsilon$$

pro každé $t \in P$.

Poznámka 3. Je-li Y Kj-lineál, je podle 90 množina V kompaktní; podle naší věty je pak množina všech $\bar{x}$ hustá v množině všech spojitých funkcí na prostoru V. Odtud plyne ihned:

Je-li Kj-lineál Y úplný jako metrický prostor, je množina všech $\bar{x}$ rovna množině všech funkcí, které jsou spojité na prostoru V.

94. Věta: *Budiž P úplně regulární topologický prostor; buď Y množina všech omezených spojitých funkcí na prostoru P. Pak množina všech kladných vrcholů jednotkové koule v prostoru všech regulárních funkcionál na Y je při slabé topologii homeomorfní s β-obalem prostoru P.*

Důkaz: Víme, že β-obal můžeme pokládat za množinu všech homomorfních zobrazení okruhu Y na těleso reálných čísel; množinu všech spojitých funkcí na $\beta(P)$ tvoří funkce $\bar{x}$ tvaru

$$\bar{x}(v) = v(x) ,$$

kde $x \in Y$ a kde v je příslušný homomorfismus. Protože okruh Y obsahuje s každým svým nezáporným prvkem druhou odmocninu, je každý takový homomorfismus nezápornou (a tedy regulární) funkcionálou. Podle 83 je tedy množina V všech kladných vrcholů jednotkové koule v prostoru všech regulárních funkcionál totožná s množinou všech takovýchto homomorfismů.

Protože Y je Kj-lineál, který je úplným metrickým prostorem, je podle poznámky 3 k 93 množina všech $\bar{x}$ rovna množině všech funkcí, které jsou při slabé topologii spojité na množině V. Množina V je však kompaktní, tedy úplně regulární, a její topologie je proto množinou všech spojitých funkcí určena jednoznačně; je tedy totožná s obvyklou topologií v β-obalu.

Poznámka. Je-li prostor P kompaktní, je ovšem $\beta P = P$ a množina V je homeomorfní s prostorem P. Vidíme, že množinou V může být libovolný kompaktní prostor.

95. Ve své práci [4] uvádí Hewitt tuto větu:

Budiž P úplně regulární topologický prostor; buď Y množina všech spojitých funkcí na P. Pak je množina všech funkcionál f tvaru

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x(t_i)$$

($x \in Y$, $\alpha_i \in E_1$, $t_i \in P$) ve slabé topologii hustá v $R(Y)$.

Hewittův důkaz je v podstatě velmi složitý; užívá se při něm dokonce některých hlubších vět z theorie míry v topologických prostorech. Naše věta 98 ukazuje, že Hewittovu větu lze snadno zobecnit; z dalších úvah je pak patrné, že lze tuto větu jistým způsobem formulovat i pro abstraktní prostory. To vše snadno vyplyne z následující pomocné věty.

96. Věta: *Buď Y lineární prostor, jehož prvky jsou (konečné) funkce na neprázdné množině P. Budiž L množina všech aditivních a homogenních funkcí na Y; budiž L_0 množina všech $g \in L$, k nimž existují $t_1, t_2, \ldots, t_m \in P$ a čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ tak, že platí*

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x(t_i)$$

pro každé $x \in Y$.

Pak ke každému $f \in L$ a ke každé konečné skupině $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Y$ existuje $g \in L_0$ tak, že platí

$$g(x_i) = f(x_i)$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Důkaz: Napřed dokážeme, že ke každé lineárně nezávislé skupině $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n \in Y$ existují $t_1, t_2, \ldots, t_n \in P$ tak, že determinant o prvcích $x_i(t_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ je různý od nuly. Pro $n = 1$ to zřejmě platí; nechť to platí pro jisté n. Zvolme lineárně nezávislou skupinu $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Podle indukčního předpokladu existují $t_1, t_2, \ldots, t_n \in P$ tak, že determinant o prvcích $x_i(t_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ je různý od nuly. Utvořme matici $\mathfrak{M}$ o prvcích $x_i(t_j)$, kde $i = 1, 2, \ldots, n, n + 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Buď D_i determinant matice, která vznikne z matice $\mathfrak{M}$ vynecháním i-tého řádku; buď $D'_i = (-1)^{i+n+1} . D_i$. Budiž dále

$$y = x_1 D'_1 + x_2 D'_2 + \ldots + x_n D'_n + x_{n+1} D'_{n+1} .$$

Protože prvky $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ jsou lineárně nezávislé a protože $D'_{n+1} = D_{n+1} \neq 0$, není $y = 0$; existuje tedy $t_{n+1} \in P$ tak, že platí $y(t_{n+1}) \neq 0$. Rozvedeme-li nyní determinant o prvcích $x_i(t_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n + 1)$ podle prvků posledního sloupce, dostaneme právě číslo $y(t_{n+1}) \neq 0$. Tím je proveden indukční krok a naše tvrzení je dokázáno.

Mějme nyní libovolnou konečnou skupinu $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Y$ a libovolné $f \in L$. Buďte $x_1, \ldots, x_m$ lineárně nezávislé, $x_{m+1}, \ldots, x_n$ buďte jejich lineárními kombinacemi. Podle dokázaného tvrzení existují $t_1, t_2, \ldots, t_m \in P$ tak, že systém rovnic

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_i(t_j) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

má řešení v α_j. Určíme-li $g \in L_0$ vztahem

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x(t_j) ,$$

vidíme, že platí

$$f(x_i) = g(x_i)$$

pro $i = 1, 2, \ldots, m$; z aditivity a homogenity plyne nyní snadno, že tento vztah platí také pro $i = 1, 2, \ldots, m, m + 1, \ldots, n$. Tím je vše dokázáno.

Poznámka. Věta 96 má charakter čistě algebraický; zřejmě bychom místo o funkcích mohli mluvit o zobrazeních do libovolného tělesa atd. a věta i důkaz by platily dále.

97. Věta: *Nechť Y, L, L_0 mají týž význam jako v předešlé větě. Pak je L_0 při slabé topologii husté v L.*

(Plyne ihned z 96.)

98. Věta: *Buď P topologický prostor; buď Q hustá část P. Buď Y lineární prostor, jehož prvky jsou spojité funkce na prostoru P. Buď L množina všech aditivních a homogenních funkcí na Y; buď L_1 množina všech $g \in L$ tvaru $g(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x(t_i)$, kde $t_1, \ldots, t_m \in Q$. Pak je L_1 při slabé topologii husté v L.*

Důkaz: Přiřaďme každé funkci $x \in Y$ parciální funkci x_Q na množině Q. Zobrazení $x \to x_Q$ je zřejmě isomorfismus; odtud věta snadno plyne.

99. Věta: *Budiž Y normovaný lineární prostor; buď V množina všech vrcholů jednotkové koule v $C(Y)$. Buď $[V]$ množina všech lineárních kombinací prvků množiny V. Pak je při slabé topologii $[V]$ husté v $C(Y)$.*

Důkaz: Podle poznámky k větě 87 lze Y pokládat za jakousi množinu funkcí na V. Nyní použijeme věty 97.

Poznámka. Je-li Y dokonce M-lineál, můžeme vzít za V také jen množinu všech kladných vrcholů.

Podobnou větu lze zřejmě dokázat pro libovolný lineární prostor Y, vezmeme-li za V takovou množinu aditivních a homogenních funkcí, aby ke každému $y \in Y$, kde $y \neq 0$, existovalo $v \in V$ tak, aby bylo $v(y) \neq 0$; pak můžeme totiž Y representovat jako systém funkcí $\bar{y}$, definovaných na množině V obvyklým způsobem. Množina $[V]$ je pak při slabé topologii hustá v množině všech aditivních a homogenních funkcí na Y.

LITERATURA

[1] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер:* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Москва-Ленинград 1950.

[2] *S. Kakutani:* Concrete representation of abstract (M)-spaces, Annals of Mathematics, *42* (1941), str. 994—1024.

[3] *H. F. Bohnenblust - S. Kakutani:* Concrete representation of (M)-spaces, Annals of Mathematics, *42* (1941), str. 1025—1028.

[4] *E. Hewitt:* Linear functionals on spaces of continuous functions, Fundamenta Mathematicae, *37* (1950), str. 161—189.

[5] *M. Krein - D. Milman:* On extreme points of regular convex sets, Studia Mathematica, IX (I), 1940, str. 133—138.

[6] *M. Katětov*: O normovaných vektorových prostorech, Rozpravy II. třídy České akademie, LIII, č. 45.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 79 (1954)

POZNÁMKA K JEDNOMU ŘEŠENÍ BIHARMONICKÉHO PROBLÉMU

IVO BABUŠKA, Praha.

(Došlo dne 19. května 1953.) DT: 517.946

G. A. Grinberg upozornil v [1] a společně s *N. N. Lebedëvem* a *Ja. S. Ufljandem* v [2] na jednu methodu řešení biharmonického problému v rovině pomocí orthonormálních řad. V této poznámce bude učiněno několik připomínek k této methodě a bude ukázána jedna modifikace Grinbergova postupu.

1. Řešení rovinného biharmonického problému orthonormálními řadami podle G. A. Grinberga.

V tomto odstavci vyložím stručně hlavní myšlenku Grinbergova postupu. Ukáži ji pouze pro řešení homogenního biharmonického problému $\Delta\Delta u = 0$. Při řešení nehomogenního problému je základní myšlenka stejná.

Problém formulujme takto: Buď Ω rovinná jednoduše souvislá oblast, ohraničená jednoduchou dostatečně hladkou křivkou C. Jest nalézti řešení rovnice $\Delta\Delta u = 0$, když na C nabývají funkce u a $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ (ν je vnější normála) předepsaných hodnot.

Předpokládejme, že řešení existuje a že

$$\iint_\Omega (\Delta u)^2 \, d\Omega < \infty \, .$$

Hlavní myšlenkou Grinbergovou jest rozvinutí funkce Δu pomocí orthonormálních funkcí.

Buď u_n ($n = 1, 2, \ldots$) uzavřený orthonormální systém harmonických funkcí. Podle předpokladu jest funkce Δu integrovatelná s kvadrátem na Ω. Lze ji tedy vyjádřit řadou

$$\Delta u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \, ,$$

kde

$$\alpha_n = \iint_\Omega (\Delta u) \, u_n \, d\Omega \, .$$

Koeficienty α_n můžeme vyjádřit pomocí u a $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ na C. Skutečně z Greenovy věty plyne relace

$$\int\int_{\Omega} (\Delta u)\, u_n \,\mathrm{d}\Omega = \int\int_{\Omega} u(\Delta u_n)\,\mathrm{d}\Omega + \int_C \left(u_n \frac{\partial u}{\partial \nu} - u\,\frac{\partial u_n}{\partial \nu}\right) \mathrm{d}s\,.$$

Poněvadž u_n je podle předpokladu harmonická funkce, je prvý integrál na pravé straně roven nule, takže platí

$$\alpha_n = \int_C \left(u_n \frac{\partial u}{\partial \nu} - u\,\frac{\partial u_n}{\partial \nu}\right) \mathrm{d}s.$$

Na C známe u a $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ jako okrajové podmínky. Můžeme tedy určit všechny koeficienty α_n a tím i funkci Δu.

Známe-li funkci Δu, určíme podle Grinberga hledanou funkci u jako řešení Dirichletova nebo Neumannova problému.

K methodě, jak ji navrhl G. A. Grinberg, váže se řada otázek. Jde především o problém uzavřenosti (úplnosti) systémů harmonických funkcí a o některé otázky konvergenční. Při numerickém počítání je dále nevýhodné, že je ve druhé fázi nutno provádět řešení Dirichletova neb Neumannova problému. Naznačené obtíže lze však překonati, jak bude ukázáno v této poznámce, alespoň pro oblasti s dostatečně hladkou hranicí.

K oblastem s hranicí po částech hladkou, které jsou v aplikacích nejdůležitější, se vrátím někdy později.

Poznámka. Biharmonický rovinný problém má velkou důležitost v aplikacích. Tak řešení rovinného problému pružnosti jest vlastně řešení biharmonického problému. Na biharmonický problém se také snadno převede řešení napjatosti v deskách.

2. Některé pomocné věty.

Definice 1. *Buď C jednoduchá orientovaná hladká křivka. Buď $\vartheta(s)$ úhel kladného směru tečny s osou x, kde s je délka oblouku. Nechť $\vartheta(s)$ jest totálně spojitá a $\frac{\mathrm{d}\vartheta(s)}{\mathrm{d}s} \in L_p$, $p > 1$, t. j. nechť $\int_C \left|\frac{\mathrm{d}\vartheta(s)}{\mathrm{d}s}\right|^p \mathrm{d}s < \infty$. Potom budeme říkat, že křivka C jest dostatečně hladká. Orientaci předpokládejme tak, že vnitřek je po levé straně.*

Věta 1. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď $\omega(\zeta)$ holomorfní funkce, která konformně zobrazuje jednotkový kruh $\Gamma = E[\zeta, |\zeta| < 1]$ na Ω. Potom funkce $\omega'(\zeta)$ jest v uzavřeném jednotkovém kruhu $\overline{\Gamma} = E[\zeta, |\zeta| \leqq 1]$ spojitá* *a totálně spojitá na hranici $\gamma = E[\zeta, |\zeta| = 1]$. Při tom $|\omega'(\zeta)|$ má kladné minimum.*[1])

Důkaz: Viz [3], str. 322, Satz 1.

Definice 2. *Buď Ω omezená oblast. Budeme značit $L_2^{*\Omega}$ lineární prostor všech harmonických funkcí definovaných na Ω a integrovatelných s kvadrátem. Při tom budeme v $L_2^{*\Omega}$ předpokládat běžný skalární součin a metriku.*

Věta 2. *Prostor $L_2^{*\Omega}$ jest úplný. Mimo to platí: Jestliže $f_n \in L_2^{*\Omega}$ a $f_n \to f$ v prostoru $L_2^{*\Omega}$, potom f_n konverguje bodově skoro stejnoměrně, t. j. stejnoměrně na každé uzavřené množině $F \subset \Omega$.*[2])

Důkaz: Buď $f_n \in L_2^{*\Omega}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ cauchyovská posloupnost. Dokažme nejprve, že tato posloupnost konverguje bodově skoro stejnoměrně na Ω, t. j. že konverguje stejnoměrně na každé uzavřené množině $F \subset \Omega$. Buď $C\Omega$ komplement množiny Ω a nechť $\varrho(F, C\Omega) > 3\eta$ $(\eta > 0)$. Poněvadž F je kompaktní, existuje konečné pokrytí množiny F sférickými okolími $S(z_K, \eta)$ o středech $z_K \in F$ a poloměru η.

Poněvadž $f_n \in L_2^{*\Omega}$, jest f_n harmonická funkce a tedy platí

$$f_n(z_k + re^{i\Theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n(z_k + Re^{i\varphi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\Theta - \varphi)}\, d\varphi\,,$$

pokud $r < R < 3\eta$.

Budiž nyní $r \leqq \eta$. Vynásobme obě strany veličinou R a integrujme podle R od 2η do 3η. Dostaneme

$$f_n(z_k + re^{i\Theta})\, \tfrac{5}{2}\eta^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\eta}^{3\eta}\int_0^{2\pi} f_n(z_k + Re^{i\varphi}) \frac{(R^2 - r^2)\, R\, dR\, d\varphi}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\Theta - \varphi)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint_{E_k} f_n(z)\, K(r, \Theta, z)\, d\Omega\,,$$

kde

$$E_k = E[z, 2\eta \leqq |z - z_k| \leqq 3\eta]\,.$$

Jestliže je $r \leqq \eta$, jest $K(r, \Theta, z)$ omezená spojitá funkce.

Poněvadž posloupnost f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ jest cauchyovská, jest $f_n(z_k + re^{i\Theta})$ při pevném z_k, r, Θ cauchyovská číselná posloupnost. Existuje tedy funkce f, že $f_n \to f$ bodově stejnoměrně na $S(z_k, \eta)$. Poněvadž pokrytí jest konečné, je konvergence skoro stejnoměrná na Ω.

Dokažme nyní, že f je harmonická funkce.

---

[1]) Mluvíme-li o funkci $\omega'(\zeta)$ na hranici, míníme tím její spojité prodloužení z Γ.

[2]) Ve větě stačí předpokládat, že $f_n \to f$ v L_1. Poněvadž však dále se budeme zabývat jen prostory L_2, vyslovujeme větu ve výše uvedené formulaci.

Skutečně

$$f_n(z_k + r e^{i\Theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(z_k + R e^{i\varphi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\Theta - \varphi) \, d\varphi} \, .$$

Poněvadž f_n konverguje stejnoměrně bodově k f, platí

$$f(z_k + r e^{i\Theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_k + R e^{i\varphi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\Theta - \varphi)} \, d\varphi \, . \qquad (1)$$

Z toho však plyne, že f je harmonická funkce, neboť (1) je Poissonův integrál.

Definice 3. *Buď Ω omezená oblast. Budeme značit $L_2^{**\Omega}$ lineární prostor všech holomorfních funkcí definovaných na Ω s integrovatelným kvadrátem absolutní hodnoty. Při tom budeme v $L_2^{**\Omega}$ předpokládat běžnou kvadratickou metriku.*

Věta 3. *Jestliže jest $\varphi \in L_2^{**\Omega}$, potom platí, že $\mathrm{Re}\, \varphi \in L_2^{*\Omega}$ a $\mathrm{Im}\, \varphi \in L_2^{*\Omega}$.*

Důkaz: Platí $|\varphi|^2 = (\mathrm{Re}\, \varphi)^2 + (\mathrm{Im}\, \varphi)^2$.

Věta 4. *Buď C dostatečně hladká křivka, Ω její vnitřek. Buď φ holomorfní funkce definovaná na Ω taková, že $\mathrm{Re}\, \varphi \in L_2^{*\Omega}$. Potom jest $\varphi \Gamma \in L_2^{**\Omega}$. Dále buď $z_0 \in \Omega$. Jestliže v $L_2^{*\Omega}$ jest $\|\mathrm{Re}\, \varphi\| \leqq 1$ a jestliže $\mathrm{Im}\, \varphi(z_0) = 0$, potom v $L_2^{**\Omega}$ platí $\|\varphi\| \leqq A$, kde A závisí jen na C a na z_0 (nikoliv na φ).*

Důkaz: Buď $\omega(\zeta)$ konformní zobrazení jednotkového kruhu $\Gamma = E[\zeta, |\zeta| < 1]$ na Ω takové, že $\omega(0) = z_0$. Buď $\chi(\zeta) = \varphi(\omega(\zeta))$. Označme dále $u = \mathrm{Re}\, \varphi$ a $u^*(\zeta) = u(\omega(\zeta))$. Zřejmě jest $\mathrm{Re}\, \chi = u^*$. Poněvadž jest $\mathrm{Im}\, \varphi(z_0) = 0$, platí, že $\mathrm{Im}\, \chi(0) = 0$.

Snadno se dále nahlédne, že

$$\iint_\Omega u^2 \, d\Omega = \iint_\Gamma u^{*2} |\omega'|^2 \, d\Gamma \, ,$$

pokud jen integrál na jedné straně má smysl. Poněvadž podle předpokladu jest $u \in L_2^{*\Omega}$, jest také $u^* \in L_2^{*\Gamma}$, neboť podle věty 1 má $|\omega'(\zeta)|$ kladné minimum.

Funkci $\chi(\zeta)$ rozviňme v Taylorovu řadu. Je pak

$$\chi(r e^{i\varphi}) = \sum_0^\infty \alpha_k r_k e^{ik\varphi} \, .$$

Tato řada konverguje absolutně a stejnoměrně pro $r \leqq r_0 < 1$. Tedy platí

$$\mathrm{Re}\, \chi(r e^{i\varphi}) = u^*(r e^{i\varphi}) = \sum_0^\infty a_k r^k \cos k\varphi + \sum_1^\infty b_k r^k \sin k\varphi \, , \qquad (1)$$

kde

$$\alpha_k = a_k - i b_k \, .$$

Obě řady konvergují absolutně a stejnoměrně pro $r \leqq r_0 < 1$.

Dokážeme, že řada 1 konverguje v prostoru $L_2^{*\Gamma}$. Skutečně platí pro každé $r_0 < 1$

$$\iint_{|\zeta|<r_0} u^{*2}\,\mathrm{d}\Gamma \leqq \iint_{\Gamma} u^{*2}\,\mathrm{d}\Gamma = D < \infty\,.$$

Tedy

$$\iint_{|\zeta|<r_0} u^{*2}\,\mathrm{d}\Gamma = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}\Big(\sum_0^{\infty} a_k r^k \cos k\varphi) + \sum_1^{\infty} b_k r^k \sin k\varphi\Big)^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\sum_1^{\infty} a_k^2 \frac{r_0^{2k+2}}{k+1} + \sum_1^{\infty} b_k^2 \frac{r_0^{2k+2}}{k+1} + 2a_0^2 r_0^2\right]. \tag{2}$$

Poněvadž relace (2) platí pro každé $r_0 < 1$, je zřejmo, že řady

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_k^2}{k+1} \quad \text{a} \quad \sum_1^{\infty} \frac{b_k^2}{k+1} \tag{3}$$

konvergují. Z toho již snadno plyne, že řada (1) konverguje v prostoru $L_2^{*\Gamma}$.

Imaginární část funkce $\chi(\zeta)$ lze rozepsat ve tvaru

$$\operatorname{Im} \chi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = \sum_1^{\infty}(-\, b_k \cos k\varphi + a_k \sin k\varphi)\, r^k\,. \tag{4}$$

Tato řada konverguje absolutně a stejnoměrně pro $r \leqq r_0 < 1$. Vzhledem ke konvergenci řad (3) je zřejmo, že řada (4) konverguje i v prostoru $L_2^{*\Gamma}$. Odtud plyne, že jest $\chi \in L_2^{**\Gamma}$ a že

$$\iint_{\Gamma} |\chi|^2\,\mathrm{d}\Gamma \leqq 2 \iint_{\Gamma} u^{*2}\,\mathrm{d}\Gamma\,.$$

Podle věty 1 jest funkce $\omega'(\zeta)$ spojitá na uzavřeném kruhu $\overline{\Gamma}$ a tedy jest omezená. Při tom její maximum záleží jen na C a poloze bodu z_0.

