ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

2

79

NAKLADATELSTVÍ ČSAV

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 79 • Č. 2 • STR. 101—188 • PRAHA 17. VI. 1954

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky")

SVAZEK 79 (1954)

Obsah:

Články:

František Nožička, Praha: K problému afinní normály a indukované konexe nadplochy v afinním prostoru 101

Zbyněk Šidák, Praha: Jedna methoda vyšetřování monotonie posloupností 135

Jiří Čermák, Brno: O systémech lineárních diferenčních rovnic s periodickými koeficienty 141

Otakar Borůvka, Brno: Poznámka o použití Weyrovy theorie matic k integraci systému diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty 151

Luděk Granát a *Miroslav Fiedler*, Praha: Racionální křivky s maximálním počtem reálných uzlových bodů 157

Úlohy a problémy: Č. 1—5 163

Referáty

o přednáškách v matematické obci pražské 165

Recense:

B. V. Kutuzov: Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie 173

Alois Urban: Trigonometrie 176

Stanislav Horák: Elipsa 177

H. v. Sanden: Praktische Mathematik 178

Zprávy 181

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV
SVAZEK 79 * PRAHA, 17. VI. 1954 * ČÍSLO 2

ČLÁNKY

K PROBLÉMU AFINNÍ NORMÁLY A INDUKOVANÉ KONEXE NADPLOCHY V AFINNÍM PROSTORU

FRANT. NOŽIČKA, Praha.

(Došlo 31. srpna 1953.)

DT 513.771
513.726

Obsahem předloženého článku je konstrukce afinní normály (t. zv. afinnormálního vektoru nadplochy v n-rozměrném afinním prostoru a konexe indukované tímto vektorem na nadploše ve speciálních případech, které byly v dřívější autorově práci (*Le vecteur affinonormal et la connexion de l'hypersurface dans l'espace affin*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. *75* (1950)) z úvah vyloučeny. Ukazuje se, že lze afinní normálu v těchto probíraných speciálních případech nadplochy definovat analogicky jako tomu bylo v citovaném článku, avšak definiční rovnice nevedou k jednoznačnosti. Teorii v tomto článku a v článku citovaném lze spojit v jedinou teorii. Jaký mají význam veličiny definované v obou článcích, osvětlí se na kvadrikách v obyčejném trojrozměrném afinním prostoru v přiložené II. části této práce.

I. část

V afinním prostoru A_n ($n > 2$) o souřadnicích ξ^α s danou symetrickou konexí o koeficientech $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}(\xi^\alpha)$ je definována ($n - 1$)-dimensionální nadplocha X_{n-1} parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(\eta^a), \ \alpha = 1, \ldots, n; \ a = 1, \ldots, n - 1 . \tag{1}$$

Budeme předpokládat, že funkce $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}(\xi^\alpha)$ mají spojité parciální derivace podle proměnných η^a potřebného řádu v uvažovaném oboru.

Dále předpokládáme, že hodnost matice

$$(B^1_a, B^2_a, \ldots, B^n_a), \ a = 1, \ldots, n - 1, \ B^\nu_a \equiv \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \eta^a}$$

je v uvažovaném oboru rovna $n - 1$.

Tečným vektorem variety X_{n-1}, definované rovnicemi (1), nazýváme pak každý nenulový vektor t_ν, splňující rovnice

$$B^\nu_a t_\nu = 0, \ a = 1, \ldots, n - 1 . \tag{2}$$

Je-li t_ν nějaké řešení rovnic (2), pak též každý vektor $^*t_\nu$, pro nějž platí

$$^*t_\nu = P(\eta^a)\, t_\nu, \quad P \neq 0\,, \tag{3}$$

je řešením rovnic (2).

V afinní geometrii ploch má podstatný význam tensor h_{ab} takto definovaný

$$h_{ab} = B^\alpha_a \nabla_b\, t_\alpha\,, \tag{4}$$

kde ∇_b je symbol Langrangeovy derivace. Při transformaci (3) platí vztah

$$^*h_{ab} = Ph_{ab}\,, \tag{5}$$

o čemž se snadno přesvědčíme.

V práci autorově „Le vecteur affinonormal et la connexion de l'hypersurface dans l'espace affin", Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 75 (1950) byla konstruována afinní normála a konexe za předpokladu, že hodnost tensoru h_{ab}, definovaného rovnicemi (4), jest $n - 1$ v uvažovaném oboru. Úkolem této práce bude konstrukce afinní normály (afinnormálního vektoru) a konexe jím indukované za předpokladu, že hodnost tensoru h_{ab} je menší než $n - 1$.

Pokud se budeme v následujících úvahách odvolávat na výsledky shora citované práce, budeme ji citovat pro stručnost v poznámkách pod symbolem (I).

§ 1. Pomocné věty a definice

V celé této první části práce budeme uvažovat takové variety X_{n-1} ve V_n, pro které hodnost tensoru h_{ab}, definovaného v (4), je menší než $n - 1$ počítaje v to i ten případ, kdy h_{ab} je identicky roven nule v uvažovaném oboru.

Označme h hodnost tensoru h_{ab}, H hodnost matice determinantu

$$[\nabla_1 t_\nu, \nabla_2 t_\nu, \ldots, \nabla_{n-1} t_\nu, t_\nu]\,; \tag{1,1}$$

potom platí tato věta:

Věta 1. *Hodnost H matice* (1,1) *je o jednotku větší než hodnost h tensoru h_{ab}, t. j.*

$$H = h + 1\,. \tag{1,2}$$

D ů k a z rozdělme na dvě v úvahu přicházející možnosti:

I. $\qquad h = 0 \;\; (t.\,j.\;\; h_{ab} \equiv 0)\,.$

Podle předpokladu a definičních rovnic (4) jest

$$h_{ab} = B^\nu_a \nabla_b\, t_\nu \equiv 0\,,$$

odkud plyne, vzhledem k (2), existence takového vektoru u_b v X_{n-1}, že platí

$$\nabla_b\, t_\nu = u_b t_\nu, \quad b = 1, \ldots, n - 1\,. \tag{1,3}$$

Poněvadž vektor t_ν je nenulový, plyne odtud, že hodnost matice (1,1) jest 1.

Je-li $H = 1$, potom, ježto vektor t_ν je nenulový, existuje vektoru u_b tak, že platí (1,3). Násobíme-li (1,3) veličinou B^ν_a a sečteme přes ν, dostaneme podle (3), (4): $h_{ab} = 0$, tedy $h = 0$. Je tedy v tomto případě tvrzení (1,2) správné.

II. $$0 < h < n - 1 .$$

Vzhledem k části I. důkazu věty platí pro hodnost H matice determinantu (1,1)

$$1 \leq H . \tag{1,4}$$

Jak je nyní známo z elementární algebry, lze za předpokladu, že $0 < h < n - 1$ vždy najít $n - h - 1$ lineárně nezávislých vektorů $\underset{(i)}{v^b}$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$ tak, že platí

$$h_{ab} \underset{(i)}{v^b} = 0, \; i = 1, \ldots, n - h - 1 . \tag{1,5}$$

Rovnice (1,5) můžeme vzhledem k definičním vztahům (4) přepsat na tvar

$$B^{\nu}_{a} \underset{(i)}{v^b} \nabla_b t_\nu = 0, \; i = 1, \ldots, n - h - 1 ,$$

odkud plyne vzhledem k (2) existence skalárů $\underset{i}{\varrho}(\eta^a)$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$ tak, že

$$\underset{(i)}{v^b} \nabla_b t_\nu = \underset{i}{\varrho} t_\nu, \; i = 1, \ldots, n - h - 1 . \tag{1,6}$$

Poněvadž vektory $\underset{(i)}{v^a}$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$ jsou dle předpokladu lineárně nezávislé, existuje aspoň jeden determinant $(n - h - 1)$-ho řádu matice $(\underset{(1)}{v^a}, \underset{(2)}{v^a}, \ldots, \underset{(n-h-1)}{v^a})$ různý od nuly. Z (1,6) plyne pak, že můžeme $n - h - 1$ veličin $\nabla_{a_i} t_\nu$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$ vyjádřit jako lineární kombinaci veličin t_ν, $\nabla_{a_j} t_\nu$, $j = n - h, \ldots, n - 1$. Tedy existují veličiny $\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}}$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$; $j = n - h, \ldots, n - 1$ a vektory u_{a_i} tak, že[1])

$$\nabla_{a_i} t_\nu = \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} \nabla_{a_j} t_\nu + u_{a_i} t_\nu, \; i = 1, \ldots, n - h - 1 . \tag{1,7}$$

Z (1,7) plyne však, že pro hodnost matice determinantu (1,1) platí

$$H \leqq h + 1 . \tag{1,8}$$

Ježto předpokládáme, že pro hodnost h tensoru h_{ab} jest $0 < h < n - 1$, existuje

a) aspoň jeden determinant různý od nuly v uvažovaném bodě, t. j.

$$h_{[a_1|b_1|} h_{a_2|b_2|} \ldots h_{a_h]b_h} \neq 0 \tag{1,9$_a$}$$

v případě, že $h < 1$,

b) aspoň jedna složka tensoru h_{ab} různá od nuly v uvažovaném bodě, t. j.

$$h_{a_1 b_1} \neq 0 \tag{1,9$_b$}$$

v případě $h = 1$.

V případě a) můžeme $(1,9)_a$ na základě definičních rovnic (4) přepsat na tvar

$$B^{\nu_1}_{b_1} B^{\nu_2}_{b_2} \ldots B^{\nu_h}_{b_h} \nabla_{[a_1} t_{|\nu_1|}, \nabla_{a_2} t_{|\nu_2|}, \ldots, \nabla_{a_h]} t_{\nu_h} \neq 0 ; \tag{1,10$_a$}$$

---

[1]) a_i jsou čísla přirozená z množiny $1, 2, \ldots, n - 1$ v počtu $n - h - 1$ a navzájem různá, a_j jsou přirozená čísla rovněž z množiny čísel $1, 2, \ldots, n - 1$ a vzájemně různá. Dále je $a_i \neq a_j$.

v případě b) pak

$$B^{\nu}_{a_1} \nabla_{b_1} t_\nu \neq 0 . \tag{1,10)$_b$ }$$

Z obou případů a), b) ihned usoudíme;

$$H \geq h . \qquad (1,11)$$

Předpokládejme, že by platilo $H = h$.

Vektory $\nabla_{a_j} t_\nu$ (jakožto vektory v A_n) pro $j = n - h, \ldots, n - 1$ jsou v A_n lineárně nezávislé. To plyne bezprostředně z (1,7) a $(1,10)_a$ resp. $(1,10)_b$. Pak ovšem (za předpokladu, že $H = h$) by existovala taková A_j, $j = n - h, \ldots, n - 1$, že by platilo (lokálně ovšem)

$$t_\nu = \sum_{j=n-h}^{n-1} A_j \nabla_{a_j} t_\nu .$$

Odtud vynásobením veličinou B^{ν}_{b} a sečtením přes ν dostaneme vzhledem k (2), (4)

$$\sum_{j=n-h}^{n-1} A_j h_{ba_j} = 0, \; b = 1, \ldots, n - 1 , \qquad (1,12)$$

což znamená, že v determinantu z tensoru h_{ab} je určitých h řádků (t. j. řádky a_j-té, $j = n - h, \ldots, n - 1$) lineárně závislých. Z (1,7) plyne však vynásobením veličinou B^{ν}_{b}:

$$h_{ba_i} = \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} h_{ba_j}, \; i = 1, \ldots, n - h - 1 . \qquad (1,13)$$

Z (1,12), (1,13) plyne však, že v matici z tensoru h_{ab} je nejméně $n - h$ řádků lineární kombinací $h - 1$ zbývajících řádků. To by však znamenalo, že hodnost h tensoru h_{ab} je $\leq h - 1$, což je ve sporu s předpokladem. Tedy

$$H \neq h . \qquad (1,14)$$

Z (1,8), (1,11), (1,14) plyne pak ihned $H = h + 1$ jak bylo dokázat.

Poznámka 1. Jak z důkazu předchozí věty vyplývá, jsou za předpokladu, že hodnost tensoru h_{ab} jest h, $1 \leq h < n - 1$, vektory t_ν, $\nabla_{a_j} t_\nu$, $j = n - h, \ldots, n - 1$ lineárně nezávislé, v případě $h_{ab} = 0$ jsou vektory $\nabla_a t_\nu$ až na faktor rovny vektoru t_ν.

Poznámka 2. Z transformačního vztahu (3) a (5) ihned vyplývá, že hodnost tensoru h_{ab} nezávisí na volbě faktoru tečného vektoru t_ν. Totéž platí pak pro hodnost matice determinantu (1,1), jak plyne z (1,2).

Věta 2. *Pro veličiny* $\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}}$, u_{a_i} *z* (1,7) *platí při transformaci* (3)

$$*\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} = \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}}, \quad \begin{matrix} i = 1, \ldots, n - h - 1 \\ j = n - h, \ldots, n - 1 \end{matrix} . \qquad (1,15)_a$$

$$*u_{a_i} = u_{a_i} - \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} P^{-1} \partial_{a_j} P + P^{-1} \partial_{a_i} P . \qquad (1,15)_b$$

Důkaz: Podle (1,7) jest

$$\nabla_{a_i} {}^*t_v = \sum_{j=n-h}^{n-1} {}^*\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} \nabla_{a_j} {}^*t_v + {}^*u_{a_i} {}^*t_v , \quad i = 1, \ldots, n-h-1 ,$$

a tedy vzhledem k (3) a známým vlastnostem operace ∇_a dostaneme

$$P \nabla_{a_i} t_v + t_v \, \partial_{a_i} P = \sum_{j=n-h}^{n-1} {}^*\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} (P \nabla_{a_j} t_v + t_v \, \partial_{a_j} P) + P^* u_{a_i} t_v .$$

Dosaďme sem za $\nabla_{a_i} t_v$ z (1,7). Dostaneme po úpravě

$$\sum_{j=n-h}^{n-1} P({}^*\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} - \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}}) \nabla_{a_j} t_v + \{P({}^*u_{a_i} - u_{a_i}) + \sum_{j=n-h}^{n-1} {}^*\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} \partial_{a_j} P - \partial_{a_i} P\} t_v = 0 .$$

Poněvadž vektory t_v, $\nabla_{a_j} t_v$ $(j = n-h, \ldots, n-1)$ jsou lineárně nezávislé,[2]) musí příslušné koeficienty u nich stojící se anulovat, což vede, jak snadno nahlédneme, ke vztahům $(1,15)_{a,b}$. Tím je věta dokázána.

