Časopis pro pěstování matematiky, roč. 79 (1954)

O SYSTÉMECH LINEÁRNÍCH DIFERENČNÍCH ROVNIC S PERIODICKÝMI KOEFICIENTY

JIŘÍ ČERMÁK, Brno.

(Došlo dne 13. srpna 1953.) DT: 517.949.21

V tomto článku jsou vyšetřovány vlastnosti řešení systémů lineárních diferenčních rovnic s periodickými koeficienty. Vyšetřování je provedeno methodou, která spočívá na pojmech theorie podobných matic *E. Weyra*.

§ 1. Tento článek obsahuje rozšíření některých výsledků T. FORTA[1]) o povaze řešení homogenní lineární diferenční rovnice 2. řádu s periodickými koeficienty na systémy diferenčních rovnic stejného typu. Budiž podotknuto, že některé z Fortových výsledků zobecnil A. A. GNANADOS pro lineární rovnici n-tého řádu[2]). Toto rozšíření je v tomto článku provedeno methodou analogickou methodě, jíž se používá k vyšetřování vlastností integrálů lineárních homogenních systémů diferenciálních rovnic s periodickými koeficienty a která je v podstatě založena na výsledcích theorie podobných matic; je známa pod jménem Floquetova theorie.[3]) Hlavní roli zde obvykle hrají pojmy Weierstrassovy theorie elementárních dělitelů. Na rozdíl od theorie elementárních dělitelů jsem v této práci užil pojmů z theorie podobných matic českého matematika EDUARDA WEYRA[4]) a to Weyrových charakteristických čísel a soustavy normálních vektorů matice[5]). Vedle toho jsou v závěru článku odvozeny ně-

[1]) *T. Fort,* Finite differences, Oxford (1948), 205—207.

[2]) *A. A. Gnanados,* Linear difference equations with periodic coefficients, Proceedings of the Amer. Math. Soc., vol. *2* (1951), 699—703.

[3]) *G. Sansone,* Equazioni differenziali, I., Bologna (2. vyd. 1948), kap. VI.
L. Sauvage, Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes, Paris (1895), 129—131.
J. Čermák, O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic, Práce moravskoslezské akademie věd přírodních, sv. XXV, spis 12, seš. 9 (1953), 337—356.

[4]) *E. Weyr,* O theorii forem bilinearných, Spisy poctěné jubilejní cenou královské české společnosti nauk v Praze (1889); přetištěno v Mh. Math. Phys., sv. *1* (1890), 163 až 236.

[5]) Pojem soustavy normálních vektorů je běžný v současné literatuře, i když nevystupuje pod tímto názvem, na př. *A. I. Malcev,* Osnovy linejnoj algebry, Moskva-Leningrad (1948), 137 nebo *I. M. Gelfand,* Lekcii po linejnoj algebre, Moskva-Leningrad (2. vyd. 1951), 157—160. Domnívám se, že tento pojem náleží Weyrovi; viz také poznámku *J. Dieudonné* v článku: Sur la réduction canonique des couples de matrices, Bulletin de la Société Mathématique de France, *74* (1946), 131.

které vlastnosti řešení lineárních nehomogenních systémů diferenčních rovnic s periodickými koeficienty, které se jeví jako jednoduché přenesení známých vět z theorie lineárních diferenciálních rovnic s periodickými koeficienty.

§ 2. Abychom se v dalším vyhnuli opakování, stanovíme, že proměnná x může nabývati pouze hodnot z množiny celých čísel. Výrok „pro všechna x" značí, že x je libovolné celé číslo.

Uvažujme o lineárním homogenním systému diferenčních rovnic

$$u_i(x + 1) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x)\, u_j(x), \quad i = 1, 2, \dots, n\,, \tag{1}$$

kde koeficienty p_{ij} jsou definovány pro všechna x a jsou periodické s periodou ω (ω je celé kladné číslo), tedy

$$p_{ij}(x + \omega) = p_{ij}(x) \tag{2}$$

pro všechna x; dále determinant $|p_{ij}(x)| \neq 0$ také pro všechna x.