Poněvadž jest

$$\iint_{\Omega} |\varphi|^2\,\mathrm{d}\Omega = \iint_{\Gamma} |\chi|^2\,|\omega'|^2\,\mathrm{d}\Gamma\,,$$

jest naše tvrzení dokázáno.

Definice 4. *Buď u harmonická funkce v jednotkovém kruhu $\Gamma = E[\zeta, |\zeta| < 1]$. Budeme říkat, že funkce u je typu H, jestliže*

$$\sup_{r<1} \int_0^{2\pi} (u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}))^2\,\mathrm{d}\varphi < \infty\,.$$

Poznámka. Lze ukázat, že pro každou harmonickou funkci u platí

$$1 > r_1 > r_2 \Rightarrow \int_0^{2\pi} (u(r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}))^2 \mathrm{d}\varphi \geqq \int_0^{2\pi} (u(r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}))^2\,\mathrm{d}\varphi$$

a proto místo suprema bychom mohli uvažovat limitu.

Definice 5. *Buď ψ holomorfní funkce v jednotkovém kruhu Γ. Budeme říkat, že funkce ψ je typu H_2, jestliže*

$$\sup_{r<1} \int_0^{2\pi} |\psi(re^{i\varphi})|^2 \, d\varphi < \infty .$$

Poznámka. Opět bychom místo suprema mohli uvažovat limitu.

Definice 6. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď u harmonická funkce definovaná na Ω. Budeme říkat, že funkce u je typu E, jestliže existuje konformní zobrazení $\omega(\zeta)$ jednotkového kruhu Γ na Ω takové, že $u(\omega(\zeta))$ je typu H.*

Poznámka. Konformní zobrazení Γ na Ω není zřejmě jediné. Lze však ukázat, že vlastnost „býti typu H" je nezávislá na tom, které konformní zobrazení Γ na Ω uvažujeme. Tak jestliže jsou $\omega_1(\zeta)$ a $\omega_2(\zeta)$ dvě různá konformní zobrazení jednotkového kruhu na oblast Ω, potom z toho, že $u(\omega_1(\zeta))$ je typu H, plyne, že i $u(\omega_2(\zeta))$ je typu H. Nám však bude stačit definice v uvedeném tvaru a proto nebudeme musit dokazovat tuto nezávislost.

Definice 7. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď φ holomorfní funkce definovaná na Ω. Budeme říkat, že funkce φ je typu E_2, jestliže existuje konformní zobrazení $\omega(\zeta)$ jednotkového kruhu Γ na Ω takové, že $\varphi(\omega(\zeta))$ je typu H_2.*

Věta 5. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď φ holomorfní funkce na Ω taková, že $\mathrm{Re}\,\varphi$ je typu E. Potom je φ typu E_2.*

Důkaz: Označme $\mathrm{Re}\,\varphi = u$. Podle předpokladu existuje konformní zobrazení $\omega(\zeta)$ jednotkového kruhu Γ na Ω takové, že $u^*(\zeta) = u(\omega(\zeta))$ jest typu H. Položme dále $\chi(\zeta) = \varphi(\omega(\zeta))$. Zřejmě jest $u^* = \mathrm{Re}\,\chi$.

Rozviňme funkci χ v Taylorovu řadu. Jest

$$\chi(re^{i\Theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k r^k e^{ik\Theta}$$

a tedy

$$\mathrm{Re}\,\chi(re^{i\Theta}) = u^*(re^{i\Theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \cos k\Theta + \sum_{k=1}^{\infty} b_k r^k \sin k\Theta ,$$

kde

$$\alpha_k = a_k - i b_k .$$

Podle předpokladu jest u^* typu H. Tedy jest

$$\int_0^{2\pi} (u^*(re^{i\Theta}))^2 \, d\Theta = \int_0^{2\pi} \Big(\sum_0^{\infty} a_k r^k \cos k\Theta + \sum_1^{\infty} b_k r^k \sin k\Theta\Big)^2 \, d\Theta =$$

$$= \pi\Big(2a_0^2 + \sum_1^{\infty} a_k^2 r^{2k} + \sum_1^{\infty} b_k^2 r^{2k}\Big) < D < \infty$$

pro každé $r < 1$.

Z toho však plyne, že řady

$$\sum_1^{\infty} a_k^2, \qquad \sum_1^{\infty} b_k^2 \tag{1}$$

jsou konvergentní.

Dále však, jak se snadno nahlédne, platí

$$\int_0^{2\pi} |\chi(re^{i\Theta})|^2 \, d\Theta = 2\pi \sum_0^{\infty} |\alpha_k|^2 \, r^{2k} \, .$$

Poněvadž řady (1) jsou konvergentní, jest $\chi(\zeta)$ typu H_2. Podle definice jest tedy φ typu E_2.

Věta 6. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď ψ holomorfní funkce definovaná na Ω a nechť ψ je typu E_2. Potom funkce* Re ψ *a* Im ψ *jsou typu E.*

Důkaz: Zřejmé.

Věta 7. *Buď ψ holomorfní funkce definovaná na jednotkovém kruhu $\Gamma = E[\zeta, |\zeta| < 1]$ a nechť je ψ typu H_2. Potom ψ jest skoro všude úhlově prodlužitelná na hranici $\gamma = E[\zeta, |\zeta| = 1]$.*

Důkaz: Viz [4], str. 82.

Věta 8. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď ψ holomorfní funkce definovaná na Ω a nechť ψ jest typu E_2. Potom ψ je skoro všude úhlově prodlužitelná na hranici C.*

Důkaz: Podle předpokladu jest ψ typu E_2. Existuje proto funkce $\omega(\zeta)$, která konformně zobrazuje jednotkový kruh Γ na Ω taková, že $\psi(\omega(\zeta))$ jest typu H_2. Podle předešlé věty jest $\psi(\omega(\zeta))$ skoro všude úhlově prodlužitelná na hranici. Poněvadž úhlové prodloužení na Γ zůstane úhlovým prodloužením i po konformním zobrazení na Ω, jest ψ úhlově prodlužitelná na hranici C.

Věta 9. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď ψ holomorfní funkce definovaná na Ω taková, že* Re ψ *jest typu E. Potom jsou funkce* Re ψ *a* Im ψ *skoro všude úhlově prodlužitelné na hranici.*

Důkaz: Tvrzení jest důsledkem vět 5 a 8.

Věta 10. *Buď ψ holomorfní funkce definovaná na jednotkovém kruhu Γ a nechť ψ je typu H_2. Jestliže $\psi(e^{i\varphi})$ jest úhlové prodloužení funkce ψ na hranici kruhu (to existuje pro skoro všechna $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (viz větu 7)), potom platí*

$$\lim_{\varphi \to 1-} \int_0^{2\pi} |\psi(\varrho e^{i\varphi}) - \psi(e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi = 0 \, .$$

Důkaz: Rozviňme funkci ψ v Taylorovu řadu. Bude

$$\psi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^k \, .$$

Pro $\varrho < 1$ platí Parsevalova rovnost

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi(\varrho e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 \varrho^{2k}.$$

Protože ψ je typu H_2, platí tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty .$$

Buď nyní $0 < \lambda < 1$. Dostáváme vztah

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi(\varrho e^{i\varphi}) - \psi(\lambda\varrho e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 \varrho^{2k}(1 - \lambda^k)^2 .$$

Přejdeme-li k limitě pro $\varrho \to 1$, plyne z Fatouovy nerovnosti

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi(e^{i\varphi}) - \psi(\lambda e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi \leqq \sum |\alpha_k|^2 (1 - \lambda^k)^2 ,$$

z čehož dále plyne naše tvrzení.

Věta 11. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď ψ holomorfní funkce definovaná na Ω taková, že $\mathrm{Re}\,\psi' \in L_2^{*\Omega}$. Potom jest ψ typu E_2. Dále budiž $z_0 \in \Omega$. Jestliže v $L_2^{*\Omega}$ jest $\|\mathrm{Re}\,\psi'\| \leqq 1$ a jestliže $\psi(z_0) = \mathrm{Im}\,\psi'(z_0) = 0$, potom platí $\int_C |\psi|^2 \, ds \leqq A$, kde A závisí pouze na C a z_0 (nikoliv na ψ).*

Důkaz: Buď $\omega(\zeta)$ konformní zobrazení jednotkového kruhu Γ na Ω. Nechť při tom jest $\omega(0) = z_0$. Položme $\chi(\zeta) = \psi'(\omega(\zeta))$. Podle předpokladu bude $\mathrm{Im}\,\chi(0) = 0$. Poněvadž podle věty 1 má $|\omega'(\zeta)|$ kladné minimum, platí

$$\iint_\Omega (\mathrm{Re}\,\psi')^2 \, d\Omega = \iint_\Gamma (\mathrm{Re}\,\chi)^2 \, |\omega'|^2 \, d\Gamma \geqq D \iint_\Gamma (\mathrm{Re}\,\chi)^2 \, d\Gamma .$$

Z věty 4 dále plyne, že

$$\iint_\Gamma |\chi|^2 \, d\Gamma \leqq D_1 \iint_\Gamma |\mathrm{Re}\,\chi|^2 \, d\Gamma \leqq D_2 \iint_\Omega (\mathrm{Re}\,\psi')^2 \, d\Omega .$$

Buď nyní $\varkappa(\zeta)$ holomorfní funkce na jednotkovém kruhu taková, že $\varkappa(0) = 0$ a $\varkappa'(\zeta) = \chi(\zeta)\,\omega'(\zeta)$. Platí

$$\iint_\Gamma |\varkappa'|^2 \, d\Gamma \leqq D_3 \iint_\Gamma |\chi|^2 \, d\Gamma \leqq D_4 \iint_\Gamma (\mathrm{Re}\,\psi')^2 \, d\Omega .$$

Rozviňme funkci $\varkappa$ v Taylorovu řadu. Jest

$$\varkappa'(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^k .$$

Dále platí

$$\iint_\Gamma |\varkappa'|^2 \, d\Gamma = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{k+1} ,$$

z čehož plyne, že řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{k+1}$ je konvergentní a

$$\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{k+1} \leqq D_4 \iint_{\Omega} (\operatorname{Re} \psi')^2 \, d\Omega .$$

Poněvadž jest

$$\varkappa(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k+1} \zeta^{k+1} ,$$

platí, že

$$\lim_{\lambda \to 1-} \int_0^{2\pi} \varkappa(\lambda e^{i\varphi}) \, d\varphi = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{(k+1)^2} .$$

Poněvadž řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{k+1}$ je konvergentní, jest tím spíše konvergentní řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{(k+1)^2}$. Z toho plyne, že funkce $\varkappa$ je typu H_2. Dále pak podle věty 10 jest

$$\int_0^{2\pi} |\varkappa(e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi = \lim_{\lambda \to 1} \int_0^{2\pi} |\varkappa(\lambda e^{i\varphi})|^2 = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{(k+1)^2}$$

a tedy

$$\int_0^{2\pi} |\varkappa(e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi \leqq D_5 \iint_{\Omega} (\operatorname{Re} \psi')^2 \, d\Omega .$$

Snadno se již nahlédne naše tvrzení, uvážíme-li jen, že $\varkappa(\zeta) = \psi(\omega(\zeta))$ a že podle věty 1 jest $|\omega'(\zeta)|$ omezené.

Definice 8. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Posloupnost harmonických funkcí $u_n \in L_2^{*\Omega}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nazveme uzavřenou v $L_2^{*\Omega}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a každou funkci $u \in L_2^{*\Omega}$ existují reálné koeficienty α_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ tak, že platí*

$$\iint_{\Omega} (u - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n)^2 \, d\Omega < \varepsilon .$$

Definice 9. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Posloupnost holomorfních funkcí $\psi_n \in L_2^{**\Omega}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nazveme uzavřenou v $L_2^{**\Omega}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a každou funkci $\psi \in L_2^{**\Omega}$ existují koeficienty α_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ tak, že platí*

$$\iint_{\Omega} (\psi - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \psi_n)^2 \, d\Omega < \varepsilon .$$

Věta 12. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď ψ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ uzavřená posloupnost holomorfních funkcí v $L_2^{**\Omega}$. Potom posloupnost harmonických funkcí $u_{2n} = \operatorname{Re} \psi_n$, $u_{2n-1} = \operatorname{I}_m \psi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ je uzavřená v $L_2^{*\Omega}$.*

Důkaz: Buď ψ holomorfní funkce definovaná na Ω a nechť $\operatorname{Re} \psi \in L_2^{*\Omega}$. Potom podle věty 4 jest $\psi \in L_2^{**\Omega}$. Tedy podle předpokladu pro každé $\varepsilon > 0$ existují koeficienty α_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$, že

$$\iint_\Omega |\psi - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \psi_n|^2 \, d\Omega < \varepsilon .$$

Z toho však plyne, že posloupnost funkcí u_k jest uzavřená.

Poznámka. Věta 12 umožňuje nám konstruovati uzavřené posloupnosti v $L_2^{*\Omega}$, neboť v $L_2^{**\Omega}$ se uzavřenost verifikuje snadněji než v $L_2^{*\Omega}$. Lze se na př. přesvědčit, že posloupnost z^n jest uzavřená. Srv. také [5], kap. V., § 4, zvláště pak str. 429.

3. Biharmonický problém.

Věta 13. *Buď Ω jednoduše souvislá oblast a g biharmonická funkce definovaná na Ω. Potom funkci g lze vyjádřit ve tvaru*

$$g = \mathrm{Re}\,[\bar{z}\varphi + \chi]$$

kde φ, χ jsou holomorfní funkce definované na Ω. Dále platí

$$\frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial g}{\partial y} = \varphi + z\overline{\varphi'} + \overline{\chi'}$$

a

$$\Delta g = 4\mathrm{Re}\,\varphi' .$$

Při tom φ' je určeno až na ryze imaginární konstantu.

Důkaz: Viz [6], str. 108.

Věta 14. *Buď C dostatečně hladká křivka, Ω její vnitřek; nechť $z_0 \in \Omega$. Buď ψ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ posloupnost celistvých[1]) funkcí splňující tyto předpoklady:*

1. *Posloupnost funkcí $v_n = \mathrm{Re}\,\psi_n$ je uzavřená v $L_2^{*\Omega}$.*

2. *Posloupnost funkcí $v_n = \mathrm{Re}\,\psi_n$ je orthonormalisovaná, t. j. platí*

$$\iint_\Omega v_n v_m \, d\Omega = \begin{cases} 1 \text{ pro } n = m , \\ 0 \text{ pro } n \neq m . \end{cases}$$

3. *Nechť platí $\mathrm{Im}\,\psi_n(z_0) = 0$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Buď dále g biharmonická funkce na Ω mající tyto vlastnosti:*

4. *Obě prvé derivace funkce g jsou spojité na Ω.*

5. $$\Delta g \in L_2^{*\Omega} .$$

Potom je-li $g = \mathrm{Re}\,[\bar{z}\varphi + \chi]$,[2]) platí

$$\varphi' = \tfrac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n ;$$

---

[1]) Předpoklad, že funkce ψ_n jsou celistvé, není podstatný. Poněvadž však při skutečném výpočtu budou pravidelně funkce ψ_n celistvé, vyslovujeme větu 14 v uvedeném tvaru.

[2]) Označení je míněno jako ve větě 13.

tato řada konverguje v prostoru $L_2^{**\Omega}$ a tedy i bodově skoro stejnoměrně na Ω. Při tom

$$\alpha_n = \operatorname{Im} \int_C \overline{F} \cdot \psi_n \, dt ,$$

kde

$$F = \frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial g}{\partial y} = \varphi + z\overline{\varphi'} + \overline{\chi}' .$$

Důkaz: Položme $v_n = \operatorname{Re} \psi_n$, $w_n = \operatorname{Im} \psi_n$. Podle předpokladu jest posloupnost funkcí v_n uzavřená v prostoru $L_2^{*\Omega}$. Poněvadž dále jest podle věty 2 prostor $L^{*\Omega}$ úplný, máme

$$\Delta g = u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n ,$$

kde

$$\alpha_n = \iint_\Omega v_n u \, d\Omega .$$

Poněvadž podle věty 13 jest $\Delta g = 4\operatorname{Re} \varphi'$, platí

$$4\varphi' = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n ,$$

kde řada podle věty 4 konverguje v prostoru $L_2^{**\Omega}$.

Z Greenovy věty dále plyne

$$\alpha_n = \iint_\Omega v_n u \, d\Omega = \iint_\Omega v_n \Delta g = \int_C \left(v_n \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial v_n}{\partial \nu} \right) ds ,$$

kde ν jest vnější normála.

Dále pak platí

$$\frac{\partial v_n}{\partial \nu} = \frac{\partial w_n}{\partial s} ,$$

jak se nahlédne z Cauchy-Riemannových podmínek.

Tedy jest

$$\int_C g \frac{\partial v_n}{\partial \nu} ds = \int_C g \frac{\partial w_n}{\partial s} ds = -\int_C \frac{\partial g}{\partial s} w_n \, ds .$$

Proto jest

$$\alpha_n = \int_C \left(v_n \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial v_n}{\partial \nu} \right) ds = \int_C \left(v_n \frac{\partial g}{\partial \nu} + w_n \frac{\partial g}{\partial s} \right) ds .$$

Dále platí

$$\frac{\partial g}{\partial \nu} ds = \frac{\partial g}{\partial x} \cos(x, \nu) \, ds + \frac{\partial g}{\partial y} \sin(x, \nu) \, ds = \frac{\partial g}{\partial x} dy - \frac{\partial g}{\partial y} dx ,$$

$$\frac{\partial g}{\partial s} ds = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy ,$$

takže

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \nu} v_n + \frac{\partial g}{\partial s} w_n\right) \mathrm{d}s = \left(\frac{\partial g}{\partial x} v_n + \frac{\partial g}{\partial y} w_n\right) \partial y + \left(-\frac{\partial g}{\partial y} v_n + \frac{\partial g}{\partial x} w_n\right) \mathrm{d}x .$$

Položme

$$F = \frac{\partial g}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial g}{\partial y} .$$

Jest

$$\frac{\partial g}{\partial x} v_n + \frac{\partial g}{\partial y} w_n = \operatorname{Re}(\overline{F}\psi_n) ; \qquad \frac{\partial g}{\partial x} w_n - \frac{\partial g}{\partial y} v_n = \operatorname{Im}(\overline{F}\psi_n) .$$

Bude tedy

$$\alpha_n = \iint_\Omega v_n \Delta g \,\mathrm{d}\Omega = \int_C \operatorname{Re}(\overline{F}\psi_n)\,\mathrm{d}y + \operatorname{Im}(\overline{F}\psi_n)\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\int_C \overline{F}\psi_n \,\mathrm{d}t ,$$

kde

$$t = x + \mathrm{i}y .$$

Uvážíme-li tvrzení věty 2, jest naše věta úplně dokázána.

Známe-li nyní parciální derivace na hranici C, potom podle dokázané věty můžeme určit s libovolnou přesností funkci φ'. Ve větě je podstatný předpoklad existence biharmonické funkce. Postup pro určení funkce φ' by totiž měl formální význam i tehdy, kdyby biharmonická funkce neexistovala. Tedy jestliže chceme ze známých okrajových hodnot funkcí $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$ vyjádřit funkci φ', musí být zaručena existence biharmonické funkce. Pro křivku dostatečně hladkou ve smyslu tohoto článku jest existenční věta dokázána pomocí variačních principů; nelze však obecně zaručit, že parciální derivace jsou spojité na $\overline{\Omega}$, jak předpokládá naše věta. Ukážeme však, že předpoklad spojitosti funkcí $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$ na $\overline{\Omega}$ není podstatný a že jej lze nahradit předpokladem slabším, který již bude splněn.

Nejprve si však dokážeme pomocné věty.

Věta 15. *Buď Γ jednotkový kruh. Buď reálná f spojitá funkce na Γ taková, že obě parciální derivace jsou na Γ spojité a integrovatelné s kvadrátem. Potom*

1. *pro každé ϱ z intervalu $(\frac{1}{2}, 1)$ platí*

$$\int_0^{2\pi} f^2(\varrho e^{\mathrm{i}\varphi})\,\mathrm{d}\varphi \leqq D\left[\iint_S f^2\,\mathrm{d}\Omega + \iint_\Gamma\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}\Omega\right],$$

kde jest D konstanta nezávislá na f a kde

$$S = E[z, |z| < \tfrac{1}{4}] ;$$

2. *existuje funkce* $f(e^{i\varphi})$, *že*

$$\lim_{\varrho \to 1-0} \int_0^{2\pi} (f(\varrho e^{i\varphi}) - f(e^{i\varphi}))^2 \, d\varphi = 0 .$$

Důkaz provedeme na základě myšlenky, které užil S. L. Sobolev (srv. [6]) při důkazu jedné obecné věty. Naše tvrzení jest sice důsledkem této věty, přesto však budeme hlavní myšlenku reprodukovat v našem speciálním případě.

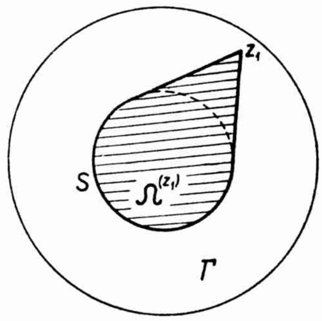
1. Dokážeme nejprve první část našeho tvrzení.

Buď

$$S = E[z, |z| \leqq \tfrac{1}{4}]$$

a položme

$$v(z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|z|^2 - (\frac{1}{4})^2}} & \text{pro } |z| < \frac{1}{4} , \\ 0 & \text{pro } |z| \geqq \frac{1}{4} , \end{cases}$$



$$\tilde{v}(z_1, r, \Theta) = v(z_1 + re^{i\Theta}) ,$$

$$\tilde{f}(z_1, r, \Theta) = f(z_1 + re^{i\Theta}) ,$$

$$\tilde{\psi}(z_1, r, \Theta) = - \int_r^\infty \tilde{v}(z_1, \varrho, \Theta) \, \varrho \, d\varrho .$$

Pro $z_1 \neq z_2$ buď dále

$$\psi(z_1, z_2) = \psi(z_1, r, \Theta) ,$$

kde

$$z_2 = z_1 + re^{i\Theta} , \qquad r > 0 , \qquad 0 \leqq \Theta < 2\pi$$

a předpokládejme vždy dále, že $|z_1| > \frac{1}{4}$.