V dalším budeme předpokládat, že pro hodnost h tensoru h_{ab} platí $1 \leq h < < n - 1$. Zřejmě nemůžeme pak k tensoru h_{ab} zavést kontragradientní tensor způsobem obvyklým v diferenciální geometrii.[3])

Zavedeme si tensor l^{ac} touto definicí

$$l^{ac} h_{ca_j} = \delta^a_{a_j}, \; j = n-h, \ldots, n-1; \; a = 1, \ldots, n-1 , \tag{1,16}$$

což je $(n-1)\,h$ podmínek pro $(n-1)^2$ neznámých l^{ac}. Systém rovnic má nekonečně mnoho řešení pro tensor l^{ac}, neboť a_j-té řádky $(j = n-h, \ldots, n-1)$ v determinantu z tensoru h_{ab} jsou lineárně nezávislé a počet rovnic je menší než počet neznámých.[4])

Položme si především otázku, zda existuje symetrický tensor l^{ac}, vyhovující rovnicím (1,16). Vyslovme a dokažme nejdříve dvě pomocné věty:

Lemma 1. *Za shora uvedených předpokladů je determinant složený z a_j-tých řádků a a_j-tých sloupců $(j = n-h, \ldots, n-1)$ v determinantu z tensoru h_{ab} různý od nuly,*[5]) *t. j.*

$$h_{[a_{n-h}|a_{n-h}|} h_{a_{n-h+1}|a_{n-h+1}|} \ldots h_{a_{n-1}]a_{n-1}} \neq 0 . \tag{1,17}$$

Důkaz: Kdyby determinant (1,17) byl roven nule v uvažovaném bodě variety X_{n-1}, potom by existovalo h čísel w^{a_j}, $j = n-h, \ldots, n-1$ (ne vesměs rovných nule) tak, že by v uvažovaném bodě byly splněny vztahy

$$\sum_{j=n-h}^{n-1} w^{a_j} h_{a_j a_{j_1}} = 0 \text{ pro } j_1 = n-h, \ldots, n-1 . \tag{1,18}$$

---

[2]) Viz poznámku 1 za větou 1.

[3]) T. j. nemůžeme zavést tensor h^{ab} definicí $h^{ac} h_{cb} = \delta^c_b$ (δ^c_b je Kroneckerovo delta), jako v práci (I).

[4]) To plyne bezprostředně z (1,13) a z předpokladu, že hodnost tensoru h_{ab} je h $(1 \leq \leq h < n-1)$. Kdyby totiž řádky a_j-té $(j = n-h, \ldots, n-1)$ byly lineárně závislé potom, poněvadž řádky a_i-té $(i = 1, \ldots, n-h-1)$ jsou podle (1,13) lineární kombinací řádků a_j-tých, by byla hodnost tensoru h_{ab} menší než h.

[5]) Jde, jako ve všech předchozích úvahách o lokální platnost.

Odtud by pak, vzhledem k (1,13), plynulo

$$\sum_{j=n-h}^{n-1} w^{a_j} h_{a_j a_i} = \sum_{j=n-h}^{n-1} w^{a_j} \sum_{j_1=n-h}^{n-1} \overset{a_{j_1}}{\underset{a_i}{\lambda}} h_{a_j a_{j_1}} = \sum_{j_1=n-h}^{n-1} \overset{a_{j_1}}{\underset{a_i}{\lambda}} \sum_{j=n-h}^{n-1} w_{a_j} h_{a_j a_{j_1}} = 0$$

pro $i = 1, \ldots, n - h - 1$. Odtud a z (1,18) vyplývá

$$\sum_{j=n-h}^{n-1} w^{a_j} h_{a_j b} = 0 \text{ pro } b = 1, \ldots, n - 1 \, .$$

Tyto předchozí vztahy však znamenají, že řádky a_j-té ($j = n - h, \ldots, n - 1$) jsou lineárně závislé. Poněvadž zbývající a_i-té řádky ($i = 1, \ldots, n - h - 1$) jsou (podle (1,13)) lineární kombinací řádků a_j-tých ($j = n - h, \ldots, n - 1$), je hodnost tensoru h_{ab} menší než h, což je spor s předpokladem.

Poznámka 3. V důkazu předchozí věty není vlastně obsažen důkaz pro $h = 1$. V tomto případě výrok (1,17) má tvar

$$h_{a_{n-1} a_{n-1}} \neq 0 \, . \tag{1,18}$$

Kdyby bylo $h_{a_{n-1} a_{n-1}}$ rovno nule, pak by bylo — podle (1,13) —

$$h_{a_{n-1} a_i} = \sum_{j=n-1}^{n-1} \overset{a_{n-1}}{\underset{a_i}{\lambda}} h_{a_{n-1} a_{n-1}} = \overset{a_{n-1}}{\underset{a_i}{\lambda}} h_{a_{n-1} a_{n-1}} = 0 \tag{1,19}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n - 2$. Rovněž podle (1,13) by bylo potom — vzhledem k (1,19)

$$h_{a_{i_1} a_i} = \overset{a_{n-1}}{\underset{a_i}{\lambda}} h_{a_{i_1} a_{n-1}} = 0 \text{ pro } i_1 = 1, \ldots, n - 1 \, . \tag{1,20}$$

Podmínky (1,19), (1,20) spolu s podmínkou $h_{a_{n-1} a_{n-1}} = 0$ mohli bychom psát stručněji ve tvaru $h_{ab} = 0$, což je ve sporu s předpokladem.

Lemma 2. *Nechť pro hodnost h tensoru h_{ab} platí $1 \leq h < n - 1$. Potom existuje nekonečně mnoho symetrických řešení $l^{ac} = l^{ca}$ rovnic* (1,16). *Zvolíme-li veličiny $l^{a_{i_1} a_{i_2}}$, $i_1, i_2 = 1, \ldots, n - h - 1$ pevně tak, aby platilo*

$$l^{[a_{i_1} a_{i_2}]} = 0 \tag{1,21}$$

a definujeme-li dále[6])

$$l^{a_j a_i} = - \sum_{i_1=1}^{n-h-1} \overset{a_j}{\underset{a_{i_1}}{\lambda}} l^{a_i a_{i_1}} \, , \quad \begin{array}{l} i \in 1, \ldots, n - h - 1 \, , \\ j \in n - h, \ldots, n - 1 \, , \end{array} \tag{1,22}$$

potom za těchto podmínek mají rovnice (1,16) *jednoznačné řešení pro l^{ac}, při čemž*

$$l^{ac} = l^{ca} \, . \tag{1,23}$$

Důkaz: V uvažovaných bodech variety X_{n-1}[7]) definujme si veličiny $l^{a_{i_1} a_{i_2}}$, $i_1, i_2 = 1, \ldots, n - h - 1$ zcela libovolně (jakožto funkce η^a) tak, aby platilo (1,21) a dále definujme v těchto bodech veličiny $l^{a_j a_i}$, $j \in n - h, \ldots, n - 1$; $i \in 1, \ldots, n - h - 1$, podle (1,22).

Definiční rovnice (1,16) přepišme na tvar

$$\sum_{j_1=n-h}^{n-1} l^{a a_{j_1}} h_{a_{j_1} a_j} = \delta^a_{a_j} - \sum_{i=1}^{n-h-1} l^{a a_i} h_{a_i a_j} \, . \tag{1,24}$$

---

[6]) Při uvažované volbě veličin $l^{a_{i_1} a_{i_2}}$.
[7]) Kde platí (1,13).

Pro $a = a_{i_1}$, $i_1 \in 1, \dots, n - h - 1$[8]) se zredukují vztahy (1,24) na tvar

$$\sum_{j_1=n-h}^{n-1} l^{a_{i_1}a_{j_1}} h_{a_{j_1}a_j} = - \sum_{i=1}^{n-h-1} l^{a_{i_1}a_i} h_{a_ia_j} . \tag{1,25}$$

Vzhledem k (1,13) můžeme (1,25) přepsat takto:

$$\sum_{j_1=n-h}^{n-1} \Big(l^{a_{i_1}a_{j_1}} + \sum_{i=1}^{n-h-1} \overset{a_{j_1}}{\underset{a_i}{\lambda}} l^{a_{i_1}a_i}\Big) h_{a_{j_1}a_j} = 0 .$$

Podle lemmatu 1 plyne odtud ihned

$$l^{a_{i_1}a_{j_1}} = - \sum_{i=1}^{n-h-1} \overset{a_{j_1}}{\underset{a_i}{\lambda}} l^{a_{i_1}a_i}, \quad i \in 1, \dots, n - h - 1; \; j_1 \in n - h, \dots, n - 1 . \tag{1,26}$$

Porovnáme-li (1,26) s definičními vztahy (1,22), zjistíme, že platí

$$l^{a_ia_j} = l^{a_ja_i}, \quad i \in 1, \dots, n - h - 1; \; j \in n - h, \dots, n - 1 . \tag{1,27}$$

Pro volbu indexu $a = a_{j_3}$, $j_3 \in n - h, \dots, n - 1$, $a_{j_3} \neq a_j$ plyne z (1,24)

$$\sum_{j_1=n-h}^{n-1} l^{a_{j_3}a_{j_1}} h_{a_{j_1}a_j} = - \sum_{i=1}^{n-h-1} l^{a_{j_3}a_i} h_{a_ia_j} . \tag{1,28}$$

Pravou stranu v (1,28) přepíšeme podle (1,13) a (1,22)

$$\sum_{i=1}^{n-h-1} l^{a_{j_3}a_i} h_{a_ia_j} = - \sum_{i=1}^{n-h-1} \sum_{i_1=1}^{n-h-1} \sum_{j_1=n-h}^{n-1} \overset{a_{j_3}}{\underset{a_{i_1}}{\lambda}} l^{a_ia_{i_1}} \overset{a_{j_1}}{\underset{a_i}{\lambda}} h_{a_{j_1}a_j} .$$

Vzhledem k poslední identitě můžeme rovnice (1,28) přepsat na tvar

$$\sum_{j_1=n-h}^{n-1} \Big(l^{a_{j_3}a_{j_1}} - \sum_{i_1=1}^{n-h-1} \sum_{i=1}^{n-h-1} \overset{a_{j_3}}{\underset{a_{i_1}}{\lambda}} \overset{a_{j_1}}{\underset{a_i}{\lambda}} l^{a_ia_{i_1}}\Big) h_{a_{j_1}a_j} = 0 .$$

Odtud plyne ihned podle lemmatu 1

$$l^{a_{j_3}a_{j_1}} = \sum_{i_1=1}^{n-h-1} \sum_{i=1}^{n-h-1} \overset{a_{j_3}}{\underset{a_{i_1}}{\lambda}} \overset{a_{j_1}}{\underset{a_i}{\lambda}} l^{a_ia_{i_1}}, \quad j_3, j_1 \in n - h, \dots, n - 1, \; j_3 \neq j_1 . \tag{1,29}$$

Z (1,29) plyne

$$l^{[a_{j_3}a_{j_1}]} = \sum_{i_1=1}^{n-h-1} \sum_{i=1}^{n-h-1} \overset{[a_{j_3}}{\underset{a_{i_1}}{\lambda}} \overset{a_{j_1}]}{\underset{a_i}{\lambda}} l^{a_ia_{i_1}} = \sum_{i_1=1}^{n-h-1} \sum_{i=1}^{n-h-1} \overset{a_{j_3}}{\underset{a_{i_1}}{\lambda}} \overset{a_{j_1}}{\underset{a_i}{\lambda}} l^{[a_ia_{i_1}]}$$

a tedy vzhledem k podmínkám (1,21)

$$l^{[a_{j_3}a_{j_1}]} = 0 \text{ pro } j_3, j_1 \in n - h, \dots, n - 1; \; j_3 \neq j_1 . \tag{1,30}$$

Z (1,27), (1,30) plyne ihned tvrzení (1,23). Jednoznačnost řešení při pevné volbě veličin $l^{a_{i_1}a_{i_2}}$, $i_1, i_2 \in 1, \dots, n - h - 1$ a volbě (1,22) je pak z definičních rovnic (1,24) (což jsou vlastně rovnice (1,16)) a z lemmatu 1 zřejmá. Existence nekonečně mnoha symetrických řešení l^{ab} rovnic (1,16) spočívá v tom, že můžeme veličiny $l^{a_{i_1}a_{i_2}}$ $(i_1, i_2 = 1, \dots, n - h - 1)$ volit zcela libovolně tak, aby platilo (1,2.)1

[8]) Viz poznámku [1]).