Soustava koeficientů p_{ij} tvoří čtvercovou matici P řádu n, jejíž prvky jsou ovšem funkce nezávisle proměnné x. Matice budeme označovati velkými latinskými písmeny, matice $(p_{ij}(x))$, $(u_{ij}(x))$, jejichž prvky jsou funkce proměnné x, budeme značit $P(x)$, $U(x)$, někdy také prostě P, U. Determinant matice A budeme značit $|A|$, matici jednotkovou E. Vektory v n-rozměrném vektorovém prostoru identifikujeme s jednosloupcovými maticemi o n prvcích a budeme označovati malými tučnými písmeny. Jednotlivé vektory budeme rozlišovati různými písmeny nebo indexy.

V maticové notaci píšeme systém (1) $\mathbf{u}(x + 1) = P(x)\,\mathbf{u}(x), P(x + \omega) = P(x)$.

Množinu n partikulárních řešení

$$u_{1k}(x),\ u_{2k}(x), \dots, u_{nk}(x), \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{3}$$

identifikujeme s vektory $\mathbf{u}^1(x)$, $\mathbf{u}^2(x)$, ..., $\mathbf{u}^n(x)$ a označíme maticí $U(x)$ tak, že sloupce $U(x)$ budou právě partikulární řešení (3).

Z theorie systémů typu (1) je známo, že jejich řešení tvoří n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem komplexních čísel[6]), jehož base se nazývá fundamentální soustava řešení. Soustava n řešení tvoří basi, je-li $|U(x)| \neq 0$

---

[6]) To je jeden z důvodů, proč se v případě, že x je reálná proměnná, vyšetřování omezuje obvykle na x z množiny celých čísel. Kdyby x byla proměnná v množině všech reálných čísel, řešení by tvořila vektorový prostor nad okruhem periodických funkcí s periodou 1.

Poznámka redakce: Že všechna řešení systému (1) tvoří n-rozměrný prostor, může čtenář dokázati takto:

Je-li $\mathbf{v}$ libovolný n-rozměrný vektor, snadno zjistíme, že existuje takové řešení $\mathbf{u}(x)$ systému (1), že $\mathbf{u}(0) = \mathbf{v}$ (hodnoty $\mathbf{u}(1)$, $\mathbf{u}(2)$, ..., $\mathbf{u}(-1)$, $\mathbf{u}(-2)$, ... lze ze vztahu (1) vypočítat, protože matice (p_{ij}) je podle předpokladu regulární); platí-li pro řešení $\mathbf{u}_1$, ..., $\mathbf{u}_n$, $\mathbf{u}$ vztah $\mathbf{u}(0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i(0)$, je $\mathbf{u}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i(x)$ pro každé x, jak se rovněž snadno zjistí. Protože hodnoty všech řešení v bodě 0 tvoří n-rozměrný prostor, tvoří i všechna řešení n-rozměrný prostor.

pro všechna x. Každé řešení systému (1) lze pak obdržeti jako lineární kombinaci vektorů fundamentální soustavy řešení. Je tedy dáno vzorcem $\mathbf{u}(x) = U(x)\mathbf{c}$, kde $\mathbf{c}$ je nějaký konstantní vektor.

§ 3. Lema 1. *Buď $U(x)$ fundamentální soustava řešení; potom $U(x+\omega)$ je také fundamentální soustava řešení.*

Důkaz. Buď $U(x)$ fundamentální soustava řešení systému (1); pak změna proměnné x na $x + \omega$ nechává vzhledem k (2) nezměněnu rovnici (1), jest tedy $U(x + \omega)$ také soustava řešení. Dále podle předpokladu $|U(x)| \neq 0$ pro všechna x, jest tedy také $|U(x + \omega)| \neq 0$ pro všechna x a tedy $U(x + \omega)$ je fundamentální soustava řešení.

Dále nechť $U(x)$ je fundamentální soustava řešení.

Věta 1. *Existuje konstantní*[7]) *matice A taková, že*

$$U(x+\omega) = U(x)A, \quad |A| \neq 0 \,. \tag{4}$$

Důkaz plyne ihned z lematu 1.