Snadno se nahlédne, že funkce $\psi(z_1, z_2)$ při pevném z_1 jest různá od nuly pouze na oblasti $\Omega^{(z_1)}$, která je ohraničena částí kruhu $|z| = \frac{1}{4}$ a tečnami k S z bodu Z_1 (viz obr.).

Definujme dále pomocnou funkci

$$V(z_1, r, \Theta) = \tilde{f}(z_1, r, \Theta) \, \tilde{\psi}(z_1, r, \Theta) = - \tilde{f}(z_1, r, \Theta) \, . \int_r^\infty \tilde{v}(z_1, \varrho, \Theta) \, \varrho \, d\varrho$$

pro

$$z_1 + re^{i\Theta} \in \Gamma ,$$

$$V(z_1, r, \Theta) = 0$$

pro

$$z_1 + re^{i\Theta} \text{ non} \in \Gamma .$$

Položíme-li $r = 0$, bude

$$V(z, 0, \Theta) = \tilde{f}(z_1, 0, \Theta) \, . \, \tilde{\psi}(z_1, 0, \Theta) = - f(z_1) \int_0^\infty \tilde{v}(z_1, \varrho, \Theta) \, \varrho \, d\varrho$$

a dále

$$V(z_1, \infty, \Theta) = 0 .$$

Derivujme funkci $V(z_1, r, \Theta)$ podle r. Dostaneme

$$\frac{\partial v}{\partial r}(z_1, r, \Theta) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(z_1, r, \Theta)\, \tilde{\varphi}(z_1, r, \Theta) + \tilde{f}(z_1, r, \Theta)\, \tilde{v}(z_1, r, \Theta)\, r \tag{5}$$

pro

$$z_1 + re^{i\Theta} \in \Gamma,$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}(z_1, r, \Theta) = 0$$

pro

$$z_1 + re^{i\Theta} \text{ non} \in \Gamma .$$

Tuto funkci nyní integrujme podle r od 0 do ∞. Vzhledem k (3) a (4) bude platit

$$f(z_1) \int_0^\infty \tilde{v}(z_1, r, \Theta)\, r\, dr = \int_0^\infty \tilde{f}(z_1, r, \Theta)\, r \tilde{v}(z_1, r, \Theta)\, dr +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(z_1, r, \Theta)\, \psi(z_1, r, \Theta)\, dr . \tag{6}$$

Integrujme nyní rovnici (6) v mezích od 0 do 2π podle Θ. Dostaneme

$$f(z_1) \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^\infty \tilde{v}(z_1, r, \Theta)\, r\, dr = \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^\infty \tilde{f}(z_1, r, \Theta)\, \tilde{v}(z_1, r, \Theta)\, r\, dr +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^\infty \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(z_1, r, \Theta)\, \frac{1}{r}\, \tilde{\psi}(z_1, r, \Theta)\, r\, dr .$$

Tuto rovnici můžeme napsat ještě ve tvaru

$$f(z_1) \iint_E v(z_2)\, d\Omega_{z_2} = \iint_E f(z_2)\, v(z_2)\, d\Omega_{z_2} +$$

$$+ \iint_E \frac{\partial f(z_2)}{\partial v_{z_1, z_2}}\, \psi(z_1, z_2) \frac{1}{\varrho(z_1, z_2)}\, d\Omega_{z_2}, \tag{6'}$$

kde $\dfrac{\partial f}{\partial v_{z_1, z_2}}$ značí derivaci funkce f ve směru spojnice bodů $\overrightarrow{z_1 z_2}$ v bodě z_2 a $\varrho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ značí vzdálenost bodů. Dále píšeme $d\Omega_{z_2}$ abychom vyjádřili, že při integraci je proměnný pouze bod z_2 zatím co bod z_1 jest pevný. Všechny integrály v (6') jsou míněny po celé rovině E, ale ve skutečnosti jde ovšem pouze o integrály na $\Omega^{(z_1)}$.

Označme dále

$$\iint_E v(z_2)\, d\Omega_{z_2} = \iint_S v(z_2)\, d\Omega_{z_2} = \varkappa ,$$

takže potom bude

$$f(z_1) = \frac{1}{\varkappa} \int\int_E f(z_2)\, v(z_2)\, \mathrm{d}\Omega_{z_2} + \frac{1}{\varkappa} \int\int_E \frac{\partial f(z_2)}{\partial \nu_{z_1,z_2}}\, \psi(z_1, z_2)\, \frac{1}{\varrho(z_1, z_2)}\, \mathrm{d}\Omega_{z_2}. \qquad (7)$$

Odhadneme každý sčítanec zvláště. Jest

$$[\int\int_\Omega f(z_2)\, v(z_2)\, \mathrm{d}\Omega_{z_2}]^2 \leqq \int\int_S f^2(z_2)\, \mathrm{d}\Omega_{z_2} \int\int_S v^2(z_2)\, \mathrm{d}\Omega_{z_2} \leqq C_1 \int\int f^2(z_2)\, \mathrm{d}\Omega_{z_2}\,.$$

Abychom odhadli také druhý integrál na pravé straně (7), uvažme, že platí

$$\frac{\partial f(z_2)}{\partial \nu_{z_1,z_2}} = \frac{\partial \tilde{f}(z_1, r, \Theta)}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos\Theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin\Theta\,.$$

Máme tedy

$$\frac{\partial f(z_2)}{\partial \nu_{z_1,z_2}}\, \psi(z_1, z_2)\, \frac{1}{\varrho(z_1, z_2)} = \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_2 + \mathrm{i}y_2) \cos\Theta\, \frac{\psi(z_1 z_2)}{\varrho(z_1, z_2)} +$$

$$+ \frac{\partial f(x_2 + \mathrm{i}y_2)}{\partial y} \sin\Theta\, \frac{\psi(z_1, z_2)}{\varrho(z_1, z_2)}\,.$$

Jest však

$$\left[\int\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x} \cos\Theta\, \frac{1}{\varrho}\, \psi\, \mathrm{d}\Omega_{z_2}\right]^2 = \left[\int\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x} \cos\Theta\, \frac{1}{\varrho^{\frac{1}{4}}}\, \psi\, \frac{1}{\varrho^{\frac{3}{4}}}\, \mathrm{d}\Omega_{z_2}\right]^2 \leqq$$

$$\leqq C_2 \int\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{\varrho^{\frac{1}{2}}}\, \mathrm{d}\Omega_{z_2} \int\int_\Omega \frac{1}{\varrho^{\frac{3}{2}}}\, \mathrm{d}\Omega_{z_2} \leqq C_3 \int\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{\varrho^{\frac{1}{2}}}\, \mathrm{d}\Omega_{z_2}\,;$$

podobný vztah dostaneme také pro druhý sčítanec. Platí tudíž

$$\int_0^{2\pi} [\int\int_\Omega f(z_2)\, v(z_2)\, \mathrm{d}\Omega_{z_2}]^2\, \mathrm{d}\varphi \leqq C_4 \int\int_\Omega f^2\, \mathrm{d}\Omega\,,$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\int\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cos\Theta\, \frac{\psi}{\varrho}\, \mathrm{d}\Omega_{z_2}\right]^2 \mathrm{d}\varphi \leqq C_5 \int\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}\Omega\,,$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\int\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial y} \sin\Theta\, \frac{\psi}{\varrho}\, \mathrm{d}\Omega_{z_2}\right]^2 \mathrm{d}\varphi \leqq C_6 \int\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}\Omega\,,$$

při tom

$$z_1 = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,, \qquad R < 1\,,$$

neboť je

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\varrho^{\frac{1}{2}}\,(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, z_2)}\, \mathrm{d}\varphi$$

omezená funkce.

Z toho však již snadno plyne prvá část našeho tvrzení, užijeme-li jen Cauchyovy nerovnosti a uvážíme-li, že platí pro každá reálná čísla relace

$$\frac{a^2 + b^2}{2} > ab\,.$$

2. Dokážeme nyní druhou část. Položme

$$F(\lambda) = \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial f(z)}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda z) \right)^2 \mathrm{d}\Omega\,.$$

Snadno se ukáže, že $F(\lambda)$ je spojitá funkce reálného argumentu $0 < \lambda \leqq 1$. Mimo to $F(1) = 0$. Totéž platí pro $\frac{\partial f}{\partial y}$ a f na s. Dále platí podle první části tvrzení

$$\int_0^{2\pi} (f(\varrho e^{i\varphi}) - f(\lambda \varrho e^{i\varphi}))^2 \,\mathrm{d}\varphi \leqq D \Bigg[\iint_S (f(z) - f(\lambda z))^2 \,\mathrm{d}\Omega +$$

$$+ \iint_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial f(z)}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda z) \right)^2 + \left(\frac{\partial f(z)}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda z) \right)^2 \right] \mathrm{d}\Omega \Bigg]\,.$$

Vzhledem k tomu, co jsme řekli o F, jest pravá strana předešlé rovnice libovolně malá, jen když λ jest dostatečně blízké 1. Položíme-li nyní $\varrho_n = 1 - \frac{1}{n}$, potom funkce $f(\varrho_n e^{i\varphi})$ tvoří cauchyovskou posloupnost v prostoru všech funkcí s integrovatelným kvadrátem na intervalu $0, 2\pi$. Poněvadž tento prostor je úplný, platí

$$f(\varrho_n e^{i\varphi}) \to f(e^{i\varphi})\,.$$

Snadno se nyní také nahlédne, že $f(\varrho_n e^{i\varphi}) \to f(e^{i\varphi})$ pro každou posloupnost $\varrho_n \to 1$. Tím jest naše tvrzení úplně dokázáno.

Definice 10. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď f spojitá funkce na Ω. Budeme říkat, že f je typu E^*, jestliže existuje funkce $f(t)$ $(t \in C)$ taková, že pro každé konformní zobrazení $\omega(\zeta)$ jednotkového kruhu Γ na Ω platí*

$$\lim_{\varrho \to 1-0} \int^{2\pi} (f(\omega(\varrho e^{i\varphi})) - f(\omega(e^{i\varphi})))^2 \,\mathrm{d}\varphi = 0\,.^{1})$$

Funkci $f(t)$, pro $t \in C$ budeme říkat prodloužení funkce $f(z)$, $z \in \Omega$ na hranici C.

Věta 16. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď f reálná funkce na Ω se spojitými druhými derivacemi taková, že*

---

[1]) $\omega(e^{i\varphi})$ jest spojité prodloužení funkce $\omega(\zeta)$ na hranici. Lze snadno ukázat, že $\omega(e^{i\varphi}) \in C$.

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right) \mathrm{d}\Omega < \infty .$$

Potom jsou funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ *a* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *typu* E^*.

Důkaz. Buď $\omega(\zeta)$ konformní zobrazení jednotkového kruhu Γ na Ω. Položme dále

$$g = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \tilde{g}(\xi + \mathrm{i}\eta) = g(\omega(\xi + \mathrm{i}\eta)) .$$

Poněvadž g má na Ω derivace integrovatelné s kvadrátem a poněvadž platí věta 1, má $\tilde{g}$ spojité prvé derivace, které jsou integrovatelné s kvadrátem na Γ. Podle věty 15 tedy existuje funkce $\tilde{g}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})$, která jest prodloužením funkce g na hranici. Nechť nyní jest $\omega_1(\zeta)$ konformní zobrazení jednotkového kruhu Γ na sebe. Ukážeme, že platí

$$\lim_{\substack{\varrho \to 1- \\ \varrho \to 1-}} \int_0^{2\pi} (\tilde{g}(\omega_1(\varrho_1 e^{\mathrm{i}\varphi})) - \tilde{g}(\omega_1(\varrho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})))^2 \,\mathrm{d}\varphi = 0 . \tag{1}$$

Skutečně

$$\sqrt{\int_0^{2\pi} (\tilde{g}(\omega_1(\varrho_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})) - \tilde{g}(\omega_1(\varrho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})))^2 \,\mathrm{d}\varphi} \leqq \sqrt{\int_0^{2\pi} (\tilde{g}(\omega_1(\varrho_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})) - \tilde{g}(\lambda\omega_1(\varrho_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})))^2 \,\mathrm{d}\varphi} +$$
$$+ \sqrt{\int_0^{2\pi} (\tilde{g}(\omega_1(\varrho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})) - \tilde{g}(\lambda\omega_1(\varrho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})))^2 \,\mathrm{d}\varphi} + \sqrt{\int_0^{2\pi} (\tilde{g}(\lambda\omega_1(\varrho_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})) - \tilde{g}(\lambda\omega_1(\varrho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})))^2 \,\mathrm{d}\varphi}. \tag{2}$$

Poněvadž dále platí

$$\lim_{\lambda \to 1-} \iint\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \xi}(\zeta) - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \xi}(\lambda\zeta)\right)^2 \mathrm{d}\Gamma = 0 \,; \quad \lim_{\lambda \to 1-} \iint\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \eta}(\zeta) - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \eta}(\lambda\zeta)\right)^2 \mathrm{d}\Gamma = 0 \,,$$

nahlédne se snadno z věty 1 a 15, že prvé dvě odmocniny na pravé straně (2) možno učinit libovolně malé, když bude λ dostatečně blízké 1. Poněvadž dále jest $\tilde{g}(\lambda z)$ omezená funkce, platí

$$\lim_{\substack{\varrho_1 \to 1- \\ \varrho_2 \to 1-}} \int_0^{2\pi} (\tilde{g}(\lambda\omega_1(\varrho_1 e^{\mathrm{i}\varphi})) - \tilde{g}(\lambda\omega_1(\varrho_2 e^{\mathrm{i}\varphi})))^2 \,\mathrm{d}\varphi = 0 .$$

Z toho však již plyne relace (1). Proto také platí

$$\lim_{\varrho_1 \to 1-} \int_0^{2\pi} (\tilde{g}(\omega_1(e^{\mathrm{i}\varphi})) - \tilde{g}(\omega_1(\varrho_1 e^{\mathrm{i}\varphi})))^2 \,\mathrm{d}\varphi = 0 .$$

Položíme-li nyní pro $t \in C$

$$g(t) = \tilde{g}(\omega^{-1}(t)) ,$$

kde $\omega^{-1}(t)$ jest inversní zobrazení k $\omega(\zeta)$, snadno ukážeme, že

$$\lim_{\varrho\to 1-0} \int_0^{2\pi} (g(\omega^*(\varrho e^{i\varphi})) - g(\omega^*(e^{i\varphi})))^2 \,\mathrm{d}\varphi = 0$$

pro každé konformní zobrazení $\omega^*(\zeta)$ jednotkového kruhu Γ na Ω. Skutečně je-li $\omega^*(\zeta)$ konformní zobrazení Γ na Ω, bude

$$g(z) = \tilde{g}(\omega^{-1}(z)) = \tilde{g}(\omega^{-1}(\omega^*(\varrho e^{i\varphi}))) .$$

Jest však $\omega^{-1}(\omega^*(\varrho e^{i\varphi}))$ konformní zobrazení jednotkového kruhu na sebe. Z toho nyní již plyne tvrzení naší věty pro $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Úplně stejně lze dokázat tvrzení pro funkci $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Věta 17. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buďte na C definovány funkce h, k takové, že*

$$\int_C h^2 \,\mathrm{d}s < \infty \; ; \qquad \int_C k^2 \,\mathrm{d}s < \infty$$

kde s je délka oblouku.

Nechť dále existuje spojitá na Ω funkce f se dvěma spojitými derivacemi taková, že

1. $$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega < \infty .$$

2. *prodloužení funkce* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *resp.* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *na hranici C je rovno skoro všude h resp. k (prodloužení existuje, viz větu 16). Potom existuje biharmonická funkce g taková, že*

1. $$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega < \infty ,$$

2. *prodloužení funkcí* $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ *resp.* $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ *je na hranici skoro všude rovno h resp. k.*

Důkaz: Viz [6], § 14, str. 111 a další.

Poznámka. Existence funkce f při dostatečně hladkých funkcích h resp. k při splnění nutné Neumannovy podmínky (podmínky momentové)[1]) se snadno dokáže tím, že se tato funkce přímo sestrojí.

---

[1]) Neumannova podmínka pro biharmonický problém jest

$$\int_C \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \int h\,\mathrm{d}x + k\,\mathrm{d}y = 0 .$$

Věta 18. *Věta 14 platí i v tom případě, že ve 4. předpokladu se místo spojitých derivací na $\overline{\Omega}$ žádá, aby*

$$\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega < \infty\,.$$

Při tom na hranici C uvažuje se prodloužení obou parciálních derivací.

Důkaz: Buď ω konformní zobrazení jednotkového kruhu Γ na Ω. Buď C_k obraz kružnice $\gamma_k = E\left[\zeta,\, |\zeta| = 1 - \frac{1}{k}\right]$ a Ω_k vnitřek C_k. Poněvadž funkce v_n je podle předpokladu celistvá, je tedy omezená a tudíž, poněvadž jest $\Delta g \in L_2^{*\Omega}$, platí

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{\Omega_k} v_n\, \Delta g\, \mathrm{d}\Omega = \iint_{\Omega} v_n\, \Delta g\, \mathrm{d}\Omega\,.$$

Jest však

$$\iint_{\Omega_k} v_n\, \Delta g\, \mathrm{d}\Omega = \operatorname{Im} \int_{C_k} \overline{F} \psi_n\, \mathrm{d}t\,.$$

Dále platí

$$\int_{C_k} \overline{F}\psi_n\, \mathrm{d}t = \int_{\gamma_k} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(\omega(\zeta)) - \mathrm{i}\,\frac{\partial g}{\partial y}(\omega(\zeta))\right) \psi_n(\omega(\zeta))\, \omega'(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta\,.$$

Poněvadž ψ_n jest celistvá, jest $\psi_n(\omega(\zeta))$ na Γ omezená. Podle věty 1 jest omezená i $|\omega'|$. Poněvadž podle věty 16 jsou funkce $\frac{\partial g}{\partial x}$ a $\frac{\partial g}{\partial y}$ typu E^*, platí

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C_k} \overline{F}\psi_n\, \mathrm{d}t = \int_{C} \overline{F}\psi_n\, \mathrm{d}t\,.$$

Z toho plyne již snadno tvrzení naší věty.

Věta 19. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď ψ_n posloupnost funkcí podle věty 14. Buď $g = \operatorname{Re}\,[\bar{z}\varphi + \chi]$ biharmonická funkce splňující předpoklady věty 14 neb 18. Buď dále*

$$F = \frac{\partial g}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial g}{\partial y} = \varphi + z\overline{\varphi}' + \overline{\chi}'\,, \quad \text{a} \quad \varphi(z_0) = \operatorname{Im} \varphi'(z_0) = 0\,.$$

Nechť dále jest

$$\varphi_N' = \tfrac{1}{4}\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \psi_n\,; \quad \varphi_N = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \Psi_n\,; \quad \Psi_n' = \psi_n\,, \quad \Psi_n(z_0) = 0\,;$$

$$\alpha_n = \operatorname{Im} \int_C \overline{F}\psi_n\, \mathrm{d}t\,, \qquad \chi_N'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{\overline{F(t)} - \overline{\varphi_N(t)} - \bar{t}\, \varphi_N'(t)}{t - z}\, \mathrm{d}t\,.$$

Potom

1. $\varphi_N' \to \varphi'$ v $L_2^{**\Omega}$;
2. $\chi_N' \to \chi'$ *skoro stejnoměrně bodově na* Ω.

Důkaz: Buď $\omega(\zeta)$ konformní zobrazení jednotkového kruhu Γ na Ω. Buď C_k konformní obraz kružnice $\gamma_k = E\left[\zeta, |\zeta| = 1 - \frac{1}{k}\right]$ a nechť Ω_k jest vnitřek C_k. Potom zřejmě platí pro $z \in \Omega_k$

$$\chi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} \frac{\overline{F(t)} - \overline{\varphi(t)} - \overline{t}\,\overline{\varphi'(t)}}{t - z}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} \frac{\overline{F(t)}}{t - z}\, dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} \frac{\overline{\varphi(t)}}{t - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} \frac{\overline{\varphi(t)}\,\overline{t}\, dt}{(t - z)^2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} \frac{\overline{\varphi(t)}\, d\overline{t}}{t - z}.$$

Užili jsme relace

$$\int_{C_k} \frac{\overline{t}\,\overline{\varphi'(t)}}{t - z} = + \int_{C_k} \frac{\overline{\varphi(t)}\,\overline{t}\, dt}{(t - z)^2} - \int_{C_k} \frac{\overline{\varphi(t)}\, d\overline{t}}{t - z},$$

kterou snadno získáme z věty o integraci per partes.

Avšak

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} \frac{\overline{F(t)}\, dt}{t - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{\overline{F(t)}\, dt}{t - z},$$

neboť $\frac{\partial g}{\partial x}$ a $\frac{\partial g}{\partial y}$ jsou typu E_a^* a $F = \frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial g}{\partial y}$.

Podle předpokladu a věty 13 jest $\Delta g = \operatorname{Re} \varphi' \in L_2^{*\Omega}$. Proto podle věty 11 jest φ typu E_2. Platí proto

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} \frac{\overline{\varphi(t)}\, dt}{t - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{\overline{\varphi(t)}\, dt}{t - z}; \quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} \frac{\overline{\varphi(t)}\,\overline{t}\, dt}{(t - z)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{\overline{\varphi(t)}\,\overline{t}\, dt}{(t - z)^2};$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} \frac{\overline{\varphi(t)}\, d\overline{t}}{t - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{\overline{\varphi(t)}\, d\overline{t}}{t - z}.$$

Tedy

$$\chi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{\overline{F(t)} - \overline{\varphi(t)}}{t - z}\, dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{\overline{\varphi(t)}\,\overline{t}\, dt}{(t - z)^2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{\overline{\varphi(t)}\, d\overline{t}}{t - z}.$$

Z věty 14 (resp. 18) dále však plyne, že $\operatorname{Re} \varphi_N' = \operatorname{Re} \varphi'$. Proto podle věty 11 φ_N konverguje na C v průměru. Protože jest $\operatorname{Re} \varphi_N' \to \operatorname{Re} \varphi'$ v $L_2^{*\Omega}$, je podle věty 11 $\int_C (\varphi_N - \varphi)^2\, ds \to 0$, tedy též $\int_C |\varphi_N - \varphi|\, ds \to 0$. Odtud plyne, že $\chi_N' \to \chi'$. Tím je dokázána naše věta, neboť prvá její část je věta 18.