Na základě předchozí pomocné věty vyslovíme nyní tuto větu:

Věta 3. *Všechna symetrická řešení l^{ab} rovnic* (1,16) *jsou tvaru*

$$l^{ab} = \underset{0}{l}^{ab} + \sum_{i_1, i_2 = 1}^{n-h-1} \overset{i_1 i_2}{g} \underset{(i_1)}{v^a} \underset{(i_2)}{v^b} , \tag{1,31}$$

kde $\underset{0}{l}^{ab}$ je symetrické řešení rovnic (1,16), *které odpovídá volbě*

$$\underset{0}{l}^{aa_i} = 0, \ a = 1, 2, \ldots, n - 1; \ i = 1, \ldots, n - h - 1 , \tag{1,32}$$

$\underset{(i)}{v^a}$, $i = 1, 2, \ldots, n - h - 1$ *jsou nezávislé vektory s vlastnostmi* (1,5) *a* $\overset{i_1 i_2}{g}$, $i_1, i_2 \epsilon 1, \ldots, n - h - 1$ *jsou libovolné skalární veličiny v* X_{n-1} *s vlastností*

$$\overset{[i_1 i_2]}{g} = 0 . \tag{1,33)$_a$}$$

Důkaz: Především ukážeme, že existuje symetrické řešení $\underset{0}{l}^{ab}$ rovnic (1,16) při volbě (1,32) a to jednoznačně. Volíme-li totiž $\underset{0}{l}^{a_i a_{i_1}} = 0$ pro $i, i_1 = 1, \ldots, n - h - 1$, pak je podle (1,22) $\underset{0}{l}^{a_j a_i} = 0$ $(j = n - h, \ldots, n - 1; \ i = 1, \ldots, n - h - 1)$, což můžeme stručněji psát ve tvaru (1,32). Podle lemmatu 2 existuje pak za těchto podmínek jednoznačné symetrické řešení rovnic (1,16). Vzhledem k (1,32) se rovnice (1,16) resp. (1,24) redukují na tvar

$$\sum_{j_1 = n-h}^{n-1} \underset{0}{l}^{a_{j_2} a_{j_1}} h_{a_{j_1} a_j} = \delta^{a_{j_2}}_{a_j}, \ j_2, j_1 = n - h, \ldots, n - 1 \tag{1,33)$_b$}$$

s jednoznačným řešením pro složky $\underset{0}{l}^{a_{j_2} a_{j_1}}$ (jak plyne z lemmatu 1). Víme nyní, že rovnice (1,16) mají symetrické řešení $\underset{0}{l}^{ab}$. Budiž l^{ab} jiné symetrické řešení rovnic (1,16). Označme

$$w^{ab} = l^{ab} - \underset{0}{l}^{ab} . \tag{1,34}$$

Vzhledem k tomu, že l^{ab}, $\underset{0}{l}^{ab}$ jsou řešeními rovnic (1,16), plyne odtud pro w^{ab} z (1,34)

$$w^{ab} h_{bc} = 0 .$$

Mysleme si index a pevný; potom při tomto pevném indexu a existují veličiny $\overset{(i)}{u^a}$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$ tak, že je

$$w^{ab} = \sum_{i=1}^{n-h-1} \overset{(i)}{u^a} \underset{(i)}{v^b} .^{9)} \tag{1,35}$$

Poněvadž jde o symetrická řešení l^{ab}, $\underset{0}{l}^{ab}$ rovnic (1,16), je $w^{[ab]} = 0$, což vede pro veličiny $\overset{(i)}{u^a}$ z (1,35) k podmínkám

$$\sum_{i=1}^{n-h-1} \overset{(i)}{u}{}^{[a} \underset{(i)}{v}{}^{b]} = 0 .$$

[9]) To plyne z (1,5), neboť všechna řešení v^a rovnic $v^a h_{ab} = 0$ jsou lineárními kombinacemi shora uvažovaných lineárně nezávislých vektorů $\underset{(i)}{v^a}$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$.

Myslíme-li si rozepsánu alternaci v předchozích vztazích a takto upravené je násobíme tensorem h_{bc} (a sečteme přes c), dostaneme z nich podle (1,5)

$$\sum_{i=1}^{n-h-1} \overset{(i)}{u^b} h_{bc} \underset{(i)}{v^a} = 0 .$$

Poněvadž vektory $\underset{(i)}{v^a}$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$ jsou dle předpokladu lineárně nezávislé, plyne z hořeních vztahů

$$\overset{(i)}{u^b} h_{bc} = 0 .$$

Ze stejných důvodů jako shora již bylo postupováno můžeme psát

$$\overset{(i)}{u^b} = \sum_{i_1=1}^{n-h-1} \overset{ii_1}{g} \underset{(i_1)}{v^b} . \tag{1,36}$$

Z (1,36) a (1,35) plyne

$$w^{ab} = \sum_{i=1}^{n-h-1} \sum_{i_1=1}^{n-h-1} \overset{ii_1}{g} \underset{(i)}{v^b} \underset{(i_1)}{v^a} .$$

Požadavek symetričnosti tensoru w^{ab} vyžaduje symetričnost veličin $\overset{ii_1}{g}$; to plyne z předpokladu lin. nezávislosti vektorů $\underset{(i)}{v^a}$. Tím je věta dokázána.

Poznámka 4. Předchozí věta byla vyslovena při pevně zvoleném tečném vektoru t_ν variety X_{n-1}. Věta následující se týká řešení rovnic (1,16), vyjdeme-li místo od vektoru t_ν od vektoru $^*t_\nu$ vázaného s vektorem t_ν vztahem (3).

Věta 4. *Vyjdeme-li místo od tečného vektoru t_ν od vektoru $^*t_\nu = Pt_\nu$ $(P \neq 0)$, potom všechna symetrická řešení rovnic*

$$^*l^{ab}\, {}^*h_{ba_j} = \delta^a_{a_j}, \quad a = 1, \ldots, n-1; \; j = n-h, \ldots, n-1 . \tag{1,37}$$

jsou tvaru

$$^*l^{ab} = Ql^{ab}, \quad Q = P^{-1} , \tag{1,38}$$

kde l^{ab} jsou symetrická řešení rovnic (1,16), *tedy tvaru* (1,31).

Důkaz: Z definičních rovnic (1,37) a ze vztahu (5) plyne přepis

$$^*l^{ab}Ph_{ba_j} = \delta^a_{a_j}, \quad j = n-h, \ldots, n-1; \; a = 1, \ldots, n-1 .$$

Podle věty 3, vztahů (1,31), je tedy

$$^*l^{ab}P = l^{ab}, \text{ t. j. } {}^*l^{ab} = Ql^{ab} .$$

Poznámka 5. Z (1,37) a z věty 3 plyne speciálně

$$\underset{0}{^*l^{ab}} = Q\underset{0}{l^{ab}} . \tag{1,39}$$

Věta 5. *Jest*

$$l^{ab}h_{ab} = h \;\; (h \text{ hodnost tensoru } h_{ab}) , \tag{1,40}$$

a to nezávisle na volbě řešení l^{ab} rovnic (1,16) *a nezávisle na volbě faktoru (nenulového) tečného vektoru t_ν.*

Důkaz: Pro levou stranu v (1,40) dostaneme vzhledem k (1,31), (1,5)

$$l^{ab}h_{ab} = (\underset{0}{l^{ab}} + \sum_{i_1,i_2=1}^{n-h-1} \overset{i_1i_2}{g} \underset{(i_1)}{v^a} \underset{(i_2)}{v^b}) h_{ab} = \underset{0}{l^{ab}}h_{ab} ,$$

tedy levá strana v (1,40) nezávisí na volbě řešení l^{ab} rovnic (1,16). Vzhledem k (1,32), (1,27) a definičním vztahům (1,16) dostaneme

$$l^{ab}_{a} h_{ab} = \sum_{j_1, j_2 = n-h}^{n-1} \overset{0}{l}{}^{a_{j_1} a_{j_2}} h_{a_{j_1} a_{j_2}} = \sum_{j_2 = n-h}^{n-1} \delta^{a_{j_2}}_{a_{j_2}} = h\,.$$

Tím je dokázána platnost vztahu (1,40) a jeho nezávislost na volbě symetrického řešení l^{ac} rovnic (1,16). Nezávislost vztahu (1,40) na volbě faktoru tečného vektoru plyne bezprostředně z (5) a (1,38).

Definujme nyní jednak elementy $\begin{bmatrix} c \\ ab \end{bmatrix}$ jednak elementy L^c_{ab} takto:

$$\begin{bmatrix} c \\ ab \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} l^{cd}(\partial_a h_{db} + \partial_b h_{ad} - \partial_d h_{ab})\,, \tag{1,41$_a$}$$

$$L^c_{ab} \equiv l^{cd} \nabla_d\, t_\nu \nabla_a B^\nu_b\,. \tag{1,41$_b$}$$

Lemma 3. *Při regulární transformaci parametrů v* X_{n-1}

$$\bar{\eta}^{\bar{a}} = \bar{\eta}^{\bar{a}}(\eta^a) \tag{1,42}$$

platí[10])

$$\overline{\begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{a}\bar{b} \end{bmatrix}} = A^{\bar{c}}_c A^a_{\bar{a}} A^b_{\bar{b}} \begin{bmatrix} c \\ ab \end{bmatrix} + \tilde{\delta}^c_b A^{\bar{c}}_c\, \partial_{\bar{a}} A^b_{\bar{b}}\,, \tag{1,43$_a$}$$

$$\bar{L}^{\bar{c}}_{\bar{a}\bar{b}} = A^{\bar{c}}_c A^a_{\bar{a}} A^b_{\bar{b}} L^c_{ab} + \tilde{\delta}^c_b A^{\bar{c}}_c\, \partial_{\bar{a}} A^b_{\bar{b}}\,,^{11)} \tag{1,43$_b$}$$

kde

$$\tilde{\delta}^c_b \equiv l^{ca} h_{ab}\,. \tag{1,44}$$

Transformační vztahy $(1,43)_{a,b}$ se ověří přímým výpočtem. Poznamenejme, že pro tensor $\tilde{\delta}^c_b$, zavedený v (1,44), platí především, jak plyne z definičních rovnic (1,16),

$$\tilde{\delta}^c_{a_j} = \delta^c_{a_j} \quad \left(\delta^c_{a_j} = < \begin{matrix} 0 \text{ pro } c \neq a_j \\ 1 \text{ pro } c = a_j \end{matrix}\right) \quad \begin{matrix} c = 1, \ldots, n-1\,, \\ j = n-h, \ldots, -\ 1\,. \end{matrix} \tag{145$_a$}$$

Dále je podle (1,13), (1,16)

$$\tilde{\delta}^c_{a_i} \equiv l^{ca} h_{aa_i} = l^{ca} \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} h_{aa_j} = \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_i}{\underset{a_j}{\lambda}} \delta^c_{a_j}\,,$$

tedy

$$\tilde{\delta}^c_{a_i} = < \left.\begin{matrix} \overset{a_j}{\lambda} \text{ pro } c = a_j,\ j = n-h, \ldots, n-1; \\ \overset{a_i}{0} \text{ pro } c = a_i,\ i_1 = 1, \ldots, n-h-1 \end{matrix}\right\} i = 1, \ldots, n-h-1\,. \tag{1,45$_b$}$$

---

[10]) Jde opět o okolí zkoumaného bodu, tedy o lokální zákonitosti.

[11]) $$A^a_{\bar{a}} = \frac{\partial \eta^a}{\partial \bar{\eta}^{\bar{a}}}\,, \quad \bar{A}^{\bar{c}}_c = \frac{\partial \bar{\eta}^{\bar{c}}}{\partial \eta^c}\,.$$

Věta 6. *Veličina M_a v X_{n-1} takto definovaná*

$$M_a = \frac{2}{h+2}\left(\begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix} - L^c_{ac}\right), \quad a = 1, \ldots, n-1 \tag{1,46}$$

má tyto vlastnosti:

a) *Jest kovariantním tensorem v X_{n-1}.*

b) *Je nezávislá na volbě řešení (symetrického) l^{ab} rovnic* (1,16).

c) *Vyjdeme-li místo od vektoru t_ν od vektoru $^*t_\nu$ vázaného s t_ν vztahem* (3),

pak jest

$$^*M_{a_j} = M_{a_j} + P^{-1}\,\partial_{a_j} P, \; j = n-h, \ldots, n-1\,, \tag*{$(1,47)_a$}$$

$$^*M_{a_i} = M_{a_i} + \frac{h}{h+2} P^{-1}\,\partial_{a_i} P + \frac{2}{h+2} \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}}\,\partial_{a_j} P, \; i = 1, \ldots, n-h-1\,. \tag*{$(1,47)_b$}$$

Důkaz: Z transformačních vztahů $(1,43)_{a,b}$ plyne, že diference $\begin{bmatrix} c \\ ab \end{bmatrix} - L^c_{ac}$ je tensorem v X_{n-1} a tedy kontrahovaná veličina $\begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix} - L^c_{ac}$ (sčítáno přes c) je vektorem v X_{n-1}. Tím je tvrzení a) věty dokázáno.

Z definičních rovnic $(1,41)_a$, $(1,41)_b$ plyne

$$\begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} l^{cd}(\partial_a h_{dc} + \partial_c h_{ad} - \partial_d h_{ac}) = \tfrac{1}{2} l^{cd}\,\partial_a d_{dc}\,,^{12)} \tag*{$(1,48)_a$}$$

$$L^c_{ac} = l^{cd}\,\nabla_d\, t_\nu\, \nabla_a\, B^\nu_c\,. \tag*{$(1,48)_b$}$$

Podle (1,31) jest

$$\tfrac{1}{2} l^{cd}\,\partial_a h_{cd} = \tfrac{1}{2}(\underset{0}{l^{cd}} + \sum_{i_1,i_2=1}^{n-h-1} \overset{i_1 i_2}{g} \underset{(i_1)}{v^c} \underset{(i_2)}{v^d})\,\partial_a h_{dc} = \tfrac{1}{2}\underset{0}{l^{cd}}\,\partial_a h_{dc} + \tfrac{1}{2}\sum_{i_1,i_2=1}^{n-h-1} \overset{i_1 i_2}{g} \underset{(i_1)}{v^c} \underset{(i_2)}{v^d}\,\partial_a h_{dc}\,.$$

Jest však vzhledem k (1,5)

$$\underset{(i_1)}{v^c} \underset{(i_2)}{v^d}\,\partial_a h_{dc} = -h_{dc}\,\partial_a \underset{(i_1)}{v^c} \underset{(i_2)}{v^d} = -h_{dc} \underset{(i_1)}{v^d}\,\partial_a \underset{(i_2)}{v^d} - h_{dc} \underset{(i_2)}{v^d}\,\partial_a \underset{(i_1)}{v^c} = 0\,.$$

Tedy

$$\begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\underset{0}{l^{cd}}\,\partial_a h_{dc} \equiv \underset{0}{\begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix}}\,. \tag*{$(1,49)_a$}$$

Podobně dostaneme z $(1,48)_b$, (1,31), (4), (1,5) a (1,6)

$$l^{cd}\,\nabla_d\, t_\nu\, \nabla_a\, B^\nu_c = (\underset{0}{l^{cd}} + \sum_{i_1,i_2=1}^{n-h-1} \overset{i_1 i_2}{g} \underset{(i_1)}{v^c} \underset{(i_2)}{v^d})\,\nabla_d\, t_\nu\, \nabla_a\, B^\nu_c =$$

$$= \underset{0}{l^{cd}}\,\nabla_d\, t_\nu\, \nabla_a\, B^\nu_c + \sum_{i_1,i_2=1}^{n-h-1} \overset{i_1 i_2}{g} \underset{(i_1)}{v^c}(\nabla_a\, B^\nu_c) \underset{(i_2)}{v^d}\,\nabla_d\, t_\nu =$$

12) Je totiž $l^{cd}\,\partial_c h_{ad} - l^{cd}\,\partial_d h_{ac} = 0$ vzhledem k symetričnosti tensoru l^{ab}.