Definice. *A nazveme fundamentální maticí příslušnou fundamentální soustavě* $U(x)$.

Rozepíšeme-li relaci (4), dostáváme soustavu rovnic

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{u}^1(x+\omega) &= a_{11}\mathbf{u}^1(x) + a_{21}\mathbf{u}^2(x) + \ldots + a_{n1}\mathbf{u}^n(x)\\
\mathbf{u}^2(x+\omega) &= a_{12}\mathbf{u}^1(x) + a_{22}\mathbf{u}^2(x) + \ldots + a_{n2}\mathbf{u}^n(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{u}^n(x+\omega) &= a_{1n}\mathbf{u}^1(x) + a_{2n}\mathbf{u}^2(x) + \ldots + a_{nn}\mathbf{u}^n(x)\,,
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

což je systém lineárních homogenních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty pro vektory fundamentální soustavy, kde ovšem rozpětí není rovno 1 nýbrž ω[8]). Můžeme tedy vyslovit větu 1. také takto:

Systém diferenčních rovnic s periodickými koeficienty (1) *lze transformovati v systém diferenčních rovnic s konstantními koeficienty* (5).

Relace (4) dává $A = U^{-1}(x)U(x+\omega)$. Je-li $U(x)$ fundamentální soustava řešení, pak jakákoli jiná fundamentální soustava $\overline{U}(x)$ je dána rovnicí $\overline{U}(x) = U(x)Q$, $|Q| \neq 0$. Změna fundamentální soustavy $U(x)$ v $\overline{U}(x)$ má tedy za následek, že původní fundamentální matice A příslušná k fundamentální soustavě $U(x)$ přejde v matici $Q^{-1}U^{-1}(x)U(x+\omega)Q = Q^{-1}AQ$. Jest tedy fundamentální matice příslušná k nové fundamentální soustavě řešení $\overline{U}(x)$ podobná s maticí A. Dokázali jsme takto tuto větu:

Věta 2. *Fundamentální matice je určena až na podobnost.*

§ 4. Nyní uvedu bez důkazu některé věty z theorie podobných matic, které budu v dalším potřebovat. Připomeňme ještě pro úplnost, že *čtvercové matice A, B n-tého řádu se nazývají podobné, existuje-li regulární (t. j. jejíž*

---

[7]) Konstantní maticí rozumíme matici, jejíž prvky jsou komplexní čísla.

[8]) V theorii diferenčních rovnic se obvykle uvažuje o rovnicích v t. zv. normálním tvaru, u kterých je rozpětí rovno 1; toho lze však vždy docílit vhodnou substitucí nezávisle proměnné.

determinant je různý od nuly) čtvercová matice Q n-tého řádu taková, že $B = Q^{-1}AQ$.

(4.1) *Podobné matice mají stejný charakteristický polynom a stejné charakteristické kořeny.*[9])

Nadále nechť A je čtvercová matice n-tého řádu, jejíž prvky jsou komplexní čísla, a a jeden z jejích charakteristických kořenů. Potom nula je charakteristický kořen matice $A - aE$. Má-li a násobnost $\alpha(\geqq 1)$, označme

$$\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\varrho = \alpha, \ldots$$

nulity[10]) postupných mocnin

$$A - aE, (A - aE)^2, (A - aE)^3. \ldots, (A - aE)^\varrho, \ldots$$

kde ϱ je první celé číslo, které dává nejvyšší nulitu α.[11])

Čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ jsou přirozená a nazývají se charakteristická čísla nebo také Weyrova charakteristika matice A příslušná ke kořenu a. Dá se ukázati, že splňují nerovnosti

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \ldots \geqq \alpha_\varrho .$$