3. Závěr.

Věty odstavce 2 a 3 vysvětlují řadu otázek spojených s postupem, jak jej navrhl G. A. Grinberg.

Při výpočtu zvolíme nejprve uzavřenou posloupnost harmonických funkcí. Nejlépe je volíme podle věty 12. Tento uzavřený systém orthonormalisujeme na př. známou Gramm-Schmidtovou methodou. Při numerickém řešení proces orthonormalisace různým způsobem modifikujeme, aby byl co nejméně pracný výpočet. Tato část výpočtu jest totiž většinou nejpracnější. Jde v podstatě o vhodné uspořádání řešení soustavy lineárních rovnic.

Orthonormalisací získáme basi prostoru $L_2^{*\Omega}$. Tyto prvky volíme tak, aby se k nim snadno určili příslušné holomorfní funkce a jejich funkce primitivní. Volíme-li na př. ve větě 12 posloupnost funkcí z^n, splníme tím všechny uvedené požadavky. Při volbě těchto funkcí musíme dále dbáti na to, aby byl snadný numerický výpočet skalárních součinů v $L_2^{*\Omega}$. Tyto součiny totiž musíme před orthonormalisací vypočítat. Určujeme tím prvky Grammovy matice. Je-li nyní dána na hranici C biharmonická funkce a její normální derivace určíme snadno na C i obě parciální derivace $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$. Budeme tím znát na C hodnoty funkce F. Nyní můžeme podle věty 14 resp. 18 určiti již funkci φ' resp. φ pomocí nekonečné řady. Aproximativní výsledek dostaneme, když vezmeme pouze konečný počet členů řady. Abychom mohli užít věty 18 musí řešení existovat. O existenci se pak přesvědčíme pomocí věty 17. Podle věty 19 pak určíme aproximativní funkci χ' resp. χ. Věta 19 podstatně zjednodušuje Grinbergův postup. Tím bude problém aproximativně řešen.

Přesnost aproximace závisí na rychlosti konvergence řady $\Sigma\alpha_n\psi_n$. Je proto třeba voliti funce ψ_n tak, aby konvergence byla pokud možno nejrychlejší. Ve většině případů se počítá speciální případ s určitými okrajovými podmínkami. Jest vhodné, abychom odhadli nějakým způsobem charakter řešení biharmonického problému a uvážili jej při volbě uzavřeného systému harmonických funkcí.

Biharmonický problém má důležitý význam v aplikacích, zejména pak v theorii rovinné pružnosti. Při tom jest důležité znáti charakter hraničního chování funkcí φ a χ. Věta 11 jej do jisté míry určuje. V některých případech toho lze dobře využíti.

Naše úvahy se týkaly pouze oblastí jednoduše souvislých s dostatečně hladkou hranicí. Celkem bez velkých obtíží lze provést stejné úvahy pro oblasti konečné, vícenásobně souvislé, s dostatečně hladkou hranicí. V praxi jsou však nejdůležitější případy, kdy hranice má úhlové body. V jednom z příštích čísel ukáži, že postup zůstane skoro stejný i v tomto případě, i když na př. tvrzení věty 11 nebude správné. V některém z příštích čísel také ukáži konkretní numerické řešení pro případ, že oblast jest pravoúhlý trojúhelník.

Tento článek řešil některé theoretické otázky. Řada jich však zůstává otevřená. Zmíním se zde o některých, které se bezprostředně týkají otázek souvisících s tímto článkem.

1. Vzniká otázka, zda lze říci něco speciálnějšího o chování funkcí φ_n, χ_n

v okolí hranice a na hranici, když je na př. známo, že druhé parciální derivace hledané biharmonické funkce jsou spojité na $\overline{\Omega}$.

2. Numerický postup je možný i v případě, že na př. na hranici není $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$ spojité. Potom však integrál ve větě 18 nemusí být konečný, a tedy uvedené věty nelze užít. Vzniká otázka, zda stejný formální postup nám zaručí aproximativní výsledek.

3. Velmi důležitou otázkou jest odhad chyby.

4. Důležitý význam pro aplikace má také studium vlivu volby systému harmonických funkcí na rychlost konvergence aproximativního řešení.

Při problémech s úhlovými body vznikají další otázky. O nich se zmíním v článku pojednávajícím o některých těchto problémech.

LITERATURA

[1] *Гринберг Г. А.*, О решении плоской задачи теории упругости и задачи об изгибе тонкой плиты с закрепленным контуром. ДАН СССР т. LXXVI 1951.

[2] *Гринберг Г. А., Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С.*, Метод решения общей бигармонической задачи для прямоугольной области при задании на контуре значений функций и ее нормальной производной. Прикл. мат. и мех. т. XVII 1953 в. 1.

[3] *V. Smirnoff*, Über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. Mathemat. Ann. Bd. 107, 1933.

[4] *И. И. Привалов*, Граничные свойства аналитических функций. Гос. изд. тех.-теор. лит. 1950.

[5] *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд дн. СССР 1949.

[6] *С. Л. Соболев*, Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Хзд. Лен. гос. унив. 1950.

Резюме.

ЗАМЕТКА К ОДНОМУ РЕШЕНИЮ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЫ

ИВО БАБУШКА (Ivo Babuška), Прага.

(Поступило в редакцию 19. V. 1953 г.)

Б работе содержится доказательство сходимости одного приближенного метода решения бигармонической проблемы для случая плоских областей с достаточно гладкой границей, предположенного Г. А. Гринбергом [1], [2]. Также здесь показано одно из возможных упрощений способа, данного Гринбергом.

Zusammenfassung.

BEMERKUNG ZUR GEWISSEN LÖSUNG DES BIHARMONISCHEN PROBLEMS

IVO BABUŠKA, Prag.

(Eigelangt 19. V. 1953.)

Die Arbeit enthält einen Konvergenzbeweis einer Methode für die Lösung eines ebenen biharmonischen Problems, welche G. A. GRINBERG [1], [2] vorgeschlagen hat. Wir geben auch eine Vereinfachung des Grinbergschen Verfahrens.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 79 (1954)

NAPJATOST DESKY S DVĚMA ZALISOVANÝMI KRUHOVÝMI ČEPY

MILOSLAV HAMPL, Praha.

(Došlo dne 2. října 1953.) DT 621.81-41 : 539.3/.4

Do nekonečné rovinné desky se dvěma kruhovými otvory (poloměr a, vzdálenost středů $2e$) jsou za tepla zalisovány kruhové čepy s poloměry $a(1 + \alpha)$. Jde o určení napjatosti desky a čepů.

Předpokládáme při tom, že materiál desky i čepů je homogenní, a má stejné elastické vlastnosti.

Zalisování čepů se provede tím způsobem, že desku ohřejeme tak, aby kruhové otvory se teplotou zvětšily a čepy (neohřáté) se daly do těchto otvorů zalisovati. Po vychladnutí desky vznikne mezi čepem a kruhovým otvorem tlak a tím deska i čepy se dostanou do napjatého stavu, jehož zjištění je obsahem této práce.

Jde o nalezení napjatosti v desce a v čepech, které musí vyhovovat podmínkám:

a) ve styčné kružnici čepy a desky musí býti průvodiče a napětí radiální a smykové v čepu i v desce stejné,

b) radiální a smykové napětí desky v nekonečnu musí býti nulové.

Řešení problému je provedeno vhodnou volbou t. zv. *Airyho biharmonické funkce napětí* (Brit. Assoc. Rep. 1862, Trans. Roy. Soc. vol. *153*, 1863, p. 49) pro případ dvojdimensionální napjatosti. Je známo, že parciálními derivacemi druhého řádu této jediné funkce se dají vyjádřiti všechna tři napětí v rovině (radiální, obvodové a smykové). Viz na př. Technický průvodce, *III*, 1944, str. 442).

Značení:

$x\ y$	souřadnicový systém,
$r, \vartheta;\ r_1, \vartheta_1;\ r_2, \vartheta_2$	polární souřadnice podle obr. 1.,
e	vzdálenost středu kruhového otvoru pro čep od počátku,
a	poloměr otvoru,
$a\alpha$	přesazení čepu (= rozdíl poloměrů čepu a kruhovéh ootvoru)
Φ	Airyho funkce napětí,
$\nabla^2\Phi\ =$	$\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\vartheta^2}$,
u, v	radiální resp. obvodová deformace,
$\widehat{rr}, \widehat{\vartheta\vartheta}, \widehat{r\vartheta}$	radiální, resp. obvodové a smykové napětí v souřadnicích r, ϑ,

E modul pružnosti v tahu,

ν Poissonův poměr (0,3 u oceli).

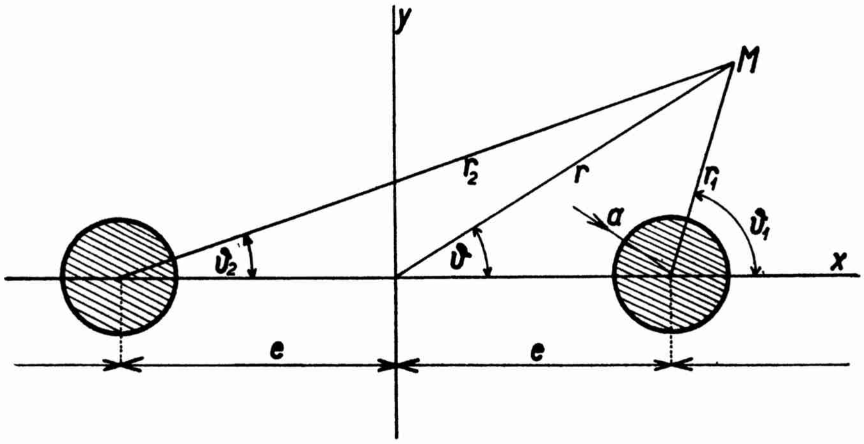
Index c resp. d se vztahuje na čep resp. na desku.

Podstata řešení problému je založena na známém řešení napjatosti jednoho kruhového čepu zalisovaného do otvoru v nekonečné rovině. V tomto případě mají Airyho funkce napětí tvar:

a) pro desku $\Phi_d = A \log \frac{r_1}{a}$,

b) pro čep $\Phi_c = B\, r_1^2$.

Těmito funkcemi (resp. jejich derivacemi) se dá vyjádřit napjatost v každém místě desky a čepu.



Obr. 1.

Přičteme-li k těmto funkcím touž biharmonickou (po případě harmonickou) funkci, znamená to, že jsme na původní stav napjatosti superponovali nový, který sice změní napětí ve styčné kružnici čepu s deskou, ale tak, že obě změny budou stejné, takže krajové podmínce a) bude zase vyhověno.

Za tuto superponovanou Airyho funkci volíme $A \log \frac{r_2}{a}$ a dokážeme v dalším, že všem krajovým podmínkám je vyhověno a kromě toho vypočteme napětí v čepu a v desce, do níž jsou zalisovány dva čepy (se stejnými poloměry).

Zvolme tedy tyto Airyho funkce napětí:

1. pro desku:

$$\Phi_d = A \log \frac{r_1}{a} + A \log \frac{r_2}{a} , \qquad (1,0)$$

2. pro čep 1:

$$\Phi_1 = B\, r_1^2 + A \log \frac{r_2}{a}\,, \tag{1,1}$$

resp. pro čep 2:

$$\Phi_2 = B r_2^2 + A \log \frac{r_1}{a}\,. \tag{1,2}$$

Formule pro jednotlivá napětí v polárních souřadnicích r, ϑ:

$$\widehat{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\vartheta^2} = \nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\,, \tag{2,1}$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\,, \tag{2,2}$$

$$\widehat{r\vartheta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right), \tag{2,3}$$

a pro deformace:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E}(\widehat{rr} - \nu\widehat{\vartheta\vartheta})\,, \tag{3,1}$$

$$\frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\vartheta} = \frac{1}{E}(\widehat{\vartheta\vartheta} - \nu\widehat{rr})\,, \tag{3,2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\vartheta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{1}{G}\widehat{r\vartheta}\,. \tag{3,3}$$

Krajové podmínky problému:
Na obvodě čepů musí býti

$$a(1+\alpha) + u_c = a + u_d\,, \tag{4,1}$$

$$v_c = v_d\,, \tag{4,2}$$

$$\widehat{rr}_c = \widehat{rr}_d\,, \tag{4,3}$$

$$\widehat{r\vartheta}_c = \widehat{r\vartheta}_d\,. \tag{4,4}$$

Všem podmínkám vyhovíme vhodnou volbou konstant A, B.

Pro další výpočet užijeme těchto vztahů:

$$r_2^2 = r_1^2 + 4e^2 + 4er_1\cos\vartheta_1\,, \tag{5,1}$$

tedy

$$\frac{\partial r_2}{\partial r_1} = \frac{r_1 + 2e\cos\vartheta_1}{r_2}, \quad \frac{\partial r_2}{\partial\vartheta_1} = -\frac{2er_1\sin\vartheta_1}{r_2}\,. \tag{5,2}$$

Pak

$$\frac{\partial\Phi_d}{\partial r_1} = \frac{A}{r_1} + A\frac{r_1 + 2e\cos\vartheta_1}{r_2^2}\,, \tag{6,1}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_d}{\partial r_1^2} = -A\frac{1}{r_1^2} + A\left[\frac{1}{r_2^2} - \frac{2(r_1 + 2e\cos\vartheta_1)^2}{r_2^4}\right], \tag{6,2}$$

$$\frac{\partial\Phi_d}{\partial\vartheta_1} = -A\frac{2er_1\sin\vartheta_1}{r_2^2}\,, \tag{6,3}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_d}{\partial\vartheta_1^2} = -A\left[\frac{2er_1\cos\vartheta_1}{r_2^2} + \frac{8e^2r_1^2\sin^2\vartheta_1}{r_2^4}\right], \tag{6,4}$$

$$\nabla_1^2\Phi_a = 0\ . \tag{6,5}$$

A tedy napětí v desce v souřadnicích r, ϑ:

$$(\widehat{r_1r_1})_d = -(\widehat{\vartheta_1\vartheta_1})_d = -\frac{\partial^2\Phi_a}{\partial r_1^2} = A\frac{1}{r_1^2} - A\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}\log\frac{r_2}{a}\ , \tag{7,1}$$

$$(\widehat{r_1\vartheta_1})_d = -\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{A}{r_1}\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}\log\frac{r_2}{a}\right). \tag{7,2}$$

Pro radiálnou deformaci podle (3,1) platí:

$$\frac{\partial u_d}{\partial r_1} = -\frac{1}{E}(1+\nu)\frac{\partial^2\Phi_d}{\partial r_1^2}\ , \tag{7,3}$$

a integrací

$$\underline{u_d = -\frac{1}{E}(1+\nu)\frac{\partial\Phi_d}{\partial r_1}} = -\frac{1}{E}(1+\nu)A\left(\frac{1}{r_1} + \frac{\partial\log\frac{r_2}{a}}{\partial r_1}\right) \tag{7,4}$$

(integrační konstanta $= 0$, neboť pro lim $r_1 = \infty$, musí být $u_d = 0$).

Čep I.

$$\Phi_1 = Br_1^2 + A\log\frac{r_2}{a}\ , \tag{8,1}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial r_1} = 2Br_1 + A\frac{r_1 + 2e\cos\vartheta_1}{r_2^2}\ , \tag{8,2}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r_1^2} = 2B + A\left[\frac{1}{r_2^2} - \frac{2(r_1 + 2e\cos\vartheta_1)^2}{r_2^4}\right], \tag{8,3}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\vartheta_1} = -A\frac{2er_1\sin\vartheta_1}{r_2^2}\ , \tag{8,4}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\vartheta_1^2} = -A\left[\frac{2er_1\cos\vartheta_1}{r_2^2} + \frac{8e^2r_1^2\sin^2\vartheta_1}{r_2^4}\right], \tag{8,5}$$

$$\underline{\nabla_1^2\Phi_1 = 4B}\ . \tag{8,6}$$

Napětí v čepu 1 v souřadnicích r_1, ϑ_1:

$$\widehat{r_1r_1}_c = 4B - \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r_1^2} = 2B - A\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}\log\frac{r_2}{a}\ , \tag{9,1}$$

$$\widehat{\vartheta_1\vartheta_1}_c = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r_1^2} = 2B + A\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}\log\frac{r_2}{a}\ , \tag{9,2}$$

$$\widehat{r_1\vartheta_1} = -\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{A}{r_1}\frac{\partial\log\frac{r_2}{a}}{\partial\vartheta_1}\right), \tag{9,3}$$

$$\frac{\partial u_c}{\partial r_1} = \frac{1}{E}\left[4B - (1+\nu)\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r_1^2}\right]; \tag{9,4}$$

integrací:

$$u_c = \frac{1}{E}\left[4Br_1 - (1+\nu)\frac{\partial \Phi_1}{\partial r_1}\right] = \frac{1}{E}\left[2B(1-\nu)r_1 - A(1+\nu)\frac{\partial \log \frac{r_2}{a}}{\partial r_1}\right]; \tag{9,5}$$

(integrační konstanta $= 0$, neboť pro $r_1 = 0$ musí být $u_c = 0$). Po dosazení do (4,1) pro $r_1 = a$:

$$a\alpha = -\frac{1}{E}(1+\nu)A\left[\frac{1}{a} + \left(\frac{\partial \log \frac{r_2}{a}}{\partial r_1}\right)_{r_1=a}\right] -$$

$$-\frac{1}{E}(1-\nu)2Ba + \frac{1}{E}(1+\nu)A\left(\frac{\partial \log \frac{r_2}{a}}{\partial r_1}\right)_{r_1=a},$$

a tedy

$$\underline{E\alpha a^2 = -A(1+\nu) - 2B(1-\nu)a^2}\,. \tag{10,1}$$

Normální napětí na obvodě čepu ($r_1 = a$) musí býti stejné, (podmínka (4,3)) jako na obvodě otvoru v desce:

$$2B - A\left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}\log\frac{r_2}{a}\right)_{r_1=a} = A\frac{1}{a^2} - A\left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}\log\frac{r_2}{a}\right)_{r_1=a},$$

odtud

$$\underline{A = 2Ba^2}\,, \tag{10,2}$$

tedy

$$Ea^2\alpha = -4Ba^2\,,$$

$$A = 2Ba^2 = -\tfrac{1}{2}Ea^2\alpha\,; \tag{10,3}$$

tangenciální napětí $\widehat{r_1\vartheta_1}$ pro $r_1 = a$ jsou u čepu i desky identická. Tím jsou určeny konstanty A, B. Snadno zjistíme, že pro takto určené A, B jsou i podmínky (4,2) a (4,4) splněny.

Je tedy

$$\Phi_d = -\tfrac{1}{2}Ea^2\alpha\left(\log\frac{r_1}{a} + \log\frac{r_2}{a}\right), \tag{11,1}$$

$$\Phi_{c1} = -\tfrac{1}{2}Ea^2\alpha\left[\frac{r_1^2}{2a^2} + \log\frac{r_2}{a}\right]. \tag{11,2}$$

Napětí na obvodě $r_1 = a$:

u desky:

$$(\widehat{r_1r_{1d}})_{r_1=a} = -(\widehat{\vartheta_1\vartheta_{1d}})_{r_1=a} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}Ea^2\alpha\left[\frac{1}{a^2} + \frac{a^2 + 4ae\cos\vartheta_1 + 4e^2\cos 2\vartheta_1}{(a^2 + 4ae\cos\vartheta_1 + 4e^2)^2}\right], \tag{12,1}$$

$$(\widehat{r_1\vartheta_{1d}})_{r_1=a} = 2Ea^2\alpha\frac{e\sin\vartheta_1(a + 2e\cos\vartheta_1)}{(a^2 + 4ae\cos\vartheta_1 + 4e^2)^2}, \tag{12,2}$$

u čepu:

$$(\widehat{r_1 r_1}_c)_{r_1=a} = (\widehat{r_1 r_1}_d)_{r_1=a} \,, \tag{12,3}$$

$$(\widehat{\vartheta_1 \vartheta_1}_c)_{r_1=a} = -\mathrm{E}a^2\alpha - (\widehat{r_1 r_1}_c)_{r_1=a} \,, \tag{12,4}$$

$$(\widehat{r_1 \vartheta_1}_c)_{r_1=a} = (\widehat{r_1 \vartheta_1}_d)_{r_1=a} \,. \tag{12,5}$$

Napětí v čepu obecně:

$$\widehat{r_1 r_1}_c = \frac{\mathrm{A}}{a^2} - \mathrm{A}\left[\frac{1}{r_2^2} - \frac{2(r_1 + 2e\cos\vartheta_1)^2}{r_2^4}\right], \tag{13,1}$$

$$\widehat{\vartheta_1 \vartheta_1}_c = \frac{\mathrm{A}}{a^2} + \mathrm{A}\left[\frac{1}{r_2^2} - \frac{2(r_1 + 2e\cos\vartheta_1)^2}{r_2^4}\right], \tag{13,2}$$

$$\widehat{r_1 \vartheta_1}_c = -4\mathrm{A}\,\frac{e\sin\vartheta_1\,(r_1 + 2e\cos\vartheta_1)}{r_2^4} \,. \tag{13,3}$$