$$= \underset{0}{l^{cd}} \nabla_d t_\nu \nabla_a B^\nu_c + \sum_{i_1, i_2 = 1}^{n-h-1} \overset{i_1 i_2}{\underset{(i_1)}{g}} v^c \,.\, (\nabla_a B^\nu_c)\, \varrho_{i_2} t_\nu =$$

$$= \underset{0}{l^{cd}} \nabla_d t_\nu \nabla_a B^\nu_c + \sum_{i_1, i_2 = 1}^{n-h-1} \underset{(i_1)}{g}\, \varrho_{i_2} v^c h_{ac} = \underset{0}{l^{cd}} \nabla_d t_\nu \nabla_a B^\nu_b ;$$

tedy

$$L^c_{ac} = \underset{0}{l^{cd}} \nabla_d t_\nu \nabla_a B^\nu_c \equiv \underset{0}{L^c_{ac}} . \tag{1,49$_b$}$$

Z $(1{,}49)_{a,b}$ a z definičních vztahů (1,46) plyne ihned tvrzení b) věty. Vezmeme-li místo tečného vektoru t_ν tečný vektor $^*t_\nu = Pt_\nu$ $(P \neq 0)$, a označíme-li hvězdičkou vlevo nahoře příslušné veličiny (při této volbě $^*t_\nu$), potom je podle definičních rovnic $(1{,}48)_{a,b}$ a vztahů $(1{,}49)_{a,b}$

$$^*\begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\, {}^*l^{cd}\, \partial_a {}^*h_{dc} = \tfrac{1}{2}\, {}^*\underset{0}{l^{cd}}\, \partial_a {}^*h_{dc} , \tag{1,50$_a$}$$

$$^*L^c_{ac} = {}^*l^{cd} \nabla_d {}^*t_\nu \nabla_a B^\nu_c = {}^*\underset{0}{l^{cd}} \nabla_d {}^*t_\nu \nabla_a B^\nu_c . \tag{1,50$_b$}$$

Pro pravé strany v $(1{,}50)_{a,b}$ plyne pak na základě transformačních rovnic (3), (5), (1,39) a vztahů (1,40), (4), (1,44)

$$\tfrac{1}{2}\, {}^*\underset{0}{l^{cd}}\, \partial_a {}^*h_{dc} = \tfrac{1}{2}\, Q\underset{0}{l^{cd}}\, \partial_a P h_{dc} = \tfrac{1}{2}\, \underset{0}{l^{cd}}\, \partial_a h_{dc} + \tfrac{1}{2} h\, P^{-1}\, \partial_a P , \tag{1,51$_a$}$$

$$^*\underset{0}{l^{cd}} \nabla_a {}^*t_\nu \nabla_a B^\nu_c = Q\underset{0}{l^{cd}} \nabla_d (Pt_\nu) \nabla_a B^\nu_c = \underset{0}{l^{cd}} \nabla_d t_\nu \nabla_a B^\nu_c - P^{-1} \underset{0}{l^{cd}} h_{ac}\, \partial_d P =$$

$$= \underset{0}{l^{cd}} \nabla_d t_\nu \nabla_a B^\nu_c - P^{-1} \tilde{\delta}^d_a\, \partial_d P . \tag{1,51$_b$}$$

Z $(1{,}50)_{a,b}$, $(1{,}51)_{a,b}$, $(1{,}49)_{a,b}$ a definičních rovnic (1,46) dostaneme pro volbu indexu $a = a_j$, $j = n - h, \ldots, n - 1$, — použijeme-li ještě relace $(1{,}45)_a$ —

$$^*M_{a_j} \equiv \frac{2}{h+2} \left({}^*\begin{bmatrix} c \\ a_j c \end{bmatrix} - {}^*L^c_{a_j c} \right) = M_{a_j} + \frac{2}{h+2} \left(\frac{h}{2} + 1 \right) P^{-1}\, \partial_{a_j} P ,$$

což po úpravě dává vztah $(1{,}47)_a$.

Pro volbu indexu $a = a_i$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$ dostaneme z definičních rovnic (1,46) s přihlédnutím ke vztahům $(1{,}50)_{a,b}$, $(1{,}51)_{a,b}$, $(1{,}49)_{a,b}$, $(1{,}45)_b$

$$^*M_{a_i} = \frac{2}{h+2} \left({}^*\begin{bmatrix} c \\ a_i c \end{bmatrix} - {}^*L^c_{a_i c} \right) =$$

$$= M_{a_i} + \left(\frac{h}{2} P^{-1}\, \partial_{a_i} P + P^{-1} \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}}\, \partial_{a_j} P \right) \frac{2}{h+2} ,$$

odkud úpravou plyne vztah $(1{,}47)_b$.

Ke konci tohoto paragrafu připojme ještě jednu poznámku, užitečnou hlavně pro praktický výpočet:

Poznámka 6. V definičních rovnicích (1,46) můžeme, jak z tvrzení b) věty 6 vyplývá, psát místo symbolů $\begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix}$, L^c_{ac} přímo symboly $\underset{0}{\begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix}}$, $\underset{0}{L^c_{ac}}$ (viz $(1{,}49)_{a,b}$).

Tedy můžeme definovat přímo

$$M_a = \frac{2}{h+2}\left(\left[\begin{matrix} c \\ ac \end{matrix}\right]_0 - \underset{0}{L^c_{ac}}\right). \tag{1,52}$$

Složek M_{a_j} ($j = n - h, \ldots, n - 1$) vektoru M_a v X_{n-1} použijeme vhodně v dalším paragrafu při definici afinnormálního vektoru a konexe tímto vektorem indukované v X_{n-1}.

§ 2. Definice afinnormálního vektoru v případě $1 \leq h < n - 1$

V celém paragrafu budeme předpokládat, že pro hodnost h tensoru h_{ab} variety X_{n-1} platí v uvažovaném oboru

$$1 \leq h < n - 1\,. \tag{2,1}$$

Za tohoto předpokladu definujeme při pevně zvoleném tečném vektoru t_ν variety X_{n-1} afinnormální vektor n^ν rovnicemi

$$\begin{aligned} &\text{a) } n^\nu t_\nu = 1, \\ &\text{b) } n^\nu \nabla_{a_j} t_\nu = M_{a_j},\ j = n - h, \ldots, n - 1, \\ &\text{c) } n^\nu \nabla_{a_i} t_\nu = \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} M_{a_j} + u_{a_i},\ i = 1, \ldots, n - h - 1, \end{aligned} \tag{2,2}$$

kde veličiny $\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}}, u_{a_i}$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$; $j = n - h, \ldots, n - 1$ mají týž význam jako v rovnicích (1,7).

Především je třeba podotknout, že systém rovnic (2,2) pro neznámé u^ν ($\nu = 1, \ldots, n$), je řešitelný. Je-li totiž h hodnost tensoru h_{ab} (kde h je přirozené číslo, pro něž platí (2,1)), potom v determinantu $[\nabla_1 t_\nu, \nabla_2 t_\nu, \ldots, \nabla_{n-1} t_\nu, t_\nu]$ je $h + 1$ lineárně nezávislých řádků, jeden řádek z nich je tvořen složkami tečného vektoru t_ν, ostatní lineárně nezávislé řádky jsou pak ve smyslu dřívějšího označení $\nabla_{a_j} t_\nu$, $j = n - h, \ldots, n - 1$. Zbývající řádky, které jsme označili $\nabla_{a_i} t_\nu$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$, jsou pak lineární kombinací řádků a_j-tých (viz (1,7)).

Řešitelnost soustavy (2,2) plyne pak z toho, že hodnost matice determinantů soustavy a hodnost rozšířené matice soustavy jsou stejné, jak je zřejmé z (1,7) a pravých stran v (2,2).

Při řešení systému (2,2) stačí se tedy omezit na řešení rovnic

$$\begin{aligned} &\text{a) } n^\nu t_\nu = 1, \\ &\text{b) } n^\nu \nabla_{a_j} t_\nu = M_{a_j},\ j = n - h, \ldots, n - 1. \end{aligned} \tag{2,3}$$

Potom všechna řešení rovnic (2,2) jsou řešeními rovnic (2,3) a obráceně.

Věta 7. *Je-li při pevně zvoleném tečném vektoru t_ν, $\underset{1}{n^\nu}$ jedno z řešení rovnic (2,2), potom každé řešení n^ν rovnic (2,2) je tvaru:*

$$n^\nu = \underset{1}{n^\nu} + B^\nu_c v^c\,, \tag{2,4}$$

kde v^c je vektorem v X_{n-1}, pro nějž platí

$$v^c h_{cb} = 0, \ b = 1, \ldots, n \, . \tag{2,5}$$

Důkaz: Budiž (při pevně zvoleném t_ν) $\underset{1}{n}^\nu$ řešením rovnic (2,2) a n^ν jiné řešení těchto rovnic. Poněvadž je determinant $[B_1^\nu B_2^\nu \ldots B_{n-1}^\nu, \underset{1}{n}^\nu] \neq 0$, můžeme psát n^ν jako lineární kombinaci vektorů $\underset{1}{n}^\nu$, B_a^ν, $a = 1, \ldots, n - 1$, tedy ve tvaru

$$n^\nu = a\underset{1}{n}^\nu + B_c^\nu v^c \, . \tag{2,6}$$

Poněvadž podle předpokladu je n^ν řešením rovnic (2,2), dostaneme — dosadíme-li z (2,6) do $(2,2)_b$ a přihlédneme-li k (2) — $a = 1$. Tedy n^ν je tvaru (2,4). Dosadíme-li z (2,4) do $(2,2)_b$ dostaneme

$$n^\nu \nabla_{a_j} t_\nu = (\underset{1}{n}^\nu + B_c^\nu v^c) \nabla_{a_j} t_\nu = M_{a_j} \, ,$$

což, vzhledem k tomu, že pro $\underset{1}{n}^\nu$ platí $(2,2)_b$, vede k podmínce $v^c B_c^\nu \nabla_{a_j} t_\nu = 0$ a tedy — podle (4) — k podmínce $h_{ca_j} = 0$ pro $j = n - h, \ldots, n - 1$. Analogicky dojdeme k podmínce $v^c h_{ca_i} = 0$ pro $i = 1, \ldots, n - h - 1$ (dosadíme-li z (2,4) do $(2,2)_c$). Tím je věta dokázána.

Věta 8. *Vyjdeme-li místo od shora uvažovaného tečného vektoru t_ν od vektoru $^*t_\nu = Pt_\nu$ $(P \neq 0)$, potom všechna řešení rovnic*[13])

a) $^*n^\nu \, ^*t_\nu = 1$,

b) $^*n^\nu \nabla_{a_j} {}^*t_\nu = {}^*M_{a_j}, \ j = n - h - 1, \ldots, n - 1, \qquad (2,6)$

c) $^*n^\nu \nabla_{a_i} {}^*t_\nu = \sum\limits_{j=n-h}^{n-1} {}^*\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} {}^*M_{a_j} + {}^*u_{a_i}, \ i = 1, \ldots, n - h - 1,$

jsou tvaru

$$^*n^\nu = Qn^\nu \ (Q \equiv P^{-1}) \tag{2,7}$$

kde n^ν jsou řešeními rovnic (2,2).

Důkaz: Z rovnice $(2,6)_a$ a vztahu (3) plyne ihned, že $^*n^\nu$ je tvaru

$$^*n^\nu = Q(\underset{1}{n}^\nu + B_c^\nu w^c) \, ,^{14)} \tag{2,8}$$

kde w^c je nějaký vektor v X_{n-1}. Dosadíme-li do $(2,6)_b$ za $^*n^\nu$, $^*t_\nu$, $^*M_{a_j}$ z transformačních vztahů (2,8), (1,3), $(1,47)_a$ dostaneme

$$Q(\underset{1}{n}^\nu + B_c^\nu w^c) \nabla_{a_j} P t_\nu = M_{a_j} + P^{-1} \partial_{a_j} P, \ (Q = P^{-1}) \, ,$$

t. j. po úpravě (vzhledem k (2), (4), $(2,2)_a$)

$$\underset{1}{n}^\nu \nabla_{a_j} t_\nu + P^{-1} \partial_{a_j} P + w^c h_{ca_j} = M_{a_j} + P^{-1} \partial_{a_j} P$$

a tedy použijeme-li $(2,2)_b$,

$$w^c h_{ca_j} = 0 \ \text{pro} \ j = n - h, \ldots, n - 1 \, . \tag{2,9$_a$}$$

[13]) Symbolem * označujeme veličiny vztažené k vektoru $^*t_\nu$.

[14]) $\underset{1}{n}$ je nějaké řešení rovnic (2,2).

Dosadíme-li do $(2,6)_c$ za $*t_\nu$, $*n^\nu$, $*M_{a_j}$, $*\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}}$, $*u_{a_i}$ z transformačních vztahů (1,3) (2,8), $(1,47)_a$, $(1,15)_{a,b}$, dostaneme

$$Q(\underset{1}{n^\nu} + B^\nu_c w^c)(P \nabla_{a_i} t_\nu + t_\nu \partial_{a_i} P) =$$

$$= \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} (M_{a_j} + P^{-1} \partial_{a_j} P) + u_{a_i} - \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a}{\lambda}} P^{-1} \partial_{a_j} P + P^{-1} \partial_{a_i} P .$$

Odtud dostaneme po úpravě vzhledem k (2), (4)

$$\underset{1}{n^\nu} \nabla_{a_i} t_\nu + w^c h_{ca_i} = \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} M_{a_j} + u_{a_i}$$

a tedy vzhledem k $(2,2)_c$

$$w^c h_{ca_i} = 0 \text{ pro } i = 1, \ldots, n - h - 1 . \qquad (2,9)_b$$

Tedy, jak plyne z $(2,9)_{a,b}$, vektor w^c vyhovuje vztahům (2,5) z věty 7. Odtud a z (2,8), (2,4), plyne pak tvrzení věty.