Dále se dá ukázat, že ke kořenu a matice A lze přiřadit soustavu $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\varrho = \alpha$ lineárně nezávislých vektorů

$$\begin{array}{l} \mathbf{a}^{11}, \ldots, \mathbf{a}^{1,\alpha_\varrho}, \\ \mathbf{a}^{21}, \ldots, \mathbf{a}^{2,\alpha_\varrho}, \mathbf{a}^{2,\alpha_\varrho+1}, \ldots, \mathbf{a}^{2,\alpha_{\varrho-1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{a}^{\varrho 1}, \ldots, \mathbf{a}^{\varrho,\alpha_\varrho}, \mathbf{a}^{\varrho,\alpha_\varrho+1}, \ldots, \mathbf{a}^{\varrho,\alpha_{\varrho-1}}, \mathbf{a}^{\varrho,\alpha_{\varrho-1}+1}, \ldots, \mathbf{a}^{\varrho,\alpha_1}, \end{array} \tag{6}$$

která se nazývá normální soustava vektorů příslušná ke kořenu a matice A, vyznačujících se tím, že se každý vektor, pokud jeho symbol není v posledním řádku, transformuje maticí $A - aE$ ve vektor, jehož symbol je právě pod ním, kdežto vektory v posledním řádku se transformují ve vektor 0.

Platí tedy vzorce:

$$\left.\begin{array}{lll} (A - aE)\mathbf{a}^{\mu\nu} = \mathbf{a}^{\mu+1,\nu} & \text{pro} & 1 \leqq \mu \leqq \varrho - 1 \\ (A - aE)\mathbf{a}^{\mu\nu} = 0 & \text{pro} & \mu = \varrho \end{array}\right\} \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{\varrho-\mu+1}, \tag{7}$$

které můžeme rozepsat také tímto způsobem:

$$\left.\begin{array}{lll} A\mathbf{a}^{\mu\nu} = a\mathbf{a}^{\mu\nu} + \mathbf{a}^{\mu+1,\nu} & \text{pro} & 1 \leqq \mu \leqq \varrho - 1 \\ A\mathbf{a}^{\mu\nu} = a\mathbf{a}^{\mu\nu} & \text{pro} & \mu = \varrho \end{array}\right\} \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{\varrho-\mu+1} . \tag{7'}$$

Nechť $a, b, \ldots, f$ značí všechny vzájemně různé charakteristické kořeny matice A a $\alpha, \beta, \ldots, \varphi$ jejich násobnosti. Potom ke každému kořenu přísluší jistá normální

---

[9]) Je-li A čtvercová matice, pak výraz $|A - \lambda E|$ se nazývá charakteristický polynom matice A a kořeny tohoto polynomu jsou charakteristické kořeny matice A.

[10]) Je-li h hodnost matice A, potom $n - h$ se nazývá nulitou matice A.

[11]) Dá se ukázat, že v posloupnosti matic $A - aE$ $(A - aE)^2, \ldots$ existuje první matice taková, že její nulita je α a všechny následující mají také nulitu α.

soustava vektorů a tyto jednotlivé normální soustavy obsahují celkem $\alpha + \beta + \ldots$ $\ldots + \varphi = n$ vektorů. Soustava těchto n vektorů se nazývá normální soustava vektorů příslušná k matici A a dá se ukázat, že všechny tyto vektory jsou nezávislé.

(**4.2**) *Weyrovy charakteristiky příslušné ke všem charakteristickým kořenům matice A, stručněji Weyrova charakteristika matice A, tvoří úplnou soustavu invariantů podobnosti v tom smyslu, že dvě matice jsou si podobné tehdy a jen tehdy, mají-li stejné charakteristické kořeny a stejnou Weyrovu charakteristiku.*

Matice může být interpretována jako lineární homogenní transformace ve vektorovém prostoru. S tohoto hlediska podobné matice představují tutéž transformaci vzhledem k různým basím.[12])

(**4.3**) *Nechť je ve vektorovém prostoru nad tělesem komplexních čísel zadána transformace zprostředkovaná maticí A. Vezmeme-li za basi prostoru Weyrovu normální soustavu vektorů příslušnou k matici A, pak podle vzorců* (7′) *matice transformace nabývá t. zv. Jordanův kanonický tvar*

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} a & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & a & 1 \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & a \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} f & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & f & 1 \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots f & 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & f \end{matrix} \end{bmatrix} = C\,. \tag{8}$$