Speciálně pro střed čepu, kde $r_1 = 0$, $r_2 = 2e$

$$\left.\begin{aligned}
(\widehat{r_1 r_1}_c)_0 &= \frac{\mathrm{A}}{a^2} + \frac{\mathrm{A}}{4e^2}\cos 2\vartheta_1 \,, \\
(\widehat{\vartheta_1 \vartheta_1}_c)_0 &= \frac{\mathrm{A}}{a^2} - \frac{\mathrm{A}}{4e^2}\cos 2\vartheta_1 \,, \\
(\widehat{r_1 \vartheta_1}_c)_0 &= -\frac{\mathrm{A}}{4e^2}\sin 2\vartheta_1 \,.
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Napětí v desce v souřadnicích r, ϑ:

$$\Phi_d = \mathrm{A}\left(\log\frac{r_1}{a} + \log\frac{r_2}{a}\right).$$

Z obr. 1 je patrno, že

$$r_1^2 = r^2 + e^2 - 2er\cos\vartheta, \quad r_2^2 = r^2 + e^2 + 2er\cos\vartheta \,,$$

a tedy

$$\frac{\partial r_1}{\partial r} = \frac{r - e\cos\vartheta}{r_1}, \quad \frac{\partial r_2}{\partial r} = \frac{r + e\cos\vartheta}{r_2}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial \vartheta} = \frac{er\sin\vartheta}{r_1}, \quad \frac{\partial r_2}{\partial \vartheta} = -\frac{er\sin\vartheta}{r_2},$$

$$\frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial \Phi_d}{\partial r} = \frac{r - e\cos\vartheta}{r_1^2} + \frac{r + e\cos\vartheta}{r_2^2},$$

$$\frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial^2 \Phi_d}{\partial r^2} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{(2(r - e\cos\vartheta)^2}{r_1^4} - \frac{2(r + e\cos\vartheta)^2}{r_2^4}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial \Phi_d}{\partial \vartheta} = \frac{er\sin\vartheta}{r_1^2} - \frac{er\sin\vartheta}{r_2^2},$$

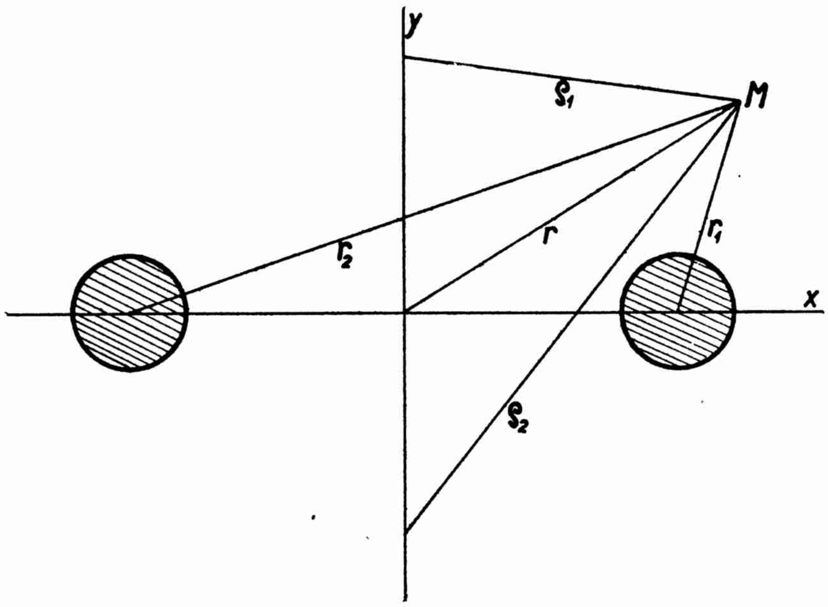
$$\frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial^2 \Phi_d}{\partial \vartheta^2} = \frac{er\cos\vartheta}{r_1^2} - \frac{er\cos\vartheta}{r_2^2} - 2e^2r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4}\right).$$

Tedy

$$\widehat{rr}_d = \mathrm{A}\left[\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - 2e^2 \sin^2\vartheta \left(\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^2}\right)\right] = -\widehat{\vartheta\vartheta}_d\,, \tag{17,1}$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta}_e = -\widehat{rr}_d\,,$$

$$\widehat{r\vartheta}_d = \mathrm{A}\,.\,2e\sin\vartheta\left[\frac{r - e\cos\vartheta}{r_1^4} - \frac{r + e\cos\vartheta}{r_2^4}\right]. \tag{17,2}$$



Obr. 2.

Hlavní napětí v desce:

$$\sigma_{1,2} = \tfrac{1}{2}(\widehat{rr} + \widehat{\vartheta\vartheta}) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4(\widehat{r\vartheta})^2 + (\widehat{rr} - \widehat{\vartheta\vartheta})^2}\,,$$

$$\sigma_{1,2} = \pm\, 2\mathrm{A}\,.\,\frac{\sqrt{(r^2 + e^2 - 2er\sin\vartheta)(r^2 + e^2 + 2er\sin\vartheta)}}{r_1^2 r_2^2}\,, \tag{18,1}$$

$$= \pm\, \mathrm{E}a^2\alpha\,\frac{\varrho_1\varrho_2}{r_1^2 r_2^2}\,, \tag{18,2}$$

kde

$$\begin{aligned}\varrho_1^2 &= r^2 + e^2 - 2er\sin\vartheta\,,\\ \varrho_2^2 &= r^2 + e^2 + 2er\sin\vartheta\,,\end{aligned} \tag{18,3}$$

(ϱ_{12} jsou vzdálenosti vyšetřovaného bodu od bodů na ose y ve vzdálenostech $\pm\, e$).

Napětí v těchto bodech je $= 0$.

Dá se tedy po úpravě psát:

$$\sigma_{12} = \pm\, \mathrm{E}a^2\alpha \frac{\sqrt{r^4 + e^4 + 2e^2r^2 \cos 2\vartheta}}{r^4 + e^4 - 2e^2r^2 \cos 2\vartheta} \,. \tag{18,4}$$

Napětí v desce:

1. Podél osy x:

tedy pro

$$\vartheta = 0,\ r_1 = r - e,\ r_2 = r + e$$

$$\widehat{rr}_x = -\widehat{\vartheta\vartheta}_x = -\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha \left[\frac{1}{(r-e)^2} + \frac{1}{(r+e)^2}\right],\ \widehat{r\vartheta}_x = 0 \,. \tag{19,1}$$

2. Podél osy y:

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}\pi,\ r_1^2 = r_2^2 = r^2 + e^2 \,,$$

$$\widehat{rr}_y = -\widehat{\vartheta\vartheta}_y = -\mathrm{E}a^2\alpha \frac{r^2 - e^2}{(r^2 + e^2)^2} \,. \tag{19,2}$$

Napětí mezi čepem a deskou:

$$(\widehat{r_1 r_{1c}})_{r_1=a} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha \left\{\frac{1}{a^2} + \frac{a^2 + 4ae\cos\vartheta_1 + 4e^2\cos 2\vartheta_1}{(a^2 + 4ae\cos\vartheta_1 + 4e^2)^2}\right\} . \tag{20,1}$$

Extrémní hodnoty budou v bodech, kde derivace závorky $= 0$: Je to

1. pro $\vartheta_1 = 0$, resp. π,

tam bude radiální napětí

$$(\widehat{r_1 r_{1c}})_{r_1=a,\,\vartheta_1=0} = -\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+2e)^2}\right]\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha \,, \tag{20,2}$$

$$(\widehat{r_1 r_{1c}})_{r_1=a,\,\vartheta_1=\pi} = -\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2e-a)^2}\right]\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha \,, \tag{20,3}$$

2. pro $\bar{\vartheta}_1$, pro něž

$$\cos\bar{\vartheta}_1 = \frac{a(a^2 - 12e^2)}{16e^3} \,. \tag{20,4}$$

Tam bude radiální napětí

$$(\widehat{r_1 r_{1c}})_{r_1=a,\,\bar{\vartheta}_1} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha \frac{32e^4 - 24a^2e^2 + 3a^4}{2a^2(4e^2 - a^2)^2} \,. \tag{20,5}$$

Čitatel se dá psát také

$$8e^2(4e^2 - 3a^2) + 3a^4$$

a tedy pro $e > a$ je i čitatel stále > 0.

Tedy i radiální napětí v místě $\bar{\vartheta}_1$ je tlak a to nejmenší na celém obvodě čepu.

Rovnice křivek, podél nichž mají hlavní napětí konstantní hodnotu, zní:

$$\frac{\varrho_1\varrho_2}{r_1^2 r_2^2} = \frac{c}{e^2} \,, \tag{21}$$

kde c je bezrozměrný konstantní faktor, který vyjadřuje poměr hlavního napětí σ v uvažovaném bodě k hlavnímu napětí v počátku σ_0 tedy $c = \frac{\sigma}{\sigma_0}$.

Užijeme-li vztahů pro ϱ_1, ϱ_2, r_1, r_2, dostaneme:

$$\varrho_1^2 \varrho_2^2 = r^4 + e^4 + 2e^2 r^2 \cos 2\vartheta \ ,$$

$$r_1^2 r_2^2 = r^4 + e^4 - 2e^2 r^2 \cos 2\vartheta \ .$$

Po dosazení do (21) a úpravě, bude rovnice hledané čáry konstantního hlavního napětí:

$$\cos 2\vartheta = \frac{2c^2(u^4 + 1) + 1 - \sqrt{8c^2(u^4 + 1) + 1}}{4c^2 u^2} \ , \tag{21,1}$$

kde $u = \frac{r}{e}$.

U odmocniny nutno bráti znaménko záporné, aby vyšel $\cos 2\vartheta < 1$. Křivka protíná osu $x(\vartheta = 0)$ obecně ve čtyřech bodech s úsečkami $\pm x_{1,2}$, pro které platí:

$$x_{12}^2 = \frac{2c + 1 \pm \sqrt{8c + 1}}{2c}, \text{ resp. } x_2^2 = \frac{3 - x_1^2}{1 + x_1^2} \ . \tag{21,2}$$

Pokud je $c < 1$, jsou jen 2 průsečíky reálné, pro $c = 1$ má křivka tvar ležaté „osmičky“ s dvojným bodem v počátku, pro $c > 1$ protíná osu ve čtyřech reálných bodech a rozpadá se na dva ovály symetricky položené k ose y a ležící uvnitř smyček křivky $c = 1$.

Průsečíky s osou y dostaneme dosazením $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$.

Pro jejich pořadnice platí:

$$y_1^2 = \frac{-2c - 1 + \sqrt{8c + 1}}{2c} \ ; \tag{21,3}$$

(platí jen kladné znaménko u odmocniny a hodnota y_1 je reálná pouze pro $c \leq 1$);

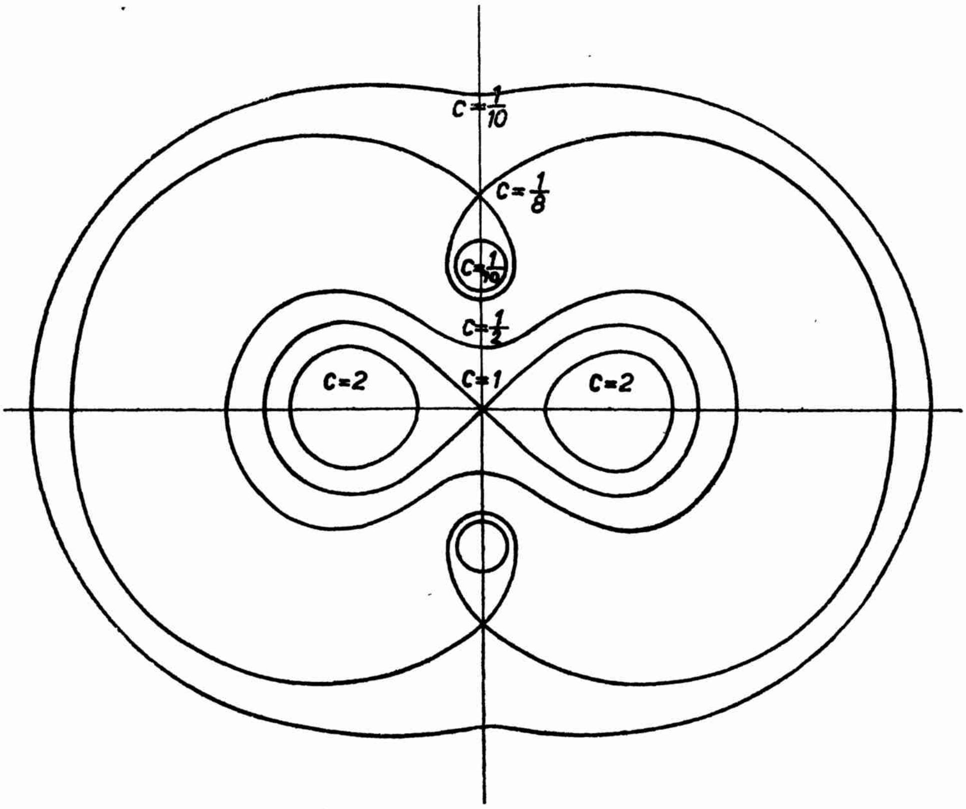
resp. $$y_{23}^2 = \frac{-2c + 1 \pm \sqrt{1 - 8c}}{2c}, \text{ takže } y_3^2 = \frac{y_2^2 + 3}{y_2^2 - 1} \ . \tag{21,4}$$

Je vidět, že pro $c < \frac{1}{8}$ protíná křivka osu y celkem ve třech párech (k ose x symetricky položených) bodů: $\pm y_1$, $\pm y_2$, $\pm y_3$, a pro $c < \frac{1}{8}$ pouze v jednom páru bodů $\pm y_1$.

Označíme-li σ_0 hlavní napětí v počátku $= \frac{Ea^2\alpha}{e^2}$, σ absolutní hodnotu hlavního napětí v obecném bodě, značí konstantní faktor $c = \frac{\sigma}{\sigma_0}$. V obr. 3 byly zakresleny křivky konstantních hlavních napětí pro různé hodnoty c.

Průsečíky s osami jsou uvedeny v tabulce.

c	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$
x_1	0,488	0	2,05	3,26	3,565	4,77
x_2	1,51	$\sqrt{3} = 1,732$	imag	imag	imag	imag
y_1	imag	0	0,486	0,8105	0,842	0,913
y_2	imag	imag	imag	$\sqrt{3} = 1,732$	1,328	1,12
y_3	imag	imag	imag	$\sqrt{3} = 1,732$	2,497	4,10



Obr. 3.

Резюме.

НАПРЯЖЕННОСТЬ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ С ДВУМЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПАЛЬЦАМИ

МИЛОСЛАВ ГАМПЛ (Miloslav Hampl), Прага.

(Поступило в редакцию 2. X. 1953 г.)

В работе решается проблема напряженности бесконечной плиты с двумя цилиндрическими палцами того же радиуса $a(1+\alpha)$, запрессованными в отверстия нагретой плиты, радиусы которых равны a. Выведены напряжения в посярных координатах и также главные рапряжения в плите. Графически изображены линии постоянных главных напряжений.

Summary.

STRESS IN AN INFINITE PLANE WITH TWO SHRINK-FITTED CIRCULAR PINS

MILOSLAV HAMPL, Prague.

(Received October 2, 1953.)

In this article problem of the stress in an infinite plane with two shrink-fitted circular pins is solved.

Airy's stress-functions for the problem of one circular pin in an infinite plane are: $\Phi_d = \mathrm{A} \log \frac{r_1}{a}$ (for plane), $\Phi_c = \mathrm{B} r_1^2$ (for pin). By superposition of the function $\mathrm{A} \log \frac{r_2}{a}$ we get the stress-functions.

$$\Phi_d = \mathrm{A} \log \frac{r_1}{a} + \mathrm{A} \log \frac{r_2}{a}$$

for the plane with two pins,

$$\Phi_1 = \mathrm{B} r_1^2 + \mathrm{A} \log \frac{r_2}{a}$$

for the first pin,
and similarly

$$\Phi_2 = \mathrm{B} r_2^2 + \mathrm{A} \log \frac{r_1}{a}$$

for the second pin.

These functions describe the state of stress in the plane with two shrink fitted pins (both of the same radius a) and also in the pins themselves.

The article deals with the derivation of the constants A, B and the finding of the expressions for stress and deformation.

PŘÍSPĚVEK KE VZTAHU FAREYOVY ŘADY A RIEMANNOVY DOMNĚNKY

JIŘÍ KOPŘIVA, Praha.

(Došlo dne 29. dubna 1953.) DT 511.91

V práci je do určité míry zobecněn výsledek starší autorovy práce „*O jednom vztahu Fareyovy řady k Riemannově domněnce o nulových bodech funkce* ζ“, otištěné v tomto časopise na str. 49—55, o ekvivalenci určitých jednoduchých podmínek pro zlomky Fareyovy řady s Riemannovou domněnkou o nulových bodech funkce ζ.

Vycházeje z ekvivalence vztahu:

pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$M(q) = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \tag{I}$$

s *Riemannovou domněnkou* o nulových bodech funkce ζ, odvodil jsem v práci *O jednom vztahu Fareyovy řady k Riemannově domněnce o nulových bodech funkce* ζ (Časopis pro pěstování matematiky, *78* (1953), 49—55) ekvivalenci vztahů:

pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$\sum_{\varrho<\frac{1}{2}}^{q}(\tfrac{1}{4}-\varrho) = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad \sum_{\varrho<1}^{q}(\varrho^2-\tfrac{1}{3}) = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad \sum_{\varrho<1}^{q}(\varrho^3-\tfrac{1}{4}) = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \tag{1}$$

s touto domněnkou. Při tom v (I) a dále $M(\xi) = \sum_{a=1}^{[\xi]}\mu(a)$, kde $\mu(a)$ je *Möbiusova funkce* číselné theorie, v (1) a dále ϱ probíhá všechny *Fareyovy zlomky* indexu q z příslušného intervalu $(0, \alpha)$. Malá písmena latinské abecedy značí při tom a dále přirozená čísla, malá písmena řecké abecedy reálná čísla.

Ekvivalenci (I) s Riemannovou domněnkou dokázal LITTLEWOOD.[1]) V této práci je zobecněn výsledek nahoře citované práce pro libovolný přirozený exponent n.

Ve zmíněné práci byl odvozen vzorec

$$\sum_{\varrho\leqq 1}^{q} f(\varrho) = \sum_{k=1}^{q} F(k) M\left(\frac{q}{k}\right), \tag{A}$$

[1]) Ostřejší věta pro $M(q) = O(q^{\frac{1}{2}+\alpha\frac{\log\log\log q}{\log\log q}})$ dokázána v *Landau, 2,* str. 161—166.

kde $F(a) = \sum_{s=1}^{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$ a f je funkce, definovaná pro všechna racionální čísla. Položíme-li v (A) $f(\eta) = 1$, dostaneme počet $\underset{\varrho \leq 1}{P_q(\varrho)}$ Fareyových zlomků indexu q v intervalu $(0, 1\rangle$,

$$\underset{\varrho \leq 1}{P_q(\varrho)} = \sum_{k=1}^{q} kM\left(\frac{q}{k}\right). \tag{2}$$

Položme v (A) $f(\eta) = \eta^n$, $n > 1$. Dostaneme

$$\sum_{\varrho \leq 1}^{q} \varrho^n = \sum_{k=1}^{q} M\left(\frac{q}{k}\right)\left(\frac{1^n}{k^n} + \frac{2^n}{k^n} + \ldots + \frac{k^n}{k^n}\right) = \sum_{k=1}^{q} M\left(\frac{q}{k}\right) \frac{1}{k^n} (1^n + 2^n + \ldots + k^n).$$

Řadu $1^n + 2^n + \ldots + k^n$ lze sečísti a platí pro ni

$$\sum_{l=1}^{k} l^n = \frac{(k + B)^{n+1} - B^{n+1}}{n + 1};$$

při tom B jsou Bernoulliova čísla, pro která je mocnina míněna symbolicky, t. j. $B^r = B_r$ ([1], str. 300). Dostáváme tak

$$\sum_{\varrho \leq 1}^{q} \varrho^n = \sum_{k=1}^{q} M\left(\frac{q}{k}\right) \frac{1}{k^n} \frac{(k + B)^{n+1} - B^{n+1}}{n + 1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^n} M\left(\frac{q}{k}\right)\left(\frac{k^{n+1}}{n + 1} + \frac{k^n}{2} + \frac{nk^{n-1}}{12} - \frac{n(n - 1)(n - 2)k^{n-3}}{720} + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)k^{n-5}}{30\,240} + \ldots + B_n k\right).$$

Všechny členy, ve kterých vystupuje jako faktor B_n, kde $n > 1$ liché, odpadají, neboť tato $B_n = 0$. Všechny ostatní členy jsou různé od nuly, neboť $B_1 = \frac{1}{2}$

a $B_{2n} = (-1)^{n-1} 4n \int_0^\infty \frac{\sigma^{2n-1}}{e^{2\pi\sigma} - 1}\, d\sigma \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$. ([3], str. 126.)

Je-li tedy n liché, zůstanou v závorce na pravé straně poslední rovnice kromě k^n jen sudé mocniny k, je-li n sudé, bude tomu naopak. Nám nezáleží na přesné hodnotě konstant u mocniny s exponentem $n - 1$ a nižšími a proto píšeme

$$\sum_{\varrho \leq 1}^{q} \varrho^n = \frac{1}{n + 1} \sum_{k=1}^{q} kM\left(\frac{q}{k}\right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q} M\left(\frac{q}{k}\right) + A_{1,n} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} M\left(\frac{q}{k}\right) +$$

$$+ A_{3,n} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^3} M\left(\frac{q}{k}\right) + A_{5,n} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^5} M\left(\frac{q}{k}\right) +$$

$$+ \ldots + \begin{cases} A_{n-2,n} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^{n-2}} M\left(\frac{q}{k}\right) & \text{pro } n \text{ liché} \\ B_n \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^{n-1}} M\left(\frac{q}{k}\right) & \text{pro } n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Indexy i konstant $A_{i,n}$ probíhají pouze lichá čísla a platí $A_{i,n} \neq 0$ pro $i = 1, 3, \ldots$ Položíme-li $l = 2[\frac{1}{2}n] - 1$, můžeme poslední člen psáti ve tvaru

$$A_{l,n} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right)$$

pro n liché i sudé ($A_{n-1,n} = B_n$ pro n sudé). Podle (2) jest $\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{q} k M\left(\frac{q}{k}\right)$ rovno $\frac{1}{n+1}$ —násobku počtu Fareyových zlomků indexu q z intervalu (0, 1). Dále jest $\sum_{k=1}^{q} M\left(\frac{q}{k}\right) = \sum_{k=1}^{q} \sum_{a=1}^{\left[\frac{q}{k}\right]} \mu(a) = \sum_{k=1}^{q} \mu(k) \left[\frac{q}{k}\right] = 1$ ([2], 1, str. 21). Můžeme tedy konečnému výsledku dáti tvar

$$\sum_{\varrho<1}^{q} \left(\varrho^n - \frac{1}{n+1}\right) + A_{0,n} = A_{1,n} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} M\left(\frac{q}{k}\right) + A_{3,n} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^3} M\left(\frac{q}{k}\right) + \\ + \ldots + A_{l,n} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right), \tag{3}$$

kde $A_{0,n} = \dfrac{n-1}{2(n+1)}$.