Nyní vyslovme tuto důležitou větu:

Věta 9. *Nechť v daném afinním prostoru A_n $(n > 2)$ existuje regulární nadplocha X_{n-1} té vlastnosti, že v každém bodě uvažovaného oboru platí pro hodnost h tensoru h_{ab}: $1 \leq h < n - 1$.*

Označíme-li $\underset{(i)}{v^a}$, $i = 1, 2, \ldots, n - h - 1$ libovolná lineárně nezávislá řešení rovnic

$$\underset{(i)}{v^a} h_{ab} = 0, \; b = 1, \ldots, n - 1 , \qquad (2,10)$$

potom $(n - h)$-vektor o složkách

$$\underset{(1)}{v^{[\alpha_1}} \underset{(2)}{v^{\alpha_2}} \ldots \underset{(n-h-1)}{v^{\alpha_{n-h-1}}} n^{\alpha_{n-h}]} , \quad \underset{(i)}{v^\alpha} \equiv B^\alpha_a \underset{(i)}{v^a} , \qquad (2,11)$$

kde n^ν je libovolné řešení rovnic (2,2), definuje v každém bodě variety X_{n-1} určitý $(n - h)$-směr, který má tyto vlastnosti:

a) *je nezávislý na volbě lineárně nezávislých řešení $\underset{(i)}{v^a}$ $(i = 1, \ldots, n - h - 1)$ rovnic (2,10);*

b) *je nezávislý na volbě řešení n^α rovnic (2,2);*

c) *je nezávislý na volbě faktoru tečného vektoru t_ν variety X_{n-1}.*

Důkaz: Nechť $\underset{1}{n^\nu}$ je nějaké řešení rovnic (2,2); nechť $\underset{(i)}{v^a}$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnic (2,10) a $\underset{(i)}{w^a}$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$ jiný takový systém lineárně nezávislých řešení rovnic (2,10). Potom v každém bodě uvažovaného oboru variety X_{n-1} existují čísla $\overset{k}{\underset{i}{r}}$ $(i, k = 1, \ldots, n - h - 1)$ tak, že je

$$\underset{(i)}{w^a} = \sum_{k=1}^{n-h-1} \overset{k}{\underset{i}{r}} \underset{(k)}{v^a}, \; i = 1, \ldots, n - h - 1 , \qquad (2,12)_a$$

při čemž je

$$determinant\ [\overset{k}{\underset{i}{r}}] = (n - h - 1)!\, \overset{1}{\underset{[1}{r}}\, \overset{2}{\underset{2}{r}} \ldots \overset{n-h-1}{\underset{n-h-1]}{r}} \neq 0\,.^{15)} \qquad (2,12)_b$$

Definujeme-li $\underset{(i)}{w^\alpha} \equiv B^\alpha_a \underset{(i)}{w^a}$, pak $(2,12)_a$ můžeme přepsat na tvar

$$\underset{(i)}{w^\alpha} = \sum_{k=1}^{n-h-1} \overset{k}{\underset{i}{r}}\, \underset{(k)}{v^\alpha}, \quad v^\alpha \equiv B^\alpha_a \underset{(i)}{v^a}\,.$$

Odtud dostaneme

$$\underset{(1)}{w}^{[\alpha_1} \underset{(2)}{w}^{\alpha_2} \ldots \underset{(n-h-1)}{w}^{\alpha_{n-h-1}} \underset{1}{n}^{\alpha_{n-h}]} = \sum \overset{k_1}{\underset{1}{r}}\, \overset{k_2}{\underset{2}{r}} \ldots \overset{k_{n-h-1}}{\underset{n-h-1}{r}}\, \underset{(k_1)}{v}^{[\alpha_1} \underset{(k_2)}{v}^{\alpha_2} \ldots \underset{(k_{n-h-1})}{v}^{\alpha_{n-h-1}} \underset{1}{n}^{\alpha_{n-h}]} =$$

$$= \underset{(1)}{v}^{[\alpha_1} \underset{(2)}{v}^{\alpha_2} \ldots \underset{(n-h-1)}{v}^{\alpha_{n-h-1}} n^{\alpha_{n-h}]} \sum (-1)^p \overset{k_1}{\underset{1}{r}}\, \overset{k_2}{\underset{2}{r}} \ldots \overset{k_{n-h-1}}{\underset{n-h-1}{r}}\,,$$

kde ve vypsaném sumačním symbolu sčítáme přes všechny možné permutace čísel $k_1, \ldots, k_{n-h-1} = 1, \ldots, n - h - 1$. Symbol p značí pak třídu příslušné permutace. Jak z předchozích rovnic vyplývá, můžeme psát

$$\underset{(1)}{w}^{[\alpha_1} \underset{(2)}{w}^{\alpha_2} \ldots \underset{(n-h-1)}{w}^{\alpha_{n-h-1}} \underset{1}{n}^{\alpha_{n-h}]} = D\,.\, \underset{(1)}{v}^{[\alpha_1} \underset{(2)}{v}^{\alpha_2} \ldots \underset{(n-h-1)}{v}^{\alpha_{n-h-1}} \underset{1}{n}^{\alpha_{n-h}]}\,,$$

kde D je skalár v X_{n-1}, totiž determinant z $(2,12)_b$. Z předchozích vztahů vysvítá ihned platnost tvrzení a) věty 9.

Důkaz tvrzení b) věty 9 je velmi snadný. Je-li totiž n^ν řešením rovnic (2,2) různým od dříve uvažovaného řešení $\underset{1}{n^\nu}$ rovnic (2,2), potom můžeme na základě rovnic (2,4) z věty 7 psát

$$\underset{1}{v}^{[\alpha_1} \underset{2}{v}^{\alpha_2} \ldots \underset{n-h-1}{v}^{\alpha_{n-h-1}} n^{\alpha_{n-h}]} =$$

$$= \underset{(1)}{v}^{[\alpha_1} \underset{(2)}{v}^{\alpha_2} \ldots \underset{(n-h-1)}{v}^{\alpha_{n-h-1}} \underset{1}{n}^{\alpha_{n-h}]} + \underset{1}{v}^{[\alpha_1} \underset{2}{v}^{\alpha_2} \ldots \underset{(n-h-1)}{v}^{\alpha_{n-h-1}} B^{\alpha_{n-h}]}_a v^a\,, \qquad (2,13)$$

kde vektor v^a vyhovuje rovnicím (2,5). Vektor v^a můžeme tedy psát jako lineární kombinaci vektorů $\underset{(i)}{v^a}$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$ a tedy vektor $v^\alpha \equiv B^\alpha_a v^a$ jako lineární kombinaci vektorů $\underset{(i)}{v^\alpha}$, $i = 1, 2, \ldots, n - h - 1$. Odtud plyne však, že druhý sčítanec na pravé straně ve vztazích (2,13) je roven nule.

Platí tedy:

$$\underset{(1)}{v}^{[\alpha_1} \underset{(2)}{v}^{\alpha_2} \ldots \underset{(n-h-1)}{v}^{\alpha_{n-h-1}} n^{\alpha_{n-h}]} = \underset{(1)}{v}^{[\alpha_1} \underset{(2)}{v}^{\alpha_2} \ldots \underset{(n-h-1)}{v}^{\alpha_{n-h-1}} \underset{1}{n}^{\alpha_{n-h}]}\,,$$

čímž je tvrzení b) ověřeno.

Nechť systém lineárně nezávislých vektorů $\underset{(i)}{v^a}$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$ vyhovuje rovnicích (2,10). Vyjdeme-li nyní místo od tečného vektoru t_ν od tečného vektoru $^*t_\nu = Pt_\nu$, $P \neq 0$, potom je též $\underset{(i)}{v^a}\, {}^*h_{ab} = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n - h - 1$, jak je zřejmé z (5). Můžeme tedy prohlásit vektory $\underset{(i)}{v^a}$ za nezávislé na transformačních vztazích (3). Odtud a z věty 8, rovnic (2,7) plyne pak:

[15]) To plyne z předpokladu lineární nezávislosti vektorů $\underset{(i)}{w^a}$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$.

$$\overset{*}{\underset{(1)}{v}}{}^{[\alpha_1} \overset{*}{\underset{(2)}{v}}{}^{\alpha_2} \dots \overset{*}{\underset{(n-h-1)}{v}}{}^{\alpha_{n-h-1}} \overset{*}{n}{}^{\alpha_{n-h}]} = \underset{(1)}{v}{}^{[\alpha_1} \underset{(2)}{v}{}^{\alpha_2} \dots \underset{(n-h-1)}{v}{}^{\alpha_{n-h-1}} n^{\alpha_{n-h}]} Q \,,$$

kde $Q = P^{-1}$. Je tedy i tvrzení c) věty správné. Tím je celá věta 9 dokázána.

Definice 1. *Privilegovaný $(n - h)$-směr z věty 9 budeme nazývat invariantním afinnormálním $(n - h)$-směrem variety X_{n-1}.*

Poznámka 7. Nyní je zřejmé, proč jsme v definičních rovnicích (2,2) pro vektor n^ν volili pravé strany poměrně složitě. Účelem bylo totiž zajistit invarianci $(n - h)$-směru z věty 9 vzhledem k transformaci tečného vektoru t_ν. A k tomu bylo třeba volit pravé strany v (2,2) tak, aby veličiny na těchto stranách měly takové vlastnosti při změně faktoru tečného vektoru jako mají právě zvolené veličiny M_{a_j}. Naše definice veličin M_{a_j} není náhodná. Je naprosto analogická veličinám symbolicky stejně označeným v dřívější práci, kdy šlo o afinnormální vektor variety X_{n-1} v A_n s předpokladem, že hodnost tensoru h_{ab} je $n - 1$.[16])

Poznámka 8. Hořením postupem — a to se dalo čekat — nedospěli jsme k jednoznačné definici afinnormálního vektoru pro varietu X_{n-1}, pro jejíž tensor h_{ab} platí (2,1). Za afinnormální vektor variety X_{n-1} můžeme vzít kterékoliv řešení n^ν rovnic (2,2). Kdybychom chtěli dosáhnout jednoznačnosti, t. j. definovat směr vektoru n^ν v A_n jednoznačně, pak bychom museli k podmínkám (2,2) přidat dalších $n - h - 1$ podmínek, které by nebyly ve sporu se vztahy (2,2), nebyly jejich důsledkem a také aby jedna z druhé neplynuly.

Hořením postupem jsme získali určitou třídu afinnormálních směrů, která jako celek nezávisí na volbě faktoru tečného vektoru t_ν. K této třídě afinnormálních směrů lze nyní konstruovat určitou třídu konexí v X_{n-1}.

Budiž n^ν nějaké řešení rovnic (2,2). Definujeme veličiny $\underset{1}{B}{}^a_\nu$ takto[17])

$$\underset{1}{B}{}^a_\nu B^\nu_b = \delta^a_b \quad \left(\delta^a_b = \begin{cases} 1 & \text{pro } a = b \\ 0 & \text{pro } a \neq b \end{cases}\right), \tag{2,14}$$
$$\underset{1}{B}{}^a_\nu \underset{1}{n}{}^\nu = 0 \,.$$

Snadno nahlédneme, že systém rovnic (2,14) má jednoznačné řešení pro elementy $\underset{1}{B}{}^a_\nu$.[17])

Lemma 4. *Elementy $\underset{1}{\Gamma}{}^c_{ab}$ takto definované*

$$\underset{1}{\Gamma}{}^c_{ab} \equiv B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b \tag{2,15}$$

definují v X_{n-1} konexi.[18])

[16]) (I), str. 192, rovnice (4,5)a a str. 195, rovnice $(4,12)_a$ a strana 197, rovnice (5,4).
[17]) (I), str. 182, rovnice (2,2).
[18]) Konexe ve smyslu afinní indukce (*Nožička*, La connexion et la normale de l'hypersurface dans l'espace riemannienne du point de vue de la géometrie affine, Czechoslovak mathematical Journal, vol. *1* (*76*), 1951, strana 20 (12).

Důkaz se provede poukazem na transformační zákonitost při regulární transformaci parametrů v X_{n-1}. Zde (pro jeho jednoduchost) není podán.

Definice 2. *Konexi o koeficientech definovaných v* (2,15) *nazýváme konexí indukovanou afinnormálním vektorem* n^ν *v* X_{n-1}.

Vezmeme-li nyní řešení n^ν rovnic (2,2) různé od řešení $\underset{1}{n}^\nu$, potom platí podle (2,4)

$$n^\nu = \underset{1}{n}^\nu + B^\nu_c v^c ,$$

kde v^c vyhovuje rovnicím (2,5). Zavedeme-li elementy B^a_ν definicí analogickou definici elementů $\underset{1}{B}{}^a_\nu$, tedy

$$B^a_\nu B^\nu_b = \delta^a_b,\ B^a_\nu n^\nu = 0 ,$$

potom platí mezi elementy B^a_ν, $\underset{1}{B}{}^a_\nu$ vztahy

$$B^a_\nu = \underset{1}{B}{}^a_\nu - v^a t_\nu . \tag{2,16}$$

Relace (2,16) se snadno ověří na základě definičních vztahů pro elementy B^a_ν, B^a_ν.[19])

Pro konexi indukovanou vektorem n^ν dostaneme na základě (2,16), (2,15)

$$\Gamma^c_{ab} \equiv B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b = (\underset{1}{B}{}^c_\nu - v^c t_\nu) \nabla_a B^\nu_b = \underset{1}{\Gamma}{}^c_{ac} - v^c t_\nu \nabla_a B^\nu_b ,$$

a tedy vzhledem k (4)

$$\Gamma^c_{ab} = \underset{1}{\Gamma}{}^c_{ab} + h_{ab} v^c . \tag{2,17}$$

Věta 10. *Třída afinnormálních vektorů variety* X_{n-1} *representovaná všemi řešeními* n^ν *rovnic* (2,2) *vede k třídě konexí indukovaných v* X_{n-1} *o koeficientech tvaru* (2,17), *kde* $\underset{1}{\Gamma}{}^c_{ab}$ *je jedna z konexí této třídy a vektor* v^c *vyhovuje rovnicím* (2,5). *Ke každé konexi třídy* (2,17) *existuje jednoznačně vektor afinnormální* n^ν *(jenž je řešením rovnic* (2,2)), *který ji indukuje. Toto přiřazení konexe a afinnormálního vektoru je vzájemně jednoznačné. Uvažovaná třída indukovaných konexí je nezávislá na volbě faktoru tečného vektoru* t_ν.[20])

Část tvrzení věty byla dokázána v úvahách větě předcházejících; zbývá ověřit vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi třídou afinnormálních vektorů a třídou indukovaných konexí a dále invarianci třídy konexí vzhledem k transformaci tečného vektoru ${}^*t_\nu = Pt_\nu$.