Jinými slovy lze (4.3) formulovat také takto:

Existuje regulární matice Q, jejíž prvky jsou komplexní čísla taková, že

$$A = Q^{-1}CQ\,.$$

Abychom mohli matici C lépe popsati, označíme počet vektorů stojících v prvním sloupci schematu (6) číslem e_1, v druhém e_2 atd. až v posledním e_{α_1}. Matice C jest potom tvaru

$$\begin{pmatrix} A_1, & 0\ , & \ldots & \\ 0\ , & A_2, & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$$

kde A_i jsou čtvercové matice a 0 matice nulové a na př. ke kořenu a patří α_1 matic A_i o řádech $e_1, e_2, \ldots, e_{\alpha_1}$, při čemž matice A_i, $i = 1, 2, \ldots, \alpha_1$, mají

[12]) *I. M. Gelfand*, l. c. 99.

zvlášť jednoduchý tvar, jak ukázáno v (8). Podobně se dají popsat matice příslušné k ostatním charakteristickým kořenům.

Poznámka. Snadno zjistíme, vypočteme-li elementární dělitele matice A příslušné k charakteristickému kořenu a, že čísla $e_1, e_2, \ldots, e_{\alpha_1}$ jsou právě exponenty těchto elementárních dělitelů, t. zv. *Segreho charakteristika příslušná ke kořenu* a.[13])

(**4.4**) *Má-li matice vesměs jednoduché kořeny* $s_1, s_2, \ldots, s_n$, *jest její Jordanův kanonický tvar* diag $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, *t. j. matice, jejíž všechny prvky mimo hlavní diagonálu jsou rovny nule.*

(**4.5**) *Má-li matice A kořeny $a, b, \ldots, f$ o násobnostech $\alpha, \beta, \ldots, \varphi$ a je-li A — — aE nulity α, A — bE nulity $\beta, \ldots, A$ — fE nulity φ,*[14]) *potom kanonický tvar matice obsahuje v hlavní diagonále α prvků a, β prvků $b, \ldots, \varphi$ prvků f; prvky mimo hlavní diagonálu jsou vesměs rovny nule.*[15])

§ 5. Nyní ukážeme, že povaha řešení systému (1) je těsně spjata s charakteristickými kořeny a Weyrovou a Segreho charakteristikou fundamentální matice.

Předně plyne z věty 2, dále (4.1), (4.2) a poznámky předešlého odstavce

Věta 3. *Charakteristický polynom, charakteristické kořeny a Weyrova i Segreho charakteristika fundamentální matice nezávisí na volbě fundamentální soustavy řešení systému* (1).

Protože Q je libovolná regulární matice a je bezpodstatné, jakou fundamentální soustavu řešení k určení fundamentální matice zvolíme, můžeme podle (4.3) dále předpokládati, že $U(x)$ je taková fundamentální soustava, že fundamentální matice má kanonický Jordanův tvar.

Nechť má fundamentální matice kořeny $a, b, \ldots, f$[16]) o násobnostech $\alpha, \beta, \ldots$ $\ldots, \varphi$ a Weyrových charakteristikách $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_\sigma), \ldots, (\varphi_1, \ldots, \varphi_\tau)$.

Pak z relace (4) vzhledem ke kanonickému tvaru popsanému maticí (8) vidíme ihned, že $\mathbf{u}^1(x + \omega)$, $\mathbf{u}^2(x + \omega), \ldots, \mathbf{u}^\alpha(x + \omega)$ jsou lineární homogenní funkce jedné neb dvou z hodnot $\mathbf{u}^1(x)$, $\mathbf{u}^2(x), \ldots, \mathbf{u}^\alpha(x)$, dále $\mathbf{u}^{\alpha+1}(x + \omega)$, $\mathbf{u}^{\alpha+2}(x + \omega), \ldots, \mathbf{u}^{\alpha+\beta}(x + \omega)$ lineární homogenní funkce jedné neb dvou z hodnot $\mathbf{u}^{\alpha+1}(x)$, $\mathbf{u}^{\alpha+2}(x), \ldots, \mathbf{u}^{\alpha+\beta}(x)$ atd.