Pro $n = 1$ dostáváme dosazením $f(\eta) = \eta$ do (A) po snadném počtu

$$\sum_{\varrho<1}^{q} \left(\varrho - \frac{1}{2}\right) = 0 . \tag{4}$$

Je-li $n > 1$, označme $H_n(q)$ levou stranu ve (3), je-li $n = 1$, označme $H_1(q)$ levou stranu ve (4) jakožto funkce argumentu q. Sečtěme nyní rovnice

$$\lambda_i H_i(q) = \lambda_i \left[A_{1,i} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} M\left(\frac{q}{k}\right) + A_{3,i} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^3} M\left(\frac{q}{k}\right) + \ldots + A_{l,i} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right)\right]$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n > 3$[1]), kde λ_i jsou konstanty, které určíme dále. Na levé straně vzniklé rovnice dostaneme výraz tvaru $\sum_{\varrho<1}^{q} P(\varrho)$, kde P je polynom nejvýše n-tého stupně v ϱ. Vyšetříme, zda je možno voliti konstanty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tak, aby polynom P byl právě n-tého stupně, t. j. aby $\lambda_n \neq 0$, a současně abychom na pravé straně dostali pouze člen $\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right)$. Má tedy platit

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} M\left(\frac{q}{k}\right) (\lambda_1 . 0 + \lambda_2 . A_{12} + \lambda_3 A_{13} + \lambda_4 A_{14} + \\ + \ldots + \lambda_{n-1} A_{1,n-1} + \lambda_n A_{1,n}) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^3} M\left(\frac{q}{k}\right) (\lambda_4 A_{34} + \ldots + \lambda_{n-1} A_{3,n-1} + \lambda_n A_{3,n}) = 0;$$

$$\vdots$$

[1]) Případy $n = 1, 2, 3$ byly vyšetřovány v citované práci.

při tom pro n liché má poslední rovnice tvar

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right) (\lambda_{n-1} A_{l,n-1} + \lambda_n A_{l,n}) = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right)$$

a pro n sudé jsou pak poslední dvě rovnice

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^{l-2}} M\left(\frac{q}{k}\right) (\lambda_{n-2} A_{l-2,n-2} + \lambda_{n-1} A_{l-2,n-1} + \lambda_n A_{l-2,n}) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right) (\lambda_n A_{l,n}) = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right).$$

Funkce $\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^m} M\left(\frac{q}{k}\right)$ není jakožto funkce (nespojitě) proměnné q identicky rovna nule, jde tedy o otázku řešitelnosti soustavy lineárních rovnic. Rozdělíme vyšetřování na dva případy:

a) n je liché. Soustava $\frac{n-1}{2}$ lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 0 \,.\, \lambda_1 + A_{12}\lambda_2 + A_{13}\lambda_3 + A_{14}\lambda_4 + \dots + A_{1,n-1}\lambda_{n-1} + A_{1,n}\lambda_n &= 0\ , \\ A_{34}\lambda_4 + \dots + A_{3,n-1}\lambda_{n-1} + A_{3,n}\lambda_n &= 0\ , \\ &\vdots \\ A_{l,n-1}\lambda_{n-1} + A_{l,n}\lambda_n &= 1 \end{aligned}$$

o n neznámých $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ má řešení. Mají totiž matice soustavy i matice rozšířená stejnou hodnost $\frac{n-1}{2}$, neboť na př. determinant

$$\begin{vmatrix} A_{12} & A_{14} & \dots & A_{1,n-1} \\ 0 & A_{34} & \dots & A_{3,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{l,n-1} \end{vmatrix} = A_{12}A_{34} \dots A_{l,n-1} \neq 0\ . \tag{5}$$

S ohledem na nenulový determinant (5) je možno hodnoty neznámých $\lambda_1, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ (indexy probíhají všechna lichá čísla) volit libovolně; zvláště je tedy možno volit $\lambda_n \neq 0$.

b) n je sudé. Soustava $\frac{1}{2}n$ lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 0 \,.\, \lambda_1 + A_{12}\lambda_2 + A_{13}\lambda_3 + A_{14}\lambda_4 + \dots + A_{1,n-2}\lambda_{n-2} + A_{1,n-1}\lambda_{n-1} + & \\ + A_{1,n}\lambda_n &= 0\ , \\ A_{34}\lambda_4 + \dots + A_{3,n-2}\lambda_{n-2} + A_{3,n-1}\lambda_{n-1} + A_{3,n}\lambda_n &= 0\ , \\ &\vdots \\ A_{l-2,n-2}\lambda_{n-2} + A_{l-2,n-1}\lambda_{n-1} + A_{l-2,n}\lambda_n &= 0\ , \\ A_{l,n}\lambda_n &= 1 \end{aligned}$$

o n neznámých $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ má řešení. Mají totiž matice soustavy i matice rozšířená stejnou hodnost $\frac{1}{2}n$, neboť determinant

$$\begin{vmatrix} A_{12} & A_{14} & \dots & A_{1,n} \\ 0 & A_{34} & \dots & A_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{l,n} \end{vmatrix} = A_{12}A_{34} \dots A_{l,n} \neq 0 \; .$$

Z poslední rovnice pak plyne $\lambda_n = \frac{1}{A_{l,n}} \neq 0$.

Je tedy možno v obou případech najíti takovou soustavu konstant $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ $\dots, \lambda_n$, aby platilo

$$H(q) = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right) ,$$

kde

$$H(q) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i H_i(q) \; ;$$

$H(q)$ je tedy výraz tvaru $\sum_{\varrho<1}^{q} P(\varrho)$, kde P je polynom n-tého stupně v ϱ indexu q.

Předpokládejme, že platí Riemannova domněnka. Pak platí (I) a tedy pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$\left|\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right)\right| < \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} C_1 \frac{q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{k^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = C_1 q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^{l+\frac{1}{2}+\varepsilon}} ,$$

kde C_1 a dále se vyskytující C_i jsou kladné konstanty. Protože řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{l+\frac{1}{2}+\varepsilon}}$ je konvergentní, je součet $\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^{l+\frac{1}{2}+\varepsilon}}$ pro každé q stále menší než C_2. Platí tedy pro každé $\varepsilon > 0$

$$|H(q)| < C_3 q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \tag{6'}$$

a tedy

$$H(q) = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \; . \tag{6}$$

Dokážeme nyní, že i naopak z platnosti (6) plyne správnost Riemannovy domněnky. Utvořme výrazy

$$\frac{\mu(1)}{1^l} H(q), \; \frac{\mu(2)}{2^l} H\left(\left[\frac{q}{2}\right]\right), \dots, \frac{\mu(q)}{q^l} H\left(\frac{q}{q}\right)$$

a sečtěme je:

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\mu(i)}{i^l} H\left(\left[\frac{q}{i}\right]\right) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\mu(i)}{i^l} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{ki}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{\left[\frac{q}{k}\right]} \frac{\mu(i)}{k^l i^l} M\left(\frac{q}{ki}\right) = \sum_{a=1}^{q} \frac{1}{a^l} M\left(\frac{q}{a}\right) \sum_{d/a} \mu(d) = M(q) \; ,$$

neboť $\sum_{d/a} \mu(d) = 0$ pro $a > 1$ a $\mu(1) = 1$ ([2], 1, str. 20—21). Dostáváme tedy

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\mu(i)}{i^l} H\left(\left[\frac{q}{i}\right]\right) = M(q) \; .$$

Předpokládejme, že platí (6); potom

$$\left|\sum_{i=1}^{q} \frac{\mu(i)}{i^l} H\left(\left[\frac{q}{i}\right]\right)\right| < \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{i^l} C_4 \frac{q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{i^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = C_4 q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{i^{l+\frac{1}{2}+\varepsilon}} .$$

Tedy

$$|M(q)| < C_5 q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

a z toho

$$M(q) = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) .$$

Je tedy i platnost (6) *ekvivalentní s platností Riemannovy domněnky.*

Získaný výsledek je ostřejší než snadno patrná skutečnost, že Riemannova domněnka je ekvivalentní se současnou platností všech vztahů: pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$H_i(q) = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad i = 2, 3, \ldots, n .$$

Tato skutečnost totiž nezaručuje existenci takové lineární kombinace $H(q) = \sum_{i=1}^{n} c_i H_i(q)$, pro kterou platí ekvivalence mezi platností vztahu

$$H(q) = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \text{ pro každé } \varepsilon > 0$$

a Riemannovou domněnkou.

Avšak při tvoření lineární kombinace $H(q)$ s konstantami $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ je nám ponechána určitá volnost, neboť, jak víme, můžeme *některé z těchto konstant libovolně volit*. A možná, že *vhodná volba těchto konstant* by mohla pomoci při podrobnějším vyšetřování *chování funkce $H(q)$ pro velká q.*

LITERATURA

[1] *E. Cesàro,* Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung, Leipzig (1904).

[2] *E. Landau,* Vorlesungen über Zahlentheorie, 1., 2., Leipzig (1927).

[3] *E. T. Whittaker, G. N. Watson,* A Course of Modern Analysis, Cambridge (1920).

RŮZNÉ

V této rubrice budeme uveřejňovat různá kratší sdělení a matematické dotazy a odpovědi čtenářů, o nichž se mluví v úvodním článku „Nové úkoly".

APROXIMAČNÍ VZTAHY V OBORU STATIKY OBLOUKOVÝCH NOSNÍKŮ

FRANTIŠEK BRANDLER, Praha.

(Došlo 26. května 1953.)

Jak známo, řešíme ve stavebné mechanice staticky neurčité konstrukce často z podmínky minima přetvárné práce. Tak na př. při řešení obloukového nosníku ACB se střednicí $y = f(x)$, na obou koncích dokonale vetknutého (obr. a) a libovolně zatíženého (obr. b), určujeme staticky neurčité veličiny z podmínky, aby přetvárná práce, která — dbáme-li pouze účinku ohybových momentů — je dána výrazem

$$\Pi = \frac{1}{2\mathrm{E}} \int_0^l \frac{[\mathbf{M}(x)]^2}{J(x) \cos \varphi(x)} \, dx \, , \tag{1}$$

byla minimem. Při tom je E určitá konstanta (t. zv. modul pružnosti), $J(x) > 0$ moment setrvačnosti průřezu v obecném bodě $M[x, f(x)]$ oblouku, dále

$$\cos \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}} \, , \text{ a}$$

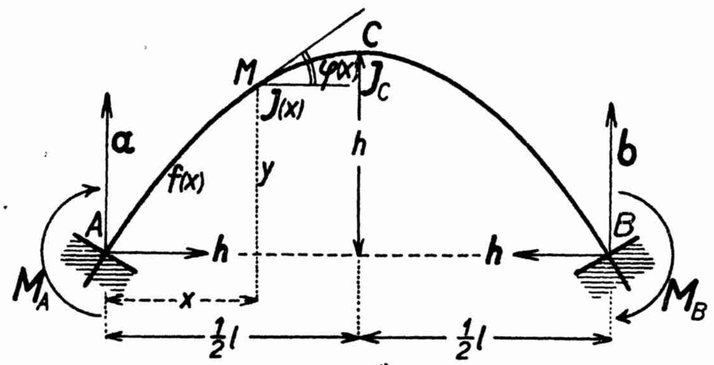
$$\mathbf{M}(x) = \mathfrak{M}(x) + \mathbf{M}_A + \mathbf{a}'x - \mathbf{h}f(x)$$

výsledný ohybový moment v tomto bodě, při čemž značí: $\mathfrak{M}(x)$ ohybový moment prostého obloukového nosníku, tedy veličinu závislou pouze na vnějším zatížení, $\mathbf{M}_A$ moment upnutí v bodě A, dále $\mathbf{a}'$ složku celkové svislé reakce $\mathbf{a}$ vyvozenou rovnováhovou soustavou staticky neurčitých veličin a $\mathbf{h}$ vodorovnou sílu působící ve spojnici AB.

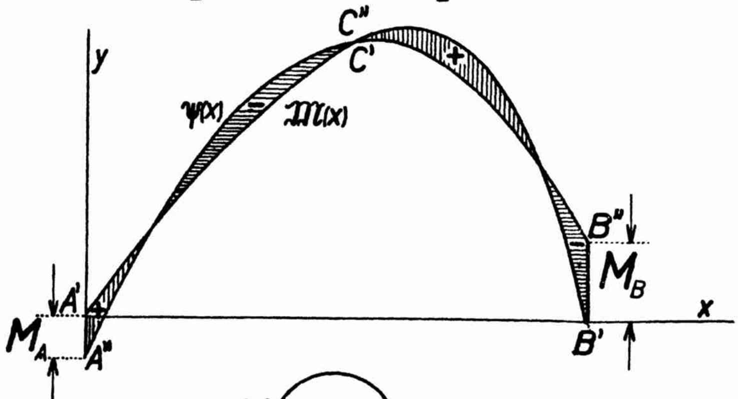
U souměrného parabolického oblouku $y = \frac{4h}{l^2} x(l - x)$ o rozpětí l a vzepětí h plynou tudíž hledané staticky neurčité veličiny $\mathbf{M}_A$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{h}$ z podmínky

$$\Pi = \frac{1}{2\mathrm{E}} \int_0^l \left[\mathfrak{M}(x) + \mathbf{M}_A + \left(\mathbf{a}' - \frac{4h}{l} \mathbf{h} \right) x + \frac{4h}{l^2} \mathbf{h} x^2 \right]^2 \frac{1}{J(x) \cos \varphi(x)} \, dx = \min . \tag{2}$$

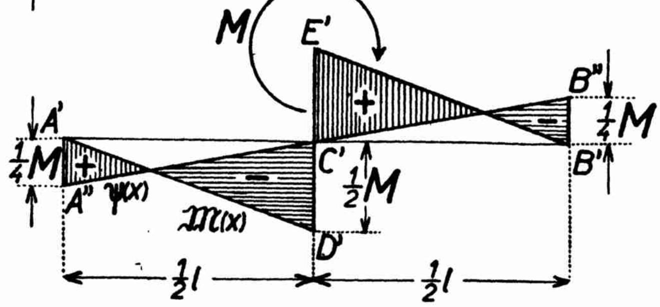
Obr. *b*.



Obr. *a*.



Obr. *c*.



Obr. *d*.

Tímto článkem chtěl bych upozornit, že někdy je výhodné chápati posléze uvedený integrál v poněkud jiném smyslu, než je to běžné ve stavebné mechanice. Ze struktury vzorce (2) totiž vidíme, že na statický úkol určení veličin $\boldsymbol{M_A}$, $\boldsymbol{a'}$, $\boldsymbol{h}$ můžeme také pohlížeti jako na problém aproximační: hledáme nejlepší aproximaci dané funkce $F(x)$, zobrazené momentovým průběhem

$\mathfrak{M}(x)$, pomocí kvadratického polynomu („vyrovnávací paraboly") $\psi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ ve smyslu methody nejmenších čtverců s danou vahou $\Phi(x) = \frac{1}{J(x) \cos \varphi(x)}$. Momentový průběh $A''C''B''$, vyvozený rovnováhovou soustavou staticky neurčitých veličin, je tedy s tohoto hlediska vyrovnávací parabolou momentového průběhu $A'C'B'$ prostého nosníku (viz obr. c), při čemž hodnota vodorovné síly plyne z relace $h = -\frac{l^2}{4h} \alpha_2$.

Všimněme si charakteristické a s hlediska hospodárného dimensování konstrukce i prakticky významné okolnosti, že výsledný momentový obrazec, znázorněný na obr. c čárkovaně, je dán rozdílem mezi momentovým průběhem $\mathfrak{M}(x)$ a aproximační kvadratickou parabolou. Proto také jsou v četných průřezech výsledné momenty $\boldsymbol{M}(x)$, co do absolutní hodnoty, proti momentům $\mathfrak{M}(x)$ prostého nosníku podstatně menší a celkové rozložení těchto výsledných momentů v oblouku se vyznačuje určitou vyrovnaností, typickou pro takovéto aproximační průběhy.

Je zřejmé, že shora navrhovaným pojetím můžeme někdy snadno dospěti k určitým statickým závěrům, které jinak by vyžadovaly zvláštních analytických úvah. Uvažujme na př. případ úplného rovnoměrného zatížení oblouku. Ježto momentový průběh $\mathfrak{M}(x)$ je zde kvadratickou parabolou, je z pojmu aproximace okamžitě patrno, že vyrovnávací parabola ztotožní se s tímto průběhem. Staticky to znamená, že oblouk bude ve všech průřezech namáhán prostým tlakem a to nezávisle na průběhu průřezových změn. Platí tudíž tento vztah i pro jiné parabolické oblouky zmíněným způsobem zatížené, pro oblouky s kloubem ve vrcholu nebo vetknuté do jedné podpory s kloubem v podpoře druhé, i pro oblouky o dvou opěrných kloubech.

Uveďme ještě další příklad, kde pomocí této methody dospějeme k výsledku rovněž jednoduchou úvahou. Předpokládejme, že $J(x) \cos \varphi(x) = J_C =$ konst. a že na oblouk působí ve vrcholu moment $\boldsymbol{M}$ (obr. d). Tomuto zatížení odpovídá u prostého nosníku momentový průběh $A'D'C'E'B'$ souměrný podle středu C'. Z povahy této symetrie bezprostředně plyne, že vyrovnávací parabola tohoto průběhu degeneruje zde v přímku $A''B''$ („vyrovnávací přímku"), probíhající středem souměrnosti C'. Ježto však $\alpha_2 = 0$, je i horizontální síla $h = 0$, takže výsledný momentový obrazec obloukového nosníku se v tomto případě kryje s momentovým obrazcem příslušného přímého nosníku, na obou koncích vetknutého.

Z tohoto pojmu aproximace lze pochopitelně vyházeti též při řešení některých jiných staticky neurčitých konstrukcí, na př. rámů, ovšem s obměnou, vyplývající ze statické povahy příslušné soustavy.

RECENSE ČLÁNKŮ A KNIH

I. M. Gelfand, **Lineární algebra.** Z druhého vydání (1951) přeložil RNDr *Miroslav Fiedler.* Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1953. Stran 232, náklad 3300, cena brož. 22 Kčs.

Překladem Gelfandovy knížky se dostává do naší matematické literatury pěkná a svěže psaná základní učebnice o lineární algebře, disciplině, zaujímající v dnešní matematice významné postavení svými souvislostmi s mnoha partiemi matematiky. Autor vskutku také věnuje hodně pozornosti tomu, aby na užití method a výsledků lineární algebry čtenáře upozornil. Ráz knihy je elementární; k porozumění stačí znát základní věty z theorie determinantů a matic, pojem tělesa (stačí těleso reálných a komplexních čísel) a elementy analysy (pro porozumění příkladům).

Protože o originálu, jehož překladem je tato kniha, nalezne čtenář překlad *Šafarevičovy* recense v Časopise pro pěstování matematiky, 77 (1952), str. 308—309, není třeba se tu šířit o rozsahu probírané látky a o jejím podání. Všimněme si toliko vlastního překladu. Tu je třeba říci, že kniha je přeložena velmi pečlivě. Překlad se čte dobře; jen na velmi málo místech působí trochu nečesky (na př. na str. 123, 4. ř. shora: ,,Operace nalezení druhé odmocniny ...“). S pozorností a zdarem jsou přeloženy odborné názvy.

Vskutku s velkou pečlivostí opravil překladatel nepřesnosti a tiskové chyby vyskytující se v originálu ve značném počtu. Uveďme jen namátkou: důkaz Cauchy-Buňakovského nerovnosti, při němž v originálu je opomenut případ, kdy se v nerovnosti vyskytne nulový vektor; úhel φ dvou vektorů, při jehož definici není v originále zdůrazněno, že tu běží o nenulové vektory a není řečeno, v jakém intervalu číslo φ uvažujeme. Při výkladu o analogii rozkladu lineárního zobrazení v součin unitárního a symetrického zobrazení s goniometrickým vyjádřením komplexního čísla Gelfand říká, že každé komplexní číslo lze psát jako součin kladného čísla s číslem o absolutní hodnotě rovné jedné, a že analogií kladných čísel jsou t. zv. kladně definitní lineární zobrazení $\boldsymbol{H}$, t. j. taková, jež jsou symetrická a pro něž $(\boldsymbol{H}x, x) \geqq 0$. V překladu je opraveno slovo ,,*kladný*“ na ,,*nezáporný*“.

Vážnější nedostatky však obsahuje originál v dodatcích, věnovaných numerickým methodám v lineární algebře. Na př. při řešení soustavy lineárních rovnic eliminační methodou autor neříká, že se tu předpokládá nenulovost determinantu soustavy a tudíž neříká čtenáři ani nic o tom, jak postupovat, aniž bychom se předem museli přesvědčovat, že tento determinant je různý od nuly. To vše, jakož i podobné opomenutí při výpočtu inversní matice, je v překladu doplněno. Úplně přepracoval překladatel výklad o Danilevského methodě pro výpočet charakteristického polynomu matice, který je v originálu založen na nesprávném tvrzení, že λ-matici $A - \lambda E$ lze elementárními transformacemi převést na matici, která má Frobeniův normální tvar (definici viz v překladu na str. 211).

Přes tuto péči zůstala v překladu ještě drobná nedopatření z originálu, na něž čtenáře upozorňujeme: na str. 30, ř. 11 shora místo ,,orthogonální base“ čti ,,orthonormální base“; na str. 153, ř. 18 zdola místo ,,Potom je“ čti ,,Potom je na příklad“ a ve vzorci na následujícím řádku místo a'_{ik} čti a'_{1k}. Tiskových chyb je v překladu velmi málo a čtenář si je sám snadno opraví.

Překladatel doplnil knihu dobře sestaveným rejstříkem, který v originále chybí. Škoda jen, že jednotlivé stránky nejsou jako v originálu opatřeny záhlavím označujícím číslo a název právě probírané kapitoly resp. paragrafu. Toto opatření, velmi usnadňující orientaci v knize, se v naší matematické literatuře vůbec vyskytuje velmi řídce. Bylo by žádoucí je zavést.