Že vektoru n^ν, jenž je zvoleným řešením rovnic (2,2), je přiřazena konexe jím indukovaná jednoznačně, plyne ihned z definičních rovnic pro koeficienty konexe $\Gamma^c_{ab} \equiv B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b$, kde B^c_ν jsou jednoznačně svými definičními rovnicemi určeny. Budiž nyní dána konexe o koeficientech tvaru (2,17) s pevně zvoleným

[19]) Viz na př. práci citovanou v [14]), str. 24, 25, kde je analogický postup.

[20]) T. j. nezávislá v tom smyslu, že — vyjdeme-li místo od tečného vektoru t_ν od vektoru ${}^*t_\nu = Pt_\nu$, a tedy místo od vektoru n^ν od vektoru ${}^*n^\nu$ — dostaneme opět konexi třídy (2,17).

vektorem v^c vyhovujícím rovnicím (2,5). Potom vektor $n^\nu = \underset{1}{n^\nu} + B_c^\nu v^c$ indukuje tuto konexi. Kdyby existovalo jiné řešení $\bar{n}^\nu$ rovnic (2,2) indukující danou konexi ($\bar{n}^\nu \neq n^\nu$), potom by bylo $n^\nu + B_c^\nu \bar{v}^c = \bar{n}^\nu$, $\bar{v}^c \neq v^c$. Konexe $\bar{\Gamma}_{ab}^c$ indukovaná vektorem $\bar{n}^\nu$ je pak, podle (2,17)

$$\bar{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c + h_{ab}\bar{v}_c \,.$$

Rovnost $\bar{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c$ by implikovala $v^c = \bar{v}^c$, což je spor s předpokladem. Existuje tedy k dané konexi z třídy (2,17) afinnormální vektor $\bar{n}^\nu$ ji indukující (jenž je řešením rovnic (2,2)) jednoznačně.

Vyjdeme-li nyní místo od tečného vektoru t_ν od tečného vektoru $^*t_\nu = Pt_\nu$ ($P \neq 0$), potom všechna řešení rovnic (2,6) pro afinnormální vektor $^*n^\nu$ jsou (podle věty 8, rovnic (2,7)) tvaru:

$$^*n^\nu = Qn^\nu \,,$$

kde n^ν jsou řešeními rovnic (2,2). Definujeme-li veličiny $^*B_\nu^a$ rovnicemi $^*B_\nu^a B_b^\nu = \delta_b^a$, $^*B_\nu^a\,{}^*n^\nu = 0$, potom mezi veličinami $^*B_\nu^a$, B_ν^a [21]) platí vztah

$$^*B_\nu^a = B_\nu^a \text{ [22])}$$

a tedy $^*\Gamma_{ab}^c = {}^*B_\nu^c \nabla_a B_b^\nu = B_\nu^c \nabla_a B_b^\nu = \Gamma_{ab}^c$, čímž je poslední tvrzení věty dokázáno.

Položme si nyní otázku po definici a to jednoznačné, afinnormálního vektoru, který je z třídy shora uvažovaných afinnormálních vektorů. K tomu účelu definujeme kovariantní vektor m_a v X_{n-1} takto

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \qquad m_{a_j} = M_{a_j},\ j = n-h, \ldots, n-1, \\
&\text{(b)} \qquad m_{a_i} = \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} M_{a_j} + u_{a_i},\ i = 1, \ldots, n-h-1.
\end{aligned} \tag{2,18}$$

Vektor m_a definovaný v (2,18) představuje tedy pravé strany definičních rovnic $(2,2)_{b,c}$ pro vektor n^ν.

Lemma 5. *Vyjdeme-li místo od tečného vektoru t_ν od vektoru $^*t_\nu = Pt_\nu$ ($P \neq 0$), potom platí*

$$^*m_a = m_a + P^{-1}\,\partial_a P \,. \tag{2,19}$$

Správnost tohoto tvrzení byla ověřena pro $a = a_j$ ($j = n-h, \ldots, n-1$) větou 6, vztahem $(1,47)_a$. Platnost vztahu (2,19) pro $a = a_i$ ($i = 1, \ldots, n-h-1$) se snadno ověří z transformačních vztahů $(1,15)_{a,b}$, $(1,47)_a$.

Věta 11. *Definujme při pevně zvoleném tečném vektoru t_ν vektor $\underset{0}{n^\nu}$ takto:*

$$\underset{0}{n^\nu} \equiv \frac{1}{h}\,\underset{0}{l^{ab}}\{B_c^\nu \underset{0}{l^{cd}}(\nabla_d t_\alpha \nabla_a B_b^\alpha + h_{ab} m_d) - \nabla_a B_b^\nu\} \,. \tag{2,20}$$

Potom vektor $\underset{0}{n^\nu}$ je řešením rovnic (2,2) a jeho směr je nezávislý na volbě faktoru tečného vektoru t_ν.

---

[21]) B_ν^a jsou definovány rovnicemi $B_\nu^a B_b^\nu = \delta_b^a$, $B_\nu^a = n^\nu = 0$.

[22]) Můžeme totiž psát $^*B_\nu^a$ jako lineární kombinaci veličin B_ν^a, t_ν, t. j. $^*B_\nu^a = B_\nu^c T_c^a + r^a t_\nu$ odkud se dá odvodit $T_c^a = \delta_c^a$, $r^a = 0$.

Důkaz: Dokážeme, že vektor $\underset{0}{n}{}^{\nu}$ vyhovuje rovnicím (2,2). Je především, vzhledem k (2), (4), (1,40)

$$\underset{0}{n}{}^{\nu}t_{\nu} = -\frac{1}{h}\underset{0}{l}{}^{ab}t_{\nu}\nabla_{a}B^{\nu}_{b} = \frac{1}{h}\underset{0}{l}{}^{ab}h_{ab} = 1\,;$$

tedy vztah $(2{,}2\mathrm{a})_{a}$ je splněn. Dále dostaneme z (2,20) s ohledem na vztahy (4) (1,44), (1,40), $(1{,}45)_{a}$

$$\underset{0}{n}{}^{\nu}\nabla_{a_j}t_{\nu} = \frac{1}{h}\underset{0}{l}{}^{ab}\{h_{ca_j}\underset{0}{l}{}^{cd}\nabla_{d}t_{\alpha}\nabla_{a}B^{\alpha}_{b} + h_{ca_j}\underset{0}{l}{}^{cd}h_{ab}m_{d} - \nabla_{a_j}t_{\nu}\nabla_{a}B^{\nu}_{b}\} =$$

$$= \frac{1}{h}\underset{0}{l}{}^{ab}\{\delta^{d}_{a_j}\nabla_{d}t_{\alpha}\nabla_{a}B^{\alpha}_{b} + \tilde{\delta}^{d}_{a_j}h_{ab}m_{d} - \nabla_{a_j}t_{\nu}\nabla_{a}B^{\nu}_{b}\} = \frac{1}{h}\underset{0}{l}{}^{ab}h_{ab}m_{a_j} = m_{a_j}$$

pro $j = n - h, \ldots, n - 1$. Je tedy též podmínka $(2{,}2)_{b}$ splněna. Podmínku $(2{,}2)_{c}$ si nemusíme již ověřovat, neboť, jak bylo na počátku tohoto paragrafu řečeno, jsou všechna řešení rovnic $(2{,}2)_{a,b}$ řešeními rovnic $(2{,}2)_{a,b,c}$ a obráceně. Tedy $\underset{0}{n}{}^{\nu}$ je řešením rovnic (2,2).

Vyjdeme-li nyní na místo od tečného vektoru t_{ν} od tečného vektoru $^{*}t_{\nu} = Pt_{\nu}$ $P \neq 0$), potom dostaneme z definičních rovnic (2,20), přihlédneme-li ke vztahům (1,39), (5), (3), (2,19), (4)

$$^{*}\underset{0}{n}{}^{\nu} \equiv \frac{1}{h}\,{}^{*}\underset{0}{l}{}^{ab}\{B^{\nu}_{c}\,{}^{*}\underset{0}{l}{}^{cd}(\nabla_{d}{}^{*}t_{\alpha}\nabla_{a}B^{\alpha}_{b} + {}^{*}h_{ab}{}^{*}m_{d}) - \nabla_{a}B^{\nu}_{b}\} =$$

$$= \frac{1}{h}Q\underset{0}{l}{}^{ab}\{B^{\nu}_{c}\underset{0}{l}{}^{cd}Q(\nabla_{d}Pt_{\alpha}\nabla_{a}B^{\alpha}_{b} + Ph_{ab}[m_{d} + P^{-1}\partial_{d}P]) - \nabla_{a}B^{\nu}_{b}\} =$$

$$= Q\left[\frac{1}{h}\underset{0}{l}{}^{ab}\{B^{\nu}_{c}\underset{0}{l}{}^{cd}(\nabla_{d}t_{\alpha}\nabla_{a}B^{\alpha}_{b} + h_{ab}m_{d}) - \nabla_{a}B^{\nu}_{b}\right] +$$

$$+ \frac{1}{h}Q^{2}\underset{0}{l}{}^{ab}\underset{0}{l}{}^{cd}B^{\nu}_{c}t_{\alpha}\nabla_{a}B^{\alpha}_{b}\,\partial_{d}P + \tfrac{1}{2}Q\underset{0}{l}{}^{ab}\underset{0}{l}{}^{cd}h_{ab}B^{\nu}_{c}P^{-1}\partial_{d}P =$$

$$= Qn^{\nu} - \frac{1}{h}Q\underset{0}{l}{}^{ab}\underset{0}{l}{}^{cd}B^{\nu}_{c}(-P^{-1}\partial_{d}P + P^{-1}\partial_{d}P) = Qn^{\nu}\,.$$

Odtud je zbývající tvrzení věty zřejmé.

Věta 12. *Konexe indukovaná vektorem $\underset{0}{n}{}^{\nu}$ v X_{n-1} o koeficientech*

$$\underset{0}{\Lambda}{}^{c}_{ab} \equiv \underset{0}{B}{}^{c}_{\nu}\nabla_{a}B^{\nu}_{b}\,, \tag{2,21}$$

kde elementy $\underset{0}{B}{}^{c}_{\nu}$ jsou definovány rovnicemi

$$\begin{aligned} &\underset{0}{B}{}^{a}_{\nu}B^{\nu}_{b} = \delta^{a}_{b}\,, \quad \left(\delta^{a}_{b} = \begin{cases} 1 \text{ pro } a = b \\ 0 \text{ pro } a \neq b \end{cases}\right)^{23)} \\ &\underset{0}{B}{}^{a}_{\nu}n^{\nu} = 0\,, \end{aligned} \tag{2,22}$$

je nezávislá na volbě faktoru tečného vektoru t_{ν}.

---

[23]) Veličiny $\underset{0}{B}{}^{a}_{\nu}$ jsou rovnicemi (2,22) definovány jednoznačně.

Důkaz: Podle věty 11 platí při volbě $^*t_\nu = Pt_\nu$ $(P \neq 0)$

$$^*\underset{0}{n}^\nu = Q\underset{0}{n}^\nu,\ Q \equiv P^{-1}. \qquad (2,23)$$

Zavedeme-li elementy $^*B^a_\nu$ jednoznačně definičními rovnicemi $^*B^a_\nu B^\nu_b = \delta^a_b$, $^*B^a_\nu {}^*n^\nu = 0$, potom si snadno ověříme vztah $^*B^a_\nu = B^a_\nu$.[24]) Odtud plyne pak ihned

$$^*\underset{0}{\Lambda}{}^c_{ab} \equiv {}^*\underset{0}{B}{}^c_\nu \nabla_a B^\nu_b = \underset{0}{B}{}^c_\nu \nabla_a B^\nu_b = \Lambda^c_{ab},$$

čímž je věta dokázána.

Poznámka 9. Větou 11 a 12 byla zodpověděna otázka jednoznačné definice afinnormálního vektoru o směru nezávislém na volbě faktoru tečného vektoru a konexe nezávislé na této volbě.

V dalším paragrafu obrátíme se k dosud opomíjenému případu, kdy pro tensor h_{ab} variety X_{n-1} v A_n platí v celém jejím definičním oboru $h_{ab} \equiv 0$.

§ 3. Případ totálně geodetických variet X_{n-1} v A_n

Existuje-li v daném afinním prostoru A_n $(n - 1)$-rozměrná variety X_{n-1}, pro niž platí

$$h_{ab} \equiv 0 \qquad (3,1)$$

v jejím definičním oboru, pak tuto varietu nazýváme *totálně geodetickou nadplochou* v A_n. V dalším budeme existenci takovéto nadplochy X_{n-1} v A_n předpokládat.

Za platnosti předpokladu (3,1) existuje v X_{n-1} vektor u_b tak, že platí (1,3), t. j.

$$\nabla_b t_\nu = u_b t_\nu,\ b = 1, \ldots, n-1 \qquad (3,2)$$

v každém uvažovaném bodě variety X_{n-1}.

Lemma 6. *Pro vektor u_b z* (1,3) *platí při transformaci* (3) *tečného vektoru t_ν,*

$$^*u_b = u_b + P^{-1}\,\partial_b P,\ b = 1, \ldots, n-1. \qquad (3,3)$$

Důkaz: Poněvadž vztah (3,2) je nezávislý na tom, jaké řešení t_ν rovnic $B^\nu_a t_\nu = 0$ si zvolíme (což plyne z toho, že hodnost tensoru h_{ab} je nezávislá na transformaci (3)), platí též

$$\nabla_b {}^*t_\nu = {}^*u_b {}^*t_\nu$$

a tedy, vzhledem k (3)

$$P\,\nabla_b t_\nu + t_\nu\,\partial_b P = {}^*u_b P t_\nu.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu za $\nabla_b t_\nu$ z (3,2), dostaneme po úpravě

$$(u_b + P\,\partial_b P^{-1} - {}^*u_b)\,t = 0,$$

což, vzhledem k tomu, že t_ν je nenulový vektor, vede ihned k (3,3).

Definujme nyní, při pevně zvoleném tečném vektoru t_ν, vektor n^ν rovnicemi

a) $\quad n^\nu t_\nu = 0,$

b) $\quad n^\nu \nabla_a t_\nu = u_a,\ a = 1, \ldots, n-1. \qquad (3,4)$

[24]) Viz poznámku [22]).