Jelikož, jak z kanonického tvaru (8) vychází, souvislost těchto skupin je zcela obdobná, stačí vzíti v úvahu souvislost ve skupině první (řešení přiřazených ke kořenu a), t. j. souvislost řešení $\mathbf{u}^1(x + \omega)$, $\mathbf{u}^2(x + \omega), \ldots, \mathbf{u}^\alpha(x + \omega)$

---

[13]) *A. I. Malcev*, l. c. 186.
C. C. Mac Duffee, The theory of matrices, Berlin (1933), 73 (Ergebnisse der Math. u. ihrer Grenzgeb.).

[14]) To je ekvivalentní výroku, že Weyrova charakteristika ke každému kořenu obsahuje pouze první charakteristické číslo.

[15]) Jordanův kanonický tvar uvedený v (4.4) a (4.5) se označuje jako diagonální matice.

[16]) Vzhledem k (4) a (4.1) jsou všechny charakteristické kořeny různé od nuly.

s řešeními $u^1(x), u^2(x), \dots, u^\alpha(x)$. Snadno se vidí, že se těchto α řešení rozpadá na α_1 podskupin, které jsou charakterisovány řadou relací tvaru

$$\begin{aligned} u^1_{(k)}(x+\omega) &= a u^1_{(k)}(x) \\ u^2_{(k)}(x+\omega) &= u^1_{(k)}(x) + a u^2_{(k)}(x) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ u^{e_k}_{(k)}(x+\omega) &= u^{e_k-1}_{(k)}(x) + a u^{e_k}_{(k)}(x), \quad k = 1, 2, \dots, \alpha_1 . \end{aligned} \tag{9}$$

Jest tedy takto dokázána

Věta 4. *Má-li fundamentální matice kořeny $a, b, \dots, f$ o násobnostech $\alpha, \beta, \dots \dots, \varphi$ a Weyrových charakteristikách $(\alpha_1, \dots, \alpha_\varrho), (\beta_1, \dots, \beta_\sigma), \dots, (\varphi_1, \dots, \varphi_\tau)$, pak ke každému kořenu existuje skupina nezávislých řešení, jejichž počet je roven násobnosti kořene. Každá taková skupina se dá rozděliti na podskupiny řešení, které jsou charakterisovány relacemi tvaru (9). Počet těchto podskupin je roven prvnímu charakteristickému číslu v příslušné Weyrově charakteristice.*

Poznámka. Je-li kanonický tvar fundamentální matice matice diagonální, redukují se relace (9) na vztah $u^i(x+\omega) = s u^i(x)$, kde s je některý z charakteristických kořenů.

Vezmeme-li nyní za východisko vlastnosti řešení popsané ve větě 4, dá se snadno odvoditi analytický tvar řešení. Stačí opět, když se omezíme na skupinu řešení přiřazenou kořenu a. Relace (9) tvoří zvláštní lineární systém diferenčních rovnic s konstantními koeficienty, jenž je tak jednoduchý, že analytický tvar obecného řešení tohoto systému se dá najít, aniž vezmeme na pomoc obecnou theorii systémů lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty.

Způsob odvození je dobře znám[17]) a tak uvedeme pouze výsledek.

Označíme-li $\frac{1}{\omega} \log a = r$ (log je hlavní hodnota logaritmu), potom nejobecnější analytický tvar řešení je tento:

$$\begin{aligned} u^1_{(k)}(x) &= e^{rx} q^{11}_{(k)}(x) \\ u^2_{(k)}(x) &= e^{rx}[q^{12}_{(k)}(x) + x q^{22}_{(k)}(x)] \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ u^{e_k}_{(k)}(x) &= e^{rx}[q^{1e_k}_{(k)}(x) + x q^{2e_k}_{(k)}(x) + \dots + x^{e_k-1} q^{e_k e_k}_{(k)}(x)], \quad k = 1, 2, \dots, \alpha_1; \end{aligned} \tag{10}$$

složky vektorů $q^{m,n}_{(k)}$ jsou periodické funkce s periodou ω a žádný z vektorů $q^{m,n}_{(k)}$ není identicky roven nule ($m, n = 1, 2, \dots, e_k$).