Kniha bude jistě vítanou pomůckou našim posluchačům matematiky a svým výkladem o numerických methodách v lineární algebře může pomoci — i když skromně — praxi.

Václav Vilhelm, Praha.

ZPRÁVY

ZVOLENÍ NOVÝCH ČLENŮ KORESPONDENTŮ ČESKOSLOVENSKÉ AKADEMIE VĚD

Dne 8. prosince 1953 byli zvoleni v zasedání Československé akademie věd prof. dr *Otakar Borůvka* a prof. dr *Miloš Kössler* novými členy korespondenty ČSAV. Této pocty se dostává prof. Borůvkovi za práce z matematické analysy a prof. Kösslerovi za práce z oboru analytických funkcí.

Redakce.

ŠEDESÁT LET PROFESORA JANKO

Dne 3. prosince 1953 se dožil šedesáti let profesor matematiky dr *Jaroslav Janko*, vynikající odborník v matematické statistice. Katedra matematické statistiky na matematicko-fysikální fakultě Karlovy university uspořádala na jeho počest slavnostní schůzi, jíž se súčastnili četní žáci a přátelé profesora Janko. Na schůzi bylo zhodnoceno dílo jubilantovo po stránce vědecké, organisační a didaktické. Referáty přednesli dr *L. Truksa*, docent na katedře matematické statistiky, ing. *Jiří Klozar* z ministerstva vnitřního obchodu a ing. dr *Vl. Klega* z Výzkumného ústavu těžkého strojírenství. Slavnost proběhla v srdečném ovzduší, k čemuž nemalou měrou přispěl jubilant sám svým závěrečným projevem.

Referát o díle profesora Janko přineseme v příštím čísle.

Josef Novák, Praha.

OSMÝ SJEZD POLSKÝCH MATEMATIKŮ VE VARŠAVĚ 1953

Ve dnech 6. až 12. září 1953 konal se ve Varšavě 8. sjezd polských matematiků. Od 7. sjezdu polských matematiků, který se konal r. 1949 v Praze společně s 3. sjezdem matematiků československých uplynuly tedy čtyři roky. Byla to poměrně značná přestávka, neboť po válce se až do roku 1949 konaly sjezdy polských matematiků každý rok. V oněch čtyřech letech se sběhly některé události, velmi významné pro rozvoj polské vědy obecně i pro rozvoj matematiky zvláště. Předně byl založen *Państwowy Institut Matematyczny* (PIM), který se ujal řízení celého matematického bádání v Polsku, a za druhé byla utvořena *Polska Akademia Nauk* (PAN) jako vrcholná instituce vědecká v Polsku. Do Polské akademie nauk se pak začlenil Państwowy Institut Matematyczny jako jeden z jejích ústavů.

8. sjezd matematiků polských byl připravován v PIM dlouhou dobu, neboť bylo rozhodnuto, že nebude organisován starým způsobem. Bylo vybráno pět témat a stanoveno, aby na každé toto téma byl vypracován obsáhlý referát, který by byl na sjezdě podkladem pro diskusi. Každý referát byl svěřen jedné skupině polských matematiků, aby jej vypracovala. Na referátech se pracovalo téměř dvě léta.

Polákům se podařilo shromáždit ve Varšavě na sjezdě řadu zahraničních hostí z SSSR, z lidově demokratických států, avšak i ze států kapitalistických.

Ze Sovětského svazu přijeli: *A. N. Kolmogorov*, *P. S. Alexandrov* z Moskvy a kromě nich ještě dva mladí matematici: *O. Olennikovά*, která pracuje v theorii parciálních diferenciálních rovnic v Moskvě a *S. N. Margeljan* z Arménské SSR, který se zabývá teorií funkcí komplexní proměnné. Z Maďarska přijeli: *G. Hajós*, *A. Alexits*, *J. Egerváry*, *A. Rényi*, *L. Kalmár*, *Sz. Nagy*, *P. Turán*; z Rumunska: prof. *Popovici* z Kluže a mladý matematik zabývající se diferenciálními rovnicemi *Halamay*; z Bulharska prof. *Čakalov* a prof. *Georgiev*, z NDR *Grell*, *Schröder a Möglich* z Berlína a *Willers* z Drážďan. Z Československa byla Československou akademií věd vyslána delegace: *Vl. Kořínek*, *O. Borůvka*, *Št. Schwarz*, *L. Rieger*, *I. Babuška*, *J. Mařík*, *J. Kurzweil*. Sjezdu se zúčastnil i dr. *Antonín Svoboda*, vedoucí laboratoře matematických strojů ČSAV, který právě v té době byl na měsíčním pobytu v Polsku.

Ze západních zemí přijeli: z Anglie *A. C. Offord*, *H. Levy* z Londýna, ze Švédska prof. *Wold*, statistik u Upsaly, z Dánska *B. Ch. Jessen*, z Holandska *H. Freudenthal*, z Belgie *P. Libois*, ze Švýcarska *G. De Rahm*, z Rakouska prof. *Radon* z Vídně, z Italie prof. *M. Picone*, prof. *G. Sansone* a prof. *L. Lombardo Radice*. Někteří matematici ze západních států, kteří byli pozváni, nepřijeli. Tak na příklad nepřijel nikdo z Francie. Všichni zahraniční účastníci byli po celou dobu svého pobytu v Polsku hosty Polské akademie nauk. Byli ubytováni všichni v hotelu Orbis (dříve hotel Bristol) v ulici Krakowskie Predmieście, v jednom z nejlepších varšavských hotelů, který je určen především pro cizince. V hotelu se scházeli tito účastníci třikrát denně při společném jídle. Pohostinství polské bylo velkolepé a bylo pamatováno i na všechny drobnosti, jako je na př. kuřivo nebo minerální voda večer v pokoji.

Domácích účastníků bylo kolem 140. Byli to prakticky všichni vědecky pracující matematici polští. I těm byl celý pobyt ve Varšavě, pokud sami tam nebydlili, placen. Byli ubytováni v hotelu Polonia na Alejích Jerozolimských. To mělo tu nevýhodu, že mezi zahraničními účastníky a domácími matematiky nebyl tak úzký styk mimo budovu sjezdu. Tomu odpomáhali Poláci tím, že vždy 6 až 8 polských matematiků, kteří se střídali, obědvalo a večeřelo v hotelu Orbis se zahraničními hosty.

V neděli 6. září dopoledne byl sjezd zahájen slavnostní schůzí v paláci Radziwilů, který patří předsednictvu vlády. Na schůzi, jíž se zúčastnili dva ministři a president Polské akademie nauk, bylo zvoleno předsednictvo sjezdu: předsedou byl zvolen prof. *Sierpiński*, místopředsedy prof. *Kuratowski*, prof. *Steinhaus* a prof. *Ważewski*, sekretáři sjezdu prof. *Mostowski* a prof. *Bielecki*. O zahraniční účastníky sjezdu staral se doc. *M. Stark*.

Od pondělí 7. září až do soboty 12. září konala se jednání sjezdová. Dopoledne v 9,30 hod. začínala plenární schůze, na níž byl přednesen od pondělí až do pátku vždy jeden z pěti hlavních referátů, po němž následovala diskuse. Po diskusi byly dány ještě na pořad některé velké referáty zahraničních (*Alexandrov*, *Kolmogorov*, *Rényi*, *Libois*, *Egerváry*) i domácích matematiků, které obyčejně tématem souvisely nějak s předneseným referátem. Dopolední jednání končilo přibližně kolem 13,30 hod. Sekce zasedaly odpoledne v úterý 8., ve středu 9., v pátek 11. a v sobotu 12. vždy od 16 hod. do 19 hod. Někdy končila některá sekce svá jednání až i v 19,30 hod. V sobotu 12. dopoledne měl prof. *Kuratowski* velkou přednášku: Organisace matematiky v lidovém Polsku, její dnešní stav a její problémy. Po přednášce zasedaly i dopoledne sekce. Odpoledne začala v 18 hod. závěrečná schůze sjezdu, v níž pronesli zahraniční účastníci děkovací proslovy. Všechny tyto schůze konaly se v sídle Polské akademie nauk, v paláci Staszicově, který stojí na rozhraní ulic Nowy Świat a Krakowskie Predmieście.

Pro sjezd bylo připraveno těchto pět referátů:

1. Dnešní stav bádání o základech matematiky, vypracovaný prof. *Mostowským* a jeho skupinou.

2. Vliv moderních matematických metod na klasické matematické teorie, vypracovaný prof. *Ważewským* a jeho skupinou.

3. Teorie pravděpodobnosti, jakožto nástroj výzkumu v oboru přírodních věd a výroby, vypracovaný prof. *Steinhausem* a jeho skupinou.

4. Význam moderní fysiky pro vývoj matematiky, vypracovaný prof. *Infeldem* a jeho skupinou.

5. Matematické metody moderní techniky, vypracovaný skupinou vedenou prof. *Turským*.

Referáty byly rozmnoženy v jazycích polském, ruském a anglickém neb francouzském a rozdány účastníkům předem. Přednášející mohli se tedy omezit jen na zdůraznění hlavních bodů referátů a vytčení a rozbor těch věcí, o nichž by se mělo podle jejich mínění diskutovat. To se nejlépe podařilo prof. Mostowskému. Prof. Infeld se diskuse nezúčastnil, neboť dlel právě mimo Varšavu. První referát týkal se oboru, v němž polští matematici mnoho pracovali a měli znamenité výsledky. Druhý referát chtěl obrátit pozornost polských matematiků na klasické obory matematiky a vyzdvihnouti ty věci, jimiž polská matematika přispěla k rozvoji těchto oborů. Ostatní referáty měly za cíl vyzdvihnout důležitost aplikací matematiky, neboť před válkou měla polská matematika z největší části teoretický ráz.

V sekcích byla přednášena sdělení obvyklým způsobem. Tato sdělení týkala se rozličných oborů matematiky. Vedle matematické logiky, topologie, teorie reálných funkcí, funkcionální analysy, v níž polská matematika vynikala na světovém matematickém foru již před válkou, byla zastoupena teorie analytických funkcí a teorie diferenciálních rovnic, hlavně krakovskými matematiky, a především teorie pravděpodobnosti a vše, co s touto teorií souvisí. O teorii pravděpodobnosti je dnes v Polsku velký zájem a velmi usilovně se v ní pracuje, zvláště ve Vratislavi. Z algebry nebylo mnoho sdělení. Polští matematici přejí si však, aby algebra byla daleko více v Polsku pěstována než dosud. Jsem přesvědčen o tom, že kroky, které za tím účelem učinili, ponesou v brzku ovoce. Nejmenší zájem byl o teorii čísel.

Všichni naši matematikové, kteří se zúčastnili sjezdu, měli sdělení ze svého pracovního oboru:

1. *I. Babuška*: Hraniční vlastnosti funkcí biharmonických.
2. *O. Borůvka*: Nové vlastnosti integrálu v diferenciálních rovnicích 2. řádu.
3. *Vl. Kořínek*: Věta Schreierova ve svazech.
4. *J. Kurzweil*: O aproximacích v Banachových prostorech.
5. *J. Mařík*: Representace funkcionálu integrálem.
6. *L. Rieger*: O kvantifikátorech spojujících logické proměnné 2. řádu.
7. *Št. Schwarz*: O maximálních ideálech v teorii pologrup.

Se sjezdem byla, jak je obvyklo, spojena řada společenských událostí. Z nich uvedu jen prohlídku nově budované Varšavy, které bylo věnováno pondělní odpoledne a která udělala na všechny účastníky sjezdu hluboký dojem. Pisatel těchto řádků viděl ještě starou Varšavu v roce 1935, pak Varšavu zničenou, kde se teprve počalo s výstavbou, v roce 1948 a konečně Varšavu dnešní. To, co se ve Varšavě vykonalo od roku 1948, je prostě neuvěřitelné. Celé čtvrti byly znova postaveny, na obrovských plochách odklizeny trosky. Varšava se buduje podle velkoryse vypracovaných plánů. Jsou navrženy úplně nové široké třídy, některé staré třídy se značně rozšiřují (Marszalkowska). Zakládají se nová velká náměstí. Břeh Visly se upravuje v délce 10 km na park. Staví se podzemní dráha. Bývalé historické čtvrti budují se znova ve staré podobě, ovšem s moderními vnitřky domů. Člověk by snad měl proti té neb oné jednotlivosti námitky. Vcelku je však postup správný. Nové hlavní město se nestaví jen pro desetiletí.

Po skončení sjezdu pozvala Polská akademie nauk zahraniční účastníky na zájezd do Krakova a Zakopaného, který trval od neděle 13. září až do čtvrtka 17. září. Zahraniční hosté měli tak příležitost shlédnout staré město Krakov s krásnými památkami z polských dějin. Dále navštívili Nowou Hutu, nově budované stotisícové město 7 km východně od Krakova u velkého hutního kombinátu, Osvěčím se strašnými památkami na nacismus, a konečně Zakopané s divokou scenerií polských Tater. Příznivou náhodou byl v Zakopaném nádherný slunečný den a hory byly asi od výše 1700 m pokryty sněhem.

Na konec nezbývá mi než blahopřát Polské akademii nauk a polským matematikům za velmi zdařilý vědecký sjezd a poděkovat jim za skvělé pohostinství.

Vladimír Kořínek, Praha.

MEZINÁRODNÍ SJEZD DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE V ITALII

12. října 1953 referoval v pražské matematické obci akademik *E. Čech* o mezinárodním sjezdu diferenciální geometrie v Italii, jehož se sám zúčastnil na pozvání university v Bologni a Jednoty italských matematiků.

Sjezd, který byl do jisté míry pokračováním mezinárodního kolokvia diferenciální geometrie, konaného v květnu letošního roku ve Strassbourgu, pořádaly university v Pise, Bologni a Padově, Jednota italských matematiků za přispění Mezinárodní matematické unie a nadace G. Cini v Benátkách. Sjezdu se účastnilo asi 30 zahraničních matematiků. Z SSSR byli přítomni *A. D. Aleksandrov* a *S. P. Finikov*. Z matematiků zemí lidové demokracie byl na sjezdu pouze E. Čech. Sjezd byl zahájen 20. září, pokračoval 21. září v Padově, 22. a 23. září v Benátkách, 24. a 25. září v Bologni a 26. září byl ukončen v Pise.

Na pořad sjezdu byly zařazeny tři hlavní přednášky, věnované třem význačným italským geometrům: *G. Ricci-Curbastrovi*, zakladateli t. zv. absolutního počtu v diferenciální geometrii, *L. Cremonovi*, který založil italskou školu algebraické geometrie, a *L. Bianchimu*, dovršiteli klasického směru v diferenciální geometrii. O Riccim, narozeném právě před sto lety r. 1853, přednášel 21. září v Padově *A. Tonolo*. Přednášku o L. Cremonovi, zemřelém před padesáti lety r. 1903, proslovil 24. září v Bologni *Brusetti*, a o L. Bianchim promluvil u příležitosti jeho pětadvacetiletého úmrtí *W. Blaschke* 26. září v Pise.

Ostatní sjezdové přednášky byly odborné, někdy i dosti speciální. A. D. Aleksandrov přednášel o jistém rozšíření theorie konvexních ploch a S. P. Finikov referoval o výsledcích týkajících se jistých kongruencí *W*. E. Čech seznámil italské matematiky s jedním důležitým problémem své theorie korespondencí, s projektivní deformací vrstvy nadploch.

Z ostatních sjezdových přednášek buďtež zaznamenány alespoň tyto: V Padově přednášel *J. A. Schouten* o diferenciálních operátorech 1. řádu, *P. Finsler* o methodách diferenciální geometrie s hlediska infinitesimálního počtu, *Hodge* o některých otázkách z kombinatorické topologie a *H. Hopf* o některých svých výsledcích v diferenciální geometrii ve velkém. V Benátkách pokračoval sjezd mimo jiné přednáškami *A. Lichnerowicze*, *E. Kählera*, *B. Segre* a j., o závěrečných sjezdových dnech v Bologni pak přednáškou *L. Godeaux* o Moutardových kvadrikách a kuželosečkách a jinými.

Zbyněk Nádeník, Praha.

PŘEDNÁŠKY A DISKUSE

V matematické obci pražské pokračovaly od začátku studijního roku 1953—54 znovu pravidelné pondělní přednášky a diskuse. Účast na nich byla značná a diskuse byly živé.

Konaly se tyto přednášky a diskuse:

25. 9. 1953: *Eduard Čech*, Význam geometrie v historickém vývoji matematiky.
8. 9. 1953: O VIII. sjezdu polských matematiků konaném 7.—13. září ve Varšavě. Referovali: akademik *Vladimír Kořínek*, doc. dr *Ladislav Rieger*, dr *Jan Mařík*, dr *Jaroslav Kurzweil*, ing. dr *Ivo Babuška*.
6. 10. 1953: *Ivo Babuška*, Diskuse o aplikované matematice v souvislosti s VIII. sjezdem polských matematiků ve Varšavě.
12. 10. 1953: *Eduard Čech*, O mezinárodním sjezdu o diferenciální geometrii v Italii.
14. 10. 1953: *Jaroslav Janko*, Statistické rozhodování ve výzkumu.
19. 10. 1953: *Miroslav Katětov*, O theorii dimense.
26. 10. 1953: Diskuse o popularisaci matematiky. (Spolu s katedrou matematiky matematicko-fysikální fakulty Karlovy university, s katedrami matematiky Českého vysokého učení technického a Společností pro šíření politických a vědeckých znalostí.)
2. 11. 1953: *Jan Mařík*: O Diracově δ-funkci a Fourierově transformaci.
9. 11. 1953: *Alfréd Rényi*, člen korespondent Maďarské akademie věd, O základních pojmech pravděpodobnosti.
11. 11. 1953: *Alfréd Rényi*, člen korespondent Maďarské akademie věd, Theorie uspořádaných výběrů (variačních řad).
16. 11. 1953: *Vladimír Knichal*, O frekvenčně modulovaných vlnách.
20. 11. 1953: *Lev Kalužnin*, Vlastnosti grup automorfismů jistých grup.
23. 11. 1953: *Rózsa Péter*, Rekursivní funkce.
30. 11. 1953: *Vojtěch Jarník*, O druhém dílu integrálního počtu. *František Vyčichlo* podal zprávu komise pro terminologii.
7. 12. 1953: *Eduard Čech*, O stati A. N. Kolmogorova „O povolání matematika".

Referáty o některých přednáškách a diskusích uveřejníme v příštích číslech tohoto časopisu.

Matematická obec v Brně. Činnost brněnských matematiků se rozvíjí jednak v rámci Matematického ústavu ČSAV, jednak v JČMF. S podporou Matematického ústavu ČSAV koná se v Brně několik seminářů a přednášek.

Prof. dr *O. Borůvka* vede seminář pod názvem „Speciální vlastnosti diferenciálních rovnic obyčejných se zřetelem k aplikacím". Cílem je studium asymptotických vlastností integrálů diferenciálních lineárních rovnic vyšších řádů, nelineárních rovnic 2. řádu a rovnic důležitých s hlediska aplikací v technických vědách. Kromě toho vede prof. dr O. Borůvka přípravu kritického vydání některých spisů *Matyáše Lercha*. Jde o pokračování téhož úkolu z minulého roku, při čemž v letošním šk. r. 1953—54 se jedná hlavně o prostudování a kritické zhodnocení Lerchových prací z oboru eliptických funkcí a malmsténovských řad. Práce se zúčastní na 30 brněnských matematiků. Na společných schůzích jednotliví členové podávají referáty.

Prof. dr *K. Koutský* vede „Seminář elementární matematiky". Pokračuje se v probírání *Coolidgeovy* knihy „A treatise on the circle and the sphere". Dokončují se teoremy o kruhové inversi a bude se probírat geometrie trojúhelníka.

Na Vojenské technické akademii jsou jednak pro zájemce z vysokých škol a jednak pro techniky z praxe pořádány dva druhy přednášek. Jedny přednášky koná prof. dr *J. Kaucký* pod názvem „Základní pojmy z theorie matic“ a druhé dr *J. Čermák* pod názvem „Úvod do theorie funkcí komplexní proměnné.“

Na vysoké škole stavitelské vede prof. dr *J. Klapka* „Seminář diferenciální geometrie“. Probírá se projektivní theorie ploch a soustav lineárních prostorů a geometrické studium soustav diferenciálních rovnic.

Dr *J. Beránek* z Ústavu theoretické fysiky přírodovědecké fakulty vede „Seminář matematických method v theorii šíření elektromagnetických vln“. Probírá se šíření elektromagnetických vln ve vlnovodech a v kuželových trubicích s ohledem na jejich buzení a budou konány referáty členů semináře o některých důležitých problémech šíření elektromagnetických vln při povrchu Země, jakož i referáty týkající se ohybu elektromagnetických vln.

Co se týče JČMF, byly konány tři přednášky. Dne 29. 1. 1953 přednášel dr *M. Zlámal* na théma „O jednom Ljapunovově kriteriu stability“. Byl to předběžný referát o výsledcích, které pak byly publikovány v 3. č. letošního ročníku Čechoslovackij matematičeskij žurnal.

Dr *L. Frank* přednášel 5. 3. 1953 „O životě prof. Matyáše Lercha“. Přednáška vyšla tiskem v Časopise pro pěstování matematiky (r. 1953).

Na valném shromáždění dne 4. 6. 1953 přednášel prof. dr *O. Borůvka* na théma „Úkoly a cesty matematiky“. Přednáška byla rovněž publikována, a to v Pracích moravské akademie věd přírodních.

V matematickej obci v Bratislave konajú sa v školskom roku 1953/54 v rámci SAV nasledovné pravidelné semináre:

1. akademika SAV *J. Hronca* z teórie diferenciálnych rovníc dvojtýždenne v pondelok,
2. akademika SAV *Š. Schwarza* z modernej algebry týždenne v útorok,
3. dra *L. Mišíka* z teórie miery a integrálu týždenne v piatok.

Semináře konané při Matematickém ústavě ČSAV v Praze ve stud. roce 1953—54.