Z (3,2) plyne, že hodnost matice determinantu soustavy (3,4) a rozšířené matice soustavy (3,4) jsou stejné a to rovny jedné. Všechna řešení n^ν soustavy rovnic (3,4) dostaneme tedy řešením jediné rovnice, a to rovnice $(3{,}4)_{a,b}$.

Lemma 7. *Všechna řešení n^ν rovnic (3,4) jsou tvaru*

$$n^\nu = \underset{1}{n} + B^\nu_c s^c\,, \tag{3,5}$$

kde $\underset{1}{n}^\nu$ je jedním z řešení rovnic (3,4) a s^c je libovolný vektor v X_{n-1}.

Důkaz: Nechť $\underset{1}{n}^\nu$ je řešením rovnic (3,4) a n^ν jiné takové řešení rovnic (3,4). Pak existuje skalár a a vektor s^c tak, že

$$n^\nu = a\underset{1}{n}^\nu + B^\nu_c s^c\,.$$

Poněvadž vektor n^ν je rovněž řešením rovnice $(3{,}4)_a$, plyne odtud ihned $a = 1$. Tedy vektor n^ν je tvaru (3,5). Z (3,1), (3,4) plyne

$$n^\nu \nabla_a t_\nu = \underset{1}{n}^\nu \nabla_a t_\nu + B^\nu_c s^c \nabla_a t_\nu = u_b + s^c h_{ac} = u_b\,.$$

Tedy vztahy $(3{,}4)_b$ jsou splněny při každé volbě vektoru s^c v X_{n-1}.

Lemma 8. *Vyjdeme-li místo od tečného vektoru t_ν od tečného vektoru $^*t_\nu = Pt_\nu$, potom všechna řešení $^*n^\nu$ rovnic*

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad {}^*n^\nu\, {}^*t_\nu = 1\,,\\ &\text{b)} \quad {}^*n^\nu \nabla_a {}^*t_\nu = {}^*u_a \end{aligned} \tag{3,6}$$

jsou tvaru

$$^*n^\nu = Qn^\nu \quad (Q = P^{-1})\,, \tag{3,7}$$

kde n^ν jsou řešení rovnic (3,4).

Důkaz: Z $(3{,}6)_a$ plyne vzhledem k (3) ihned, že $^*n^\nu$ je tvaru (3,7). Rovnice $(3{,}6)_b$ jsou pak splněny.

Budiž nyní — při pevném tečném vektoru t_ν — $\underset{1}{n}^\nu$ libovolným řešením rovnice $(3{,}4)_a$ (tedy i rovnic $(3{,}4)_{a,b}$). Definujme veličiny $\underset{1}{B}^a_\nu$ známým způsobem

$$\underset{1}{B}^a_\nu B^\nu_b = \delta^a_b,\ \underset{1}{B}^a_\nu \underset{1}{n}^\nu = 0\,. \tag{3,8}$$

Tento systém rovnic má jednoznačné řešení pro veličiny $\underset{1}{B}^a_\nu$, jak tomu bylo v analogických případech z paragrafu 2. Definujme veličiny $\underset{1}{\Gamma}^a_{bc}$ způsobem známým z předchozího paragrafu

$$\underset{1}{\Gamma}^c_{ab} \equiv \underset{1}{B}^c_\nu \nabla_a B^\nu_b\,. \tag{3,9}$$

Tyto veličiny definují v X_{n-1} koeficienty určité konexe (jak tomu bylo v § 2 v analogických případech), konexe indukované vektorem $\underset{1}{n}^\nu$.

Platí nyní tato věta:

Věta 13. *Nechť existuje v daném afinním prostoru A_n $(n > 2)$ regulární* *nadplocha X_{n-1}, pro niž jest v každém bodě uvažovaného oboru $h_{ab} \equiv 0$. Budiž n^ν nějaké řešení rovnic* (3,4). *Potom konexe o koeficientech*

$$\underset{1}{\Lambda}{}^c_{ab} \equiv B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b\,, \tag{3,10}$$

kde veličiny B^c_ν jsou takto definovány

$$B^a_\nu B^\nu_b = \delta^a_b \quad \left(\delta^a_b = \begin{cases} 1 & \text{pro } a = b \\ 0 & \text{pro } a \neq b \end{cases}\right), \tag{3,11}$$
$$B^a_\nu n^\nu = 0\,,$$

je nezávislá na volbě řešení n^ν rovnic (3,4) *a na volbě faktoru tečného vektoru t_ν.*

Důkaz: Nechť $\underset{1}{n}{}^\nu$ je řešením rovnic (3,4) a $\underset{1}{B}{}^a_\nu$ veličiny definované v (3,8). Budiž n^ν jiné řešení rovnic (3,4) různé od $\underset{1}{n}{}^\nu$. Pak je, podle lemmatu 7,

$$n^\nu = \underset{1}{n}{}^\nu + B^\nu_c s^c, \quad s^c \neq 0\,. \tag{3,12}$$

K vektoru n^ν definujme veličiny B^a_ν rovnicemi (3,11). Vektor (kovariantní v A_n) B^a_ν můžeme psát jako lineární kombinaci vektorů $\underset{1}{B}{}^a_\nu$, t_ν $(a = 1, \ldots, n-1)$, t. j.

$$B^a_\nu = \underset{1}{B}{}^c_\nu T^a_c + r^a t_\nu\,.$$

Násobíme-li předchozí vztah vektorem B^ν_b dostaneme, vzhledem k (2), (3,11), (3,8)

$$\delta^a_b = T^a_c \delta^c_b \Rightarrow T^a_b = \delta^a_b\,;$$

tedy

$$B^a_\nu = \underset{1}{B}{}^a_\nu + r^a t_\nu\,.$$

Násobíme-li předchozí vztah vektorem n^ν, dostaneme vzhledem k (3,11), (3,12), (3,4), (3,8)

$$0 = \underset{1}{B}{}^a_\nu(\underset{1}{n}{}^\nu + B^\nu_c s^c) + r^a = s^a + r^a, \text{ t. j. } r^a = -s^a\,.$$

Tedy

$$B^a_\nu = \underset{1}{B}{}^a_\nu - s^a t_\nu\,. \tag{3,13}$$

Pro konexi indukovanou vektorem n^ν dostaneme na základě vztahů (3,13) (3,9), (4)

$$\Gamma^c_{ab} \equiv B^b_\nu \nabla_a B^\nu_b = (\underset{1}{B}{}^c_\nu - s^c t_\nu) \nabla_a B^\nu_b = \underset{1}{\Gamma}{}^c_{ab}\,. \tag{3,14}$$

Tedy konexe Γ^c_{ab} je nezávislá na volbě řešení n^ν rovnic (3,4).

Vyjdeme-li na místo od tečného vektoru t_ν od tečného vektoru $^*t_\nu = Pt_\nu$, potom všechna řešení rovnic (3,6) jsou tvaru (3,7) (podle lemmatu 8). Potom, podle předchozího, je konexe $^*\Gamma^c_{ab}$ indukovaná v X_{n-1} nezávislá na volbě řešení $^*n^\nu$ rovnic (3,6). Budiž tedy $^*n^\nu$ jedno z řešení rovnic (3,6). Definujeme veličiny $^*B^a_\nu$ známým způsobem.

$$^*B^a_\nu B^\nu_b = \delta^a_b, \quad ^*B^a_\nu\, ^*n^\nu = 0\,.$$

Podle (3,7) je $*n^\nu = Qn^\nu$, kde n^ν je řešením rovnic (3,4). Nechť při uvažovaném n^ν mají veličiny B^ν_a význam z (3,11). Snadno si ověříme, že mezi veličinami $*B^a_\nu$, B^a_ν platí vztah

$$*B^a_\nu = B^a_\nu .$$

Odtud plyne pak, vzhledem k (3,14)

$$*\Gamma^c_{ab} \equiv *B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b = B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b = \underset{1}{\Gamma^c_{ab}} .$$

Označíme-li $\Gamma^c_{ab} \equiv \underset{0}{\Lambda^c_{ab}}$, jsme s důkazem věty hotovi.

Poznámka 10. Podstatné pro náš případ je, že získaná konexe o koeficientech $\underset{0}{\Lambda^c_{ab}}$ je nezávislá na volbě faktoru tečného vektoru t_ν. Při její konstrukci je ta výhoda, že za afinnormální vektor variety X_{n-1} (pro niž platí $h_{ab} \equiv 0$) můžeme mít jakýkoliv vektor v bodech variety X_{n-1}, který v ní neleží.

Závěr

Neuvažujeme-li poměrně jednoduchý případ popsaný v § 3, t. j. případ totálně geodetické nadplochy a v afinním prostoru A_n, potom celou předchozí teorii lze ryze formálním způsobem zobecnit na případ, kdy hodnost h tensoru h_{ab} variety X_{n-1} v A_n jest rovna $n - 1$. Jde tedy o zobecnění na variety X_{n-1} v A_n, o nichž pojednává má dřívější práce: Le vecteur affinonormal et la connexion de l'hypersurface dans l'éspace affin, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. *75* (1950), str. 179—208.

Zde je na místě podotknouti toto: Velmi často se říká neuváženě těm případům variet X_{n-1} v A_n, pro něž je hodnost tensoru h_{ab} rovna $n - 1$, případy „obecné" variet X_{n-1}. Zde však teorie „speciálních případů" (kdy $1 \leq n < n - 1$), dá se ihned rozšířit i na případ $h = n - 1$, nikoliv obráceně.

Abychom doplnili teorii z § 2 i o případ $h = n - 1$, stačí uvážit, že v tomto případě je hodnost matice determinantu (1,1) rovna n.[25]) Systém rovnic

$$\begin{aligned} n^\nu t_\nu &= 1 \\ n^\nu \nabla_a t_\nu &= m_a, \quad a = 1, \ldots, n-1 \end{aligned} \qquad (*)$$

má pak, při daném vektoru m_a, jediné řešení n^ν. V případě $h = n - 1$ jsou všechny řádky determinantu z tensoru h_{ab} lineárně nezávislé a můžeme zde definovat tensor l^{ab} takto:

$$l^{ab} h_{bc} = \delta^a_c .^{26})$$

Je tedy v případě $h = n - 1$: $l^{ab} \equiv h^{ab}$, kde h^{ab} je kontragredientní tensor k tensoru h_{ab}. Veličiny M_a, definované v (1,46), přejdou pak přímo ve veličiny stejně symbolicky označené v dřívější práci.[27]) Definice $m_a = M_a$, v rovnici (*)

[25]) (I), str. 181, věta (1,1).
[26]) Viz (1,16).
[27]) (I), str. 192, $(4,5)_a$.

vede pak k jedinému řešení $\underset{0}{n}^{\nu}$ rovnic (*), kde $\underset{0}{n}^{\nu}$ je směru nezávislého na volbě faktoru tečného vektoru t_{ν}.[28]) Příslušný vektor $\underset{1}{n}^{\nu}$ je popsán rovnicemi (2,20), kde klademe $h = n - 1$, $l^{ab} \equiv \underset{0}{h}^{ab}$. Konexe indukovaná pak tímto vektorem $\underset{0}{n}^{\nu}$[29]) je pak tvaru (2,21).

Pro variety X_{n-1} v A_n uvažované v § 2 bylo by možno nalézt jiné invariantní afinnormální směry a konexe, tak jak to je provedeno ve shora citované práci pro případ $h = n - 1$. To je však už záležitost ryze formální.

To, že teorie probraná jak v této, tak i v dřívější práci (o afinnormálním směru a konexi) má pro afinní geometrii význam a není pouhou konstrukcí a formalismem, ukážeme na jednoduchých příkladech (a to na kvadrikách v obyčejném trojrozměrném afineuklidovském prostoru A_3) v II. části práce.

II. část

Tato část je věnována jednoduchým příkladům z afinní geometrie ploch v afineuklidovském trojrozměrném prostoru E_3, tedy v prostoru A_3 o koeficientech konexe vesměs rovných nule. Symboly x, y, z budou v dalším značit kartézské souřadnice bodů v uvažovaném prostoru. Příklady se týkají kvadrik — přesněji — afinní normály a jejího významu u nesingulárních kvadrik a afinní normály a afinnormální roviny u singulárních kvadrik. Podrobný výpočet zde nebude proveden, početní výsledky budou citovány a to v takovém pořadí, aby byla patrna metoda výpočtu.

Příklad 1. [1*]) Parametrickými rovnicemi

$$x = u \cos v, \ y = u \sin v, \ z = ku, \ k \neq 0\,, \tag{1,1}^*$$

kde $u \in (-\infty, \infty)$, $v \in \langle 0, 2\pi)$, je dán v E_3 kvadratický kužel ve speciální poloze. Položme $\eta^1 = u$, $\eta^2 = v$. Pro veličiny $B^{\alpha}_{a} \equiv \dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial \eta^{a}}$ dostaneme

$$\begin{aligned} B^1_1 &= \cos v,\ B^2_1 = \sin v,\ B^3_1 = k\,, \\ B^1_2 &= -u \sin v,\ B^2_2 = u \cos v,\ B^3_2 = 0\,. \end{aligned} \tag{1,2}^*$$

Pro tečný vektor t_{ν} variety (1,1)* dostaneme jako jedno z řešení rovnic (2)

$$t_1 = -ku \cos v,\ t_2 = -ku \sin v,\ t_3 = u\,. \tag{1,3}^*$$

Z (1,2)*, (1,3)* spočteme snadno podle (4) složky tensoru h_{ab}:

$$h_{11} = h_{12} = h_{21} = 0,\ h_{22} = -ku^2\,. \tag{1,4}^*$$

Vyloučíme-li hodnotu $u = 0$, která odpovídá vrcholu kužele (vrchol je v počátku systému souřadného), potom v každém bodě plochy (1,1)* je hodnost tensoru h_{ab} rovna jedné, jak plyne z (1,4)*. Tedy

$$h = 1 \ (u \neq 0)\,. \tag{1,5}^*$$

[28]) (I), str. 197, rovnice (5,4), (5,5).
[29]) (I), str. 197, rovnice (5,3).
[1*]) Tento prvý příklad bude proveden podrobněji s odvoláním na formule v části I.