Právě odvozené vlastnosti řešení systému (1) nám umožňují vyšetřovat na př. asymptotické vlastnosti řešení, existenci periodických řešení a podobně. Omezíme se na tyto dvě věty:

---

[17]) *E. Goursat*, Cours d'Analyse mathématique, II., Paris (4. vyd. 1924), 513. *L. Sauvage*, l. c. 131—133.

Věta 5. *Postačující podmínka, aby systém* (1) *měl netriviální periodické řešení s periodou* ω, *je, aby fundamentální matice měla charakteristický kořen roven* 1.

Důkaz plyne ihned z věty 4.

Dodatek k větě 5. *Podmínka ve větě* 5 *je nutná.*

Důkaz. Uvažme, že obecné řešení systému (1) je dáno vzorcem $\boldsymbol{u}(x) = U(x)\boldsymbol{c}$. Má-li nyní existovat nenulový vektor $\boldsymbol{c}$ a konstanta ϱ tak, aby platilo $\boldsymbol{u}(x+\omega) = \varrho\boldsymbol{u}(x)$, pak vzhledem k (4) dostaneme

$$U(x)A\boldsymbol{c} = \varrho U(x)\boldsymbol{c} \ ,$$

což implikuje

$$U(x)\{A - \varrho E\}\boldsymbol{c} = 0 \ ,$$

a poněvadž $|U(x)| \not\equiv 0$ a vektor $\boldsymbol{c}$ nemá být nulový, musí být ϱ kořenem charakteristického polynomu $|A - \varrho E|$ fundamentální matice. Má-li tedy existovati periodické řešení $\boldsymbol{u}(x)$ s periodou ω, t. j. $\boldsymbol{u}(x+\omega) = \boldsymbol{u}(x)$, je nutné, aby fundamentální matice měla charakteristický kořen rovný 1.[18])

Věta 6. *Postačující podmínka, aby všechna řešení skupiny odpovídající charakteristickému kořenu a měla pro* $x \to \infty$ *limitu rovnou nule, je, aby reálná část čísla r byla záporná nebo, což je ekvivalentní, aby absolutní hodnota charakteristického kořene a byla menší než* 1. *Postačující podmínka, aby všechna řešení systému* (1) *měla pro* $x \to \infty$ *limitu rovnou nule je, aby všechny charakteristické kořeny fundamentální matice byly co do absolutní hodnoty menší než* 1.

Důkaz plyne ze vzorců (10).

Poznámka. Podobně jako u věty 5 se dá ukázat, že podmínka ve větě 6 je nutná.

§ 6. Uvažujme nakonec o nehomogenním lineárním systému diferenčních rovnic s periodickými koeficienty a periodickou pravou stranou

$$u_i(x+1) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x)u_j(x) + b_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n \ , \tag{11}$$

$$|p_{ij}(x)| \neq 0, \ p_{ij}(x+\omega) = p_{ij}(x), \quad b_i(x+\omega) = b_i(x) \text{ pro všechna } x.$$

Je-li $b_i(x) \equiv 0$, dostaneme ze systému (11) systém (1), který nazýváme *homogenní systém příslušný k* (11).

V maticové notaci píšeme (11)

$$\boldsymbol{u}(x+1) = P(x)\boldsymbol{u}(x) + \boldsymbol{b}(x) \ .$$

Hledejme, zda existuje řešení systému (11), které je periodické s periodou ω.

Nechť $\boldsymbol{u}_0(x)$ je partikulární řešení systému (11) a $U(x)$ fundamentální soustava řešení příslušného homogenního systému (1). Potom, jak je známo,

[18]) Snadno se vidí, že počet lineárně nezávislých řešení s periodou ω je roven prvnímu charakteristickému číslu Weyrovy charakteristiky příslušné ke kořenu 1. Dále se dá ukázat, že má-li fundamentální matice k-násobný kořen 1, pak k tomuto kořenu přísluší řešení s periodou $k\omega$ a naopak.