1. Seminář o numerických methodách početních vede ing. dr *Ivo Babuška*, prof. dr *Vl. Knichal*, dr *O. Vejvoda*.

Seminář sestává vlastně ze dvou částí, které se navzájem týdně proplétají, takže každá část probíhá v periodě čtrnáctidenní.

V prvé části bude probírána obecná theorie interpolace s aplikacemi na různé speciální případy, numerické integrování a derivování, numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic (Kutta-Runge, Adams) a parciálních diferenciálních rovnic (methoda sítí).

V druhé části budou probírány různé methody k řešení speciálních soustav lineárních rovnic vyskytujících se v technické praxi (zejména stavitelství).

Seminář se koná vždy v sobotu v Matematickém ústavě ČSAV, Praha IV, Loretánské nám. č. 3 (10,20—12,00).

2. Seminář o nelineárních oscilacích a theorii stability vede prof. dr *Vl. Knichal*, dr *O. Vejvoda*.

V prvém semestru byly probírány některé speciální fysikální příklady a základní topologické otázky vyskytující se při řešení diferenciálních rovnic z nelineární mechaniky. (V podstatě podle Stokerovy knihy.)

V druhém semestru byly studovány základní Ljapunovovy věty z theorie stability (v podstatě podle knihy Malkinovy, Teorija ustojčivosti dviženija).

Seminář se koná vždy ve čtvrtek v Matematickém ústavě Karlovy university, Praha II, Ke Karlovu 3 (9,50—11,30).

3. Seminář z theorie distribucí vede dr *Jan Mařík.*

V zimním semestru se v semináři probírají příklady z I. dílu Schwartzovy knihy o theorii distribucí. Letní semestr bude věnován studiu komposičního součinu distribucí (splotu) podle 6. kapitoly II. dílu téže knihy. Seminář se koná vždy ve čtvrtek (9,30 až 11,30) v Matematickém ústavu Karlovy university. Kromě toho pro zájemce, kteří se loni tohoto semináře neúčastnili, běží doplňovací seminář, kde se vykládají základní pojmy z theorie distribucí. Tento doplňovací seminář se koná ve středu (17—19) v Matematickém ústavu Karlovy university.

4. Seminář o theorii rovinné pružnosti vede ing. dr *Ivo Babuška.*

Seminář má dvě části, z nichž každá probíhá ve čtrnáctidenní periodě.

V prvé části je systematicky probírána theorie rovinné pružnosti. V zimním semestru byly vykládány fysikální základy z matematického hlediska. V letním semestru se přejde k systematickému studiu biharmonické rovnice.

V druhé části je referováno o vybraných článcích z časopisů, týkajících se matematického řešení problémů theorie pružnosti.

Seminář se koná vždy v pátek v Matematickém ústavě Karlovy university (15—17).

5. Seminář matematické didaktiky vede akademik *E. Čech.* Seminář je věnován různým otázkám vyučování matematice na obecně vzdělávacích školách. Na přání účastníků se probírají nejprve otázky elementární geometrie jako na př.: jak vycházet od žákových zkušeností při zavádění geometrických pojmů, jak určit přesnému a při tom věku žáků přiměřenému vyjadřování, jak učit žáka, aby samostatně chápal čtený matematický text, jak učit lásce k předmětu a při tom zároveň lásce k práci, jak dosáhnout co největší aktivity žáků, jak spojovat různé body učiva v organický celek a pod.

Seminář se koná vždy ve čtvrtek (18—20) v Matematickém ústavě Karlovy university.

Semináře konané při matematicko-fysikální fakultě Karlovy university v zimním a letním semestru 1953-54.

1. Seminář akademika *Boh. Bydžovského* o theorii transformací a jejich grup; v úterý (17—19).
2. Seminář akademika *Ed. Čecha* o speciálních funkcích; v pondělí (8—10).
3. Seminář akademika *Vl. Kořínka,* Vybrané partie z theorie grup; v pondělí (14—16).
4. Seminář člena korespondenta *Mir. Katětova* z topologie; ve středu (16—18).
5. Seminář prof. dra *Miloše Kösslera* z analytických funkcí; v úterý (17—19).
6. Seminář aspiranta *Ilji Černého* z topologie; v pátek (15—17).
7. Seminář doc. dra *Albíny Dratvové,* Úvod do moderní logiky; ve středu (15—17).
8. Seminář doc. dra *Albíny Dratvové* o matematické logice; ve čtvrtek (11—13).
9. Seminář doc. dra *Lad. Trnky* a dra *Josefa Bílého* o matematické statistice; ve středu (10—12).

Tyto semináře se konají v Matematickém ústavě Karlovy university.

10. Seminář prof. dra *Jar. Janko* o matematické statistice technického směru (4 hod. týdně) v Matematickém ústavě Vysokého učení technického v Praze II, Na Bojišti 3.

Matematické semináře na vysokých školách technických v Praze.

Na českém vysokém učení technickém přistoupily jednotlivé fakulty k plánování odborné a vědecké činnosti učitelských sil, poněvadž se poznalo, že je naléhavé tuto činnost zajistit a podpořit, aby pedagogická práce se kvalitně nezhoršovala:

Při velkém zatížení vyučovacími povinnostmi je obtížné vědecky pracovat, poněvadž není splněn základní předpoklad, totiž, aby každý z učitelů měl v týdnu alespoň 3 půldny souvislého, ničím nenarušeného pracovního klidu pro takovou práci. Jednotlivé fakulty se však o to snaží, a proto když v blízké budoucnosti budou katedry malými celky, dobře personálně vybavenými, bude možno přece jen vědeckou práci zajistit. Nevzniknou-li ovšem zatím jiné závady zásahem ústředních úřadů.

Aby mohli mladší asistenti snáze prohlubovat své vědomosti a aby se naučili v kolektivu pracovníků katedry debatovat a hájit své řešení jednoduchých problémů, zřídily katedry matematiky semináře; do nich chodí také asistenti a aspiranti různých technických disciplin.

Tak na katedře matematiky a deskriptivní geometrie fakulty inženýrského stavitelství prohlubují si asistenti vědomosti z analysy, která je předmětem výuky na technikách, v semináři o *metrických prostorech.*

Na četných příkladech se studují vlastnosti různých metrických prostorů majících význam pro analysu. Vodítkem při studiu je kniha Jarníkova o diferenciálním počtu (2. díl). Seminář vede dr *Miloš Lánský*; účastníků je asi 20, doba seminářů: středa (17—19) čtrnáctidenně v Praze II, Na Bojišti 3.

Pro asistenty, kteří pracují v diferenciální geometrii, vede seminář *o prostorech s afinní konexí* prof. dr *František Vyčichlo.* Jednotliví účastníci (9) referují zatím o dílčích problémech z theorie Riemannových prostorů. Seminář se koná každou středu (10—12) v Praze II, Na Bojišti 3.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie fakulty elektrotechnického inženýrství zřídila tyto semináře:

Seminář *o rovinném pohybu,* v němž jsou studovány analytickou geometrií pohybové invarianty. Později budou studovány vlastnosti invariantní při afinní grupě s proměnnými koeficienty. Seminář vede prof. dr *Zdeněk Pírko* každé úterý (17,45—19,30) v Praze II, Na Bojišti 3 (7 účastníků).

Seminář *o diferenciálních rovnicích* a jejich užití v elektrotechnice vede prof. dr *Zdeněk Pírko* každou sobotu (7—9) v Praze I, Husova 5 pro 20 účastníků (asistenti elektrotechniky a j.).

Mimo tyto semináře se konají pracovní schůzky kroužků, které vytvořili někteří asistenti pracující v témže oboru. Takový kroužek pro *operátorový počet* vede *Oldřich Koníček* každý druhý pátek (15—17) v Praze II, Na Bojišti 3 a účastní se ho 6 asistentů. Kroužek pro *analysu* (podle Grebenča-Novoselova) vede každé druhé úterý dr *Miloš Neubauer* (10 účastníků) v Praze II, Na Bojišti 3 a konečně kroužek pro *matematickou logiku,* který vede doc. dr *Ladislav Rieger* v Praze II, Na Bojišti 3 .

V letním semestru přibude na katedře matematické fakulty elektrotechnické seminář doc. dr *Aloise Urbana* o *diferenciální geometrii* (podle Kaganovy knihy), kroužek pro práce Sobotkovy z *diferenciální geometrie* za vedení doc. dr *Aloise Urbana* a kroužek pro *theorii funkcí komplexní proměnné* (podle Saks-Zikmunda) za vedení dra *Miloše Neubauera.*

Na katedře matematické fakulty inženýrského stavitelství vede kroužek pro matematickou statistiku dr *Václav Alda.*

V letním semestru zahájí referáty kroužek pro *práce prof. Sobotky* z různých matematických oborů za vedení prof. dr *Františka Vyčichlo.*

Na vysoké škole chemické vede doc. dr *J. Bílek* seminář *o algebraické geometrii.* Předmětem studia jsou biracionální korespondence na algebraických varietách (aplikace theorie ohodnocení těles a theorie ideálů). Seminář se koná v Praze XIX v Matematickém ústavu vysoké školy chemické vždy ve čtvrtek (16—18) (6 účastníků).

Mimo to v pravidelných schůzích kateder referují učitelé jednotlivých pracovišť o methodických problémech, které řešili kolektivně podle plánu vyhlášeného příslušnou katedrou na stud. r. 1953/54. Takovým byl na př. referát s. dra *Borise Grubera* o výkladu integrálu v základním kurse na technikách (spolupracovali dr *V. Alda*, dr *V. Fabián*) a referát doc. dr *Ladislava Riegra* o totálním diferenciálu.

Je zřejmé, že nová organisace našeho vysokého školství dává možnosti tvořivé práci. Je jen třeba odstraňovat brzdy této činnosti a všemi silami pomáhat mladým pracovníkům k zlepšení kvality jejich učitelské práce; a prostředkem k tomu rozhodně je větší činnost vědecká. Doufejme, že semináře, o nichž se zmiňujeme, tuto práci podnítí.

NÁVŠTĚVY HOSTŮ Z CIZINY

Dne 18. září 1953 zastavila se v Praze maďarská delegace — profesor *G. Hajós*, profesor *L. Kalmár*, profesor *A. Rényi*, profesor *P. Turán* a zástupce bulharských matematiků akademik *L. N. Čakalov*, vracející se ze sjezdu polských matematiků ve Varšavě. Naši matematici se sešli s uvedenými zástupci maďarské a bulharské matematiky na přátelské večeři, na které byly prohovořeny některé aktuality.

V. K.

Ve dnech 16. 9. 1953 a 3. 10. 1953 měli českoslovenští matematikové vzácnou příležitost osobního kontaktu s anglickým vědcem *G. W. Whiteheadem*, vynikajícím pracovníkem v theorii homotopie, která je dnes jednou z nejvýznamnějších kapitol topologie, a má prvotřídní význam právě ve směru soustavného sbližování topologie s ostatními hlavními obory moderní matematiky. Českoslovenští matematikové se osobně seznámili s G. W. Whiteheadem v r. 1948 na sjezdu polských matematiků ve Varšavě. Whitehead přišel mezi nás jako člen delegace pokrokových anglických vědců, která odjela na 14 dní do SSSR, aby se seznámila s pokroky a úspěchy sovětské vědy. V Praze se zdržel jak před odjezdem do Sovětského svazu, tak i při cestě zpět, a získali jsme od něho cenné informace jak o jeho vlastní práci se svými žáky, tak i o topologickém bádání moskevské a leningradské školy v nejposlednější době. Rozhovorů s G. W. Whiteheadem se kromě akademika *Čecha* zúčastnil: akademik *Vojtěch Jarník* a akademik *Josef Novák*.

E. Č.

V době od 19. října do 24. listopadu 1953 dlel v Československu dr *Lev Kalužnin*, profesor matematiky na Humboldtově universitě v Berlíně (Německá demokratická republika). Větší část doby strávil v Karlových Varech, kde se léčil. Matematický ústav uspořádal dne 20. listopadu jeho přednášku na thema „Vlastnosti grup automorfismů jistých grup". Ve své přednášce podal zobecnění některých Baerových výsledků a dokázal je daleko jednoduššími methodami.

J. N.

Dne 4. listopadu 1953 přijel do Československa člen-korespondent Maďarské akademie věd *Alfréd Rényi*, profesor matematiky na universitě v Budapešti a ředitel Ústavu pro aplikovanou matematiku Maďarské akademie věd. Jeho vědecká cesta byla plánována v rámci kulturní dohody československo-maďarské. Účelem jeho cesty byly vědecké přednášky, z nichž dvě proslovil v Praze a po jedné v Brně a v Bratislavě, dále informativní rozhovory o stavu bádání v oboru matematiky, zejména pak v oboru aplikací matematiky v technice a oborech přírodovědných, a to jak v Československu, tak i v Maďarsku. Dalším důležitým úkolem jeho cesty bylo navázání čilejších vědeckých styků mezi matematiky maďarskými a československými.

První jeho přednášku na thema „O základních pojmech theorie pravděpodobnosti" uspořádal Matematický ústav Československé akademie věd v pondělí dne 9. listopadu v době, kdy se pravidelně schází matematická obec pražská. Přednáška byla ideologicky zaměřená; v této přednášce autor vylíčil historii theorie pravděpodobnosti, ideologicky zhodnotil význam theorie pravděpodobnosti a zvláště Kolmogorovovy axiomatiky a navrhl zobecnění, jež zdůvodnil potřebami aplikace pravděpodobnosti ve fysice. Druhou jeho přednášku „Theorie uspořádaných výběrů (variačních řad)" uspořádal Matematický ústav s katedrou matematické statistiky na matematicko-fysikální fakultě. V této přednášce profesor Rényi podal a matematicky zdůvodnil vlastní návrh testu, jenž je zobecněním známého testu Kolmogorov-Smirnovova. Prvá přednáška byla pronesena v jazyku ruském a druhá v jazyku německém. Po obou přednáškách se rozvinula živá diskuse.

Cenným přínosem k vzájemnému poznání a k navázání pravidelných vědeckých styků byly četné rozhovory profesora Rényiho s čelnými našimi matematiky a pracovními kolektivy. Tyto rozhovory se konaly jednak v Matematickém ústavu ČSAV, jednak na katedře matematické statistiky za přítomnosti kolektivu vědeckých pracovníků Výzkumného ústavu sdělovací techniky A. S. Popova a kolektivu odborníků z Výzkumného ústavu těžkého strojírenství, jednak na fakultě matematicko-fysikální a na českém Vysokém učení technickém v Praze.

Na počest laureáta Kossuthovy ceny A. Rényiho uspořádal maďarský vyslanec *Imre Horváth* večeři, na níž pozval naše přední vědce v oboru matematiky. Pan vyslanec s členy maďarského vyslanectví pobyli v družném rozhovoru s našimi matematiky až do pozdních hodin večerních. V neděli dne 16. listopadu se rozloučili pražští matematici s profesorem Rényim na společném obědě, jehož se také účastnil kulturní atašé maďarského vyslanectví *Léderer*.

Na zpáteční cestě zastavil se prof. Rényi v Brně, kde přírodovědecká fakulta Masarykovy university uspořádala jeho přednášku „O použití počtu pravděpodobnosti na vyšetřování chemických reakcí". Přednáška byla četně navštívena posluchači fakulty i učitelskými silami a setkala se se značným ohlasem. V Brně pobyl prof. Rényi dva dny. Další dva dny byly věnovány návštěvě Tater a prohlídce hvězdárny na Skalnatém plese, jakož i pokusné stanici kosmického záření na Lomnickém štítě. V pátek konala se pak v Bratislavě Rényiho přednáška, kterou uspořádala Slovenská akademie věd. Dne 22. listopadu odjel profesor Rényi po skoro třínedělním úspěšném pobytu v Československu do své vlasti.

J. N.

Na své cestě z Berlína se v Praze zastavila na dva dny dr *Rózsa Péter*, profesorka pedagogického institutu v Budapešti. Dr Péter pracuje již přes 20 let v oboru theorie rekursivních funkcí a její kniha *Rekursive Funktionen*, vyšlá v r. 1951 v Budapešti, je dobře známa i u nás.

V pondělí 23. listopadu 1953 proslovila dr Péter na schůzce matematické obce pražské německy přednášku, ve které podala stručný přehled theorie a užití rekursivních funkcí a uvedla novější výsledky, týkající se aplikací na matematickou logiku. Byla to především známá Kalmárova jednoduchá konstrukce nerozhodnutelných vět v jistých formálních systémech, splňujících minimální požadavky, dále pak nový společný výsledek L. Kalmára a přednášející, kteří dokázali, že Churchova věta o neřešitelnosti problému rozhodnutelnosti pro nižší predikátový počet je důsledkem Gödelových vět.

J. B.

ZE SCHŮZE VÝBORU JČMF KONANÉ DNE 25. LISTOPADU 1953 V MAT. ÚSTAVĚ KARLOVY UNIVERSITY

Po zahájení schůze předsedou akademikem *B. Bydžovským* byl schválen zápis o minulé schůzi výboru. Potom předseda podal zprávu o činnosti presidia Jednoty za dobu od 7. října 1952 do 25. listopadu 1953. Zmínil se především o úpravě majetkových poměrů

Jednoty v poslední době. Uvedl, že knihovna Jednoty je nyní majetkem Matematického ústavu ČSAV; je však přístupna členům Jednoty bez jakéhokoliv omezení. Bývalý dům Jednoty v Žitné ulici, který Jednota věnovala ČSAV, byl také Akademií převzat, a to v červnu 1953.

Prof. *Fr. Vyčichlo* podal stručný přehled o závěrečných účtech Jednoty za rok 1951 a 1952. Výbor vzal tuto zprávu na vědomí; bude předložena valné hromadě ke schválení.

Hlavním bodem schůze byl referát prof. *Mil. Valoucha,* který seznámil výbor s návrhem nových stanov Jednoty. Tento návrh vyplývá z nové úpravy činnosti vědeckých společností; podle něho bude Jednota dobrovolnou organisací ve smyslu zákona č. 68/1951 Sb. Bude to vědecká výběrová společnost přidružená k ČSAV, která bude sdružovat vědecké a odborné pracovníky v oborech matematiky, fysiky a věd příbuzných. Má pomáhat rozvoji vědy, seznamovat široké vrstvy vědeckých a odborných pracovníků s novými poznatky a výsledky vědy, zejména sovětské, podněcovat vědeckou a odbornou publikační činnost, pečovat o zvyšování odborné a ideologické úrovně členů, všímat si otázek vyučování a spolupracovat na popularisaci vědy. Tyto úkoly má Jednota plnit zejména pořádáním přednášek, organisováním vědeckých konferencí, pořádáním různých školení, poskytováním konsultací, spoluprací s jinými vědeckými, po případě školskými orgány a institucemi, jakož i vydáváním věstníků, časopisů i jiných publikací.

Působnost Jednoty se bude vztahovat na celé území ČSR. Bude mít krajské odbory pro jeden nebo více krajů. Sídlem Jednoty je Praha. Členové mají být čestní, činní a zahraniční. Činnými členy mohou být vědečtí a odborní pracovníci, učitelé a studenti, starší 18 let z oboru matematiky, fysiky a příbuzných oborů. Všichni členové mohou užívat výhod sjednaných Jednotou pro členy při odběru vědeckých časopisů a jiných publikací, při používání vědeckých knihoven a podobně.

Nejvyšším orgánem Jednoty je celostátní sjezd, který se skládá z delegátů volených na členských schůzích krajských odborů. Celostátní sjezd (mimo jiné) volí předsedu Jednoty a její ústřední výbor; tento výbor řídí činnost Jednoty v období mezi dvěma sjezdy. Na Slovensku jsou orgány Jednoty slovenská konference Jednoty a slovenský výbor s předsednictvem. Činnost Jednoty v krajích řídí 5 až 8členný výbor krajského odboru, a to podle směrnic ústředního výboru a podle usnesení členských schůzí. Prostředky Jednoty jsou: zápisné, členské příspěvky, dotace poskytované Jednotě z rozpočtu ČSAV, výtěžky z publikační a přednáškové činnosti, dary, věnování a odkazy.

V diskusi o návrhu stanov bylo zejména zdůrazněno, aby v návrhu stanov bylo konstatováno, že Jednota je pokračovatelkou původní JČMF. Potom bylo rozhodnuto, že se návrh stanov předloží nejprve odborům Jednoty, potom ČSAV a nakonec valné schůzi Jednoty ke schválení.

Schůze byla ukončena projevem předsedy, který poděkoval všem, kteří pracovali na návrhu nových stanov, zvláště pak prof. Valouchovi, jenž se této práce nejvíce zúčastnil.

Zapsal *Emil Kraemer*, Praha.

NÁZVY A ZNAČKY ELEMENTÁRNÍ MATEMATIKY

Na výzvu ministerstva školství ujala se sekce matematicko-fysikální ČSAV prací na terminologii a symbolice elementární matematiky. Byla proto ustavena komise (akademik *Kořínek*, předseda, *Havlíček, Macháček, Vejvoda* a *Vyčichlo*), která prohlédne a doplní dosavadní schválené normy: *Názvy a značky elementární matematiky* a předloží návrh k projednání širší matematické veřejnosti.

Komise spolupracuje s autory učebnic matematiky pro jedenáctiletku a zpracovává jejich náměty a dotazy. Proto se počítá, že návrh definitivní normy pro školy bude připraven do konce školního roku 1953-54, kdy bude dokončena práce na přípravě zmíněných učebnic.

Komise zároveň žádá všechny matematiky a zájemce o připomínky a podněty k doplnění uvedené normy a žádá o jejich zaslání na adresu Jednoty čsl. matematiků a fysiků Žitná 25, Praha II. nejdéle do 15. května 1954.

F. V.

Redakce: Matematický ústav Československé akademie věd Praha II, Žitná 25, tel. 241193. — Administrace: Nakladatelství Československé akademie věd, Praha II, Žitná 25, telefon 2319-50. — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 48,—, cena jednotlivého sešitu Kčs 12,—. Novinové výplatné povoleno Okrskovým poštovním úřadem Praha 022: j. zn. 309-38-Ře-52. — Dohlédací poštovní úřad Praha 022. — Tisknou a expedují Pražské tiskárny n. p., provozovna 05 (Prometheus), Praha VIII, Tř. Rudé armády 171. — Náklad 1200 výtisků.
Vyšlo dne 31. III. 1954.