Podle (1,32), (1,16) dostaneme pro tensor $\underset{0}{l}^{ab}$:

$$\underset{0}{l}^{11} = \underset{0}{l}^{12} = \underset{0}{l}^{21} = 0, \quad l^{22} = -\frac{1}{ku^2} \ (\text{pro } u \neq 0) \,. \tag{1,6)*}$$

Z definičních rovnic (2,20) plyne pro normální vektor n^ν na základě vztahů (1,4)*, (1,6)*, (1,5)*

$$\underset{0}{n}^\nu = \underset{0}{l}^{22} \{B^\nu_2 \underset{0}{l}^{22} (\partial_2 t_\alpha \, \partial_2 B^\alpha_b + h_{22} m_2) - \partial_2 B^\nu_2\} \,. \tag{1,7)*}$$

Pro m_2 dostaneme z definičních rovnic $(2,18)_a$, (1,52), $(1,49)_a$, $(1,49)_b$ s přihlédnutím k (1,4)*, (1,5)*, (1,6)*,

$$m_2 = M_2 = \frac{2}{3}\left(\begin{bmatrix} c \\ 2c \end{bmatrix} - L^c_{2c}\right) = \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2} \underset{0}{l}^{cd} \, \partial_2 h_{dc} - \underset{0}{l}^{cd} \, \partial_d t_\alpha \, \partial_2 B^\alpha_c) =$$

$$= \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2} l^{22} \, \partial_2 h_{22} - \underset{0}{l}^{22} \, \partial_2 t_\alpha \, \partial_2 B^\alpha_2) = \frac{2}{3} \frac{1}{ku^2} \partial_2 t_\alpha \, \partial_2 B^\alpha_2 \,,$$

a tedy, vzhledem k (1,2)*, (1,3)* (jak snadno spočteme)

$$m_2 = 0 \,.^{2*)} \tag{1,8)*}$$

Z (1,8)*, (1,6)* a z poznámky [2*)] plyne pro vektor $\underset{0}{n}^\nu$ v (1,7)*

$$\underset{0}{n}^\nu = \frac{1}{ku^2} \partial_2 B^\nu_2, \quad (u \neq 0) \,,$$

což rozepsáno dává podle (1,2)*

$$\underset{0}{n}^1 = -\frac{1}{ku} \cos v, \quad \underset{0}{n}^2 = -\frac{1}{ku} \sin v, \quad \underset{0}{n}^3 = 0 \quad (u \neq 0) \,. \tag{1,9)*}$$

Jsou tedy rovnice (parametrické) hledané afinní normály variety (1,1)* bodě $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$, $\underset{0}{u} \neq 0$,

$$X = \underset{0}{u} \cos \underset{0}{v} - \tau \frac{1}{k\underset{0}{u}} \cos \underset{0}{v}, \quad Y = \underset{0}{u} \sin \underset{0}{v} - \tau \frac{1}{k\underset{0}{u}} \sin \underset{0}{v}, \quad Z = k\underset{0}{u} \,,$$

kde τ je parametr.

Zavedeme-li místo parametru τ parametr $t = -\tau \dfrac{1}{k\underset{0}{u}^2}$, pak parametrické vyjádření afinní normály je

$$X = \underset{0}{u} \cos \underset{0}{v}(1 + t), \quad Y = \underset{0}{u} \sin \underset{0}{v}(1 + t), \quad Z = k\underset{0}{u} \,, \tag{1,10)*}$$

kde X, Y, Z, jsou běžné body afinní normály. Všimněme si, že pro $t = -1$ je $X = 0$, $Y = 0$, $Z = k\underset{0}{u}$. Tedy afinní normály v bodech variety (1,1)* (s výjimkou bodu [0, 0, 0], jenž je vrcholem kužele a kde není normála definována) protínají osu z souřadnicového systému. Osa z je zřejmě osou kužele.

[2*)] Je totiž pro naši varietu $\partial_b t_\alpha \, \partial_b B^\alpha_\nu = 0$.

Pro asymptotický směr v bodě (u, v), $u \neq 0$, t. j. směr vyhovující vztahu $h_{ab} \,.\, v^b = 0$ v bodě (u, v), dostaneme (bez ohledu na multiplikační faktor) $v^1 = 1$, $v^2 = 0$, a tedy pro jeho složky v E_3 plyne podle (1,2)*

$$v^{\nu} \, [\cos v, \ \sin v, \ k] \, . \qquad (1{,}11)^*$$

Je tedy v^{ν} nezávislý na u. Parametrické čáry $v =$ konst jsou čarami asymptotickými. Jsou to povrchové přímky kužele. Invariantní afinnormální bivektor z věty 9 a definice 1, representovaný vektory v^{ν}, $\underset{0}{n}^{\nu}$, vede v našem případě k rovině invariantního směru,[3*)] jejíž rovnice v bodě $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$, $\underset{0}{u} \neq 0$, jest:

$$\begin{vmatrix} X - \underset{0}{x}, & Y - y_0, & Z - z_0 \\ (v^1)_0, & (v^2)_0, & (v^3)_0 \\ (\underset{0}{n}^1)_0, & (\underset{0}{n}^2)_0, & (\underset{0}{n}^3)_0 \end{vmatrix} = 0 \, , \qquad (\mathrm{A})$$

kde $\underset{0}{x}, y_0, z_0$ je bodem variety (1,1)* pro hodnoty $\underset{0}{u}, \underset{0}{v}$. Dosazení do předchozí rovnice z (1,1)*, (1,9)*, (1,11)* dává po úpravě rovnici

$$X \sin \underset{0}{v} - Y \cos \underset{0}{v} = 0 \, , \qquad (1{,}12)^*$$

což je rovnice průměrové roviny kvadratického kužele (1,1)* v bodě $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$. Při proměnném $\underset{0}{v}$ dostáváme jednoparametrický svazek průměrových rovin s osou splývající s osou z souřadnicového systému. Poznamenejme ještě, že geometrický význam afinního normálního vektoru $\underset{0}{n}^{\nu}$ a invariantního afinnormálního bivektoru shora popsaný pro varietu (1,1)*, tedy pro kvadratický kužel, zůstává, ať má tento kužel v E_3 jakoukoli polohu. Přesněji řečeno, my jsme uvažovali kužel ve speciální poloze v E_3. Avšak ten fakt, že afinní normály o směru $\underset{0}{n}^{\nu}$ procházejí osou kužele a že afinnormální bivektor vede k průměrovým rovinám kužele, je nezávislý na regulární afinní transformaci souřadnic v E_3,

$$\bar{x}^{\alpha} = A^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} + D^{\alpha}, \ \textit{determinant} \ [A^{\alpha}_{\beta}] \neq 0 \, ,$$

kde A^{α}_{β}, D^{α}, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ jsou konstanty.

U dalších dvou příkladů citujeme pouze výsledky bez odvolání na formule z části I, do nichž dosazujeme. Budeme uvažovat opět speciální polohy v E_3. Je samozřejmé, že příslušné geometrické interpretace afinní normály a invariantního afinnormálního bivektoru jsou nezávislé na shora zmíněné afinní grupě transformací v E_3.

Příklad 2. Parametrickými rovnicemi

$$x = a \cos u, \ y = b \sin u, \ z = v, \quad \begin{matrix} u \in \langle 0, 2\pi) \, , \\ v \in (-\infty, \infty) \, , \end{matrix} \qquad (2{,}1)^*$$

[3*)] T. j. nezávislý na volbě faktoru tečného vektoru t_v.

kde $a > 0$, $b > 0$, jsou konstanty, je dán v E_3 eliptický válec ve speciální poloze. Pro tuto varietu dostaneme (nehledíme-li k faktoru)

$$h_{11} = ab,\ h_{12} = h_{21} = h_{22} = 0\,. \tag{2,2)*}$$

Tedy ve všech bodech plochy je hodnost tensoru h_{ab} rovna jedné. Pro složky afinnormálního vektoru $\underset{0}{n}^\nu$ v běžném bodě (u, v) variety (2,1)* spočteme

$$\underset{0}{n}^1 = \frac{1}{b}\cos u,\ \underset{0}{n}^2 = \frac{1}{a}\sin u,\ \underset{0}{n}^3 = 0\,. \tag{2,3)*}$$

Rovnicí afinní normály o směru $\underset{0}{n}^\nu$ můžeme dát v bodě $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$ variety (2,1)* tvar

$$\begin{aligned} X &= a\cos \underset{0}{u}(1 + t)\,,\\ Y &= b\sin \underset{0}{u}(1 + t)\,,\quad t \in (-\infty, \infty)\,.\\ Z &= \underset{0}{v}\,. \end{aligned} \tag{2,4)*}$$

Z rovnic (2,4)* je zřejmé, že afinní normála o směru $\underset{0}{n}^\nu$ prochází osou z souřadnicového systému, jež je osou daného eliptického válce. Vektor v^ν o složkách

$$v^\nu[0, 0, 1] \tag{2,5)*}$$

udává asymptotický směr v každém bodě variety (2,1)*. Invariantní afinnormální bivektor representovaný vektory v^ν, $\underset{0}{n}^\nu$ v každém bodě variety (2,1)* představuje v bodě $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$ rovinu o rovnici (A) z příkladu 1, která po rozepsání a úpravě se dá vzhledem k (2,1)*, (2,4)*, (2,5)* přepsat na tvar

$$Xb\sin \underset{0}{u} - Ya\cos \underset{0}{u} = 0\,, \tag{2,6)*}$$

kde X, Y, Z jsou běžné souřadnice bodů této roviny v E_3. Jako v příkladě 1, značí rovnice (2,6)* při proměnném $\underset{0}{u}$ svazek rovin s osou splývající s osou válce. Je to svazek průměrových rovin válce.

Příklad 3. Parametrickými rovnicemi

$$x = a\cosh u,\ y = b\sinh u,\ z = v,\ u, v \in (-\infty, \infty)\,, \tag{3,1)*}$$

kde $a > 0$, $b > 0$ jsou konstanty, je dán v E_3 hyperbolický válec ve speciální poloze. Pro složky tensoru h_{ab} spočteme

$$h_{11} = -ab,\ h_{12} = h_{21} = h_{22} = 0\,. \tag{3,2)*}$$

Je tedy v bodech dané variety hodnost tensoru h_{ab} rovna jedné.

Pro složky vektoru $\underset{0}{n}^\nu$ v běžném bodě (u, v) spočteme

$$\underset{0}{n}^1 = \frac{1}{b}\cosh u,\ \underset{0}{n}^2 = \frac{1}{a}\sinh u,\ \underset{0}{n}^3 = 0\,. \tag{3,3)*}$$

Parametricky můžeme afinní normálu o směru $\underset{0}{n}^\nu$ v bodě $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$ variety (3,1)* popsat rovnicemi tvaru

$$\begin{aligned} X &= a \cosh \underset{0}{u}(1 + t) , \\ Y &= b \sinh \underset{0}{u}(1 + t), \ t \in (-\infty, \infty) . \\ Z &= \underset{0}{v} . \end{aligned} \tag{3,4}^*$$

Z těchto rovnic je zřejmé, že afinní normála (3,4)* prochází osou z souřadného systému, jež je osou daného válce. Podobně jako v příkladě 2, vektor v^ν o složkách $v^1 = 0$, $v^2 = 0$, $v^3 = 1$ leží v asymptotickém směru v každém bodě dané variety. Invariantní afinnormální bivektor representovaný vektory $\underset{0}{n}^\nu$, v^ν vede k rovině, která má v bodě $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$ rovnici

$$Xb \sinh \underset{0}{u} - Ya \cosh \underset{0}{v} = 0 , \tag{3,5}^*$$

analogickou rovnici (2,6)*. Tato rovina prochází osou válce. Je to jeho průměrová rovina. Při proměnném $\underset{0}{u}$ představuje rovnice (3,5)* svazek průměrových rovin daného hyperbolického válce s osou v ose válce.

Příklad 4. Parametrickými rovnicemi

$$x = u, \ y = u^2, \ z = v, \ u, v \in (-\infty, \infty) \tag{4,1}^*$$

je dán v E_3 parabolický válec ve speciální poloze. Tensor h_{ab} má v tomto případě složky (až na multiplikační faktor)

$$h_{11} = 2, \ h_{12} = h_{21} = h_{22} = 0 . \tag{4,2}^*$$

Hodnost tensoru h_{ab} je tedy jedna ve všech bodech variety. V našem případě dostaneme pro směr $\underset{0}{n}^\nu$:

$$\underset{0}{n}^1 = 0, \ \underset{0}{n}^2 = -1, \ \underset{0}{n}^3 = 0 . \tag{4,3}^*$$

Souřadnice afinní normály o směru $\underset{0}{n}^\nu$ jsou v bodě $\underset{0}{u}, \underset{0}{v}$ variety (4,1)*

$$\begin{aligned} X &= \underset{0}{u} , \\ Y &= \underset{0}{u}^2 - t, \ t \in (-\infty, \infty) . \\ Z &= \underset{0}{v} , \end{aligned} \tag{4,4}^*$$

což je rovnice přímky jdoucí $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$ dané variety a rovnoběžné s osou y.

Asymptotický směr variety (4,1)* je jako v předchozím případě udáván vektorem v^ν o složkách 0, 0, 1 v každém bodě dané plochy. Invariantní afinnormální bivektor representovaný vektory $\underset{0}{n}^\nu$, v^ν, vede v bodě $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$ plochy (4,1)* k rovině, popsané rovnicí

$$X = \underset{0}{u} . \tag{4,5}^*$$

Při proměnném $\underset{0}{u}$ představuje rovnice (4,5)* svazek rovin rovnoběžných s rovinou yz. Jsou to průměrové roviny parabolického válce.

Výsledky z příkladů 1—4 s přihlédnutím k poznámkám o regulární afinní transformaci souřadnic v E_3 (v příkladě 1) můžeme shrnout takto:

1°. *Geometrický význam invariantního afinnormálního bivektoru*[4*]) *pro singulární (reálné) kvadriky je ten, že rovina jdoucí bodem kvadriky a obsahující uvažovaný bivektor v tomto bodě jest průměrovou rovinou příslušné singulární kvadriky.*[5*])

Poznámka. Další příklady budou se zabývat geometrickým významem afinnormálního vektoru $\underset{0}{n^\nu}$ (a tedy příslušné afinní normály) pro nesingulární (reálné) kvadriky v E_3. Následující příklad 5 bude proveden poněkud podrobněji s odvoláním na výsledky a formule z části I a z dřívějšího článku, citovaného na str. 102 a v poznámkách pod znakem (I). Vzhledem k tomu, co bylo řečeno v závěru první části, lze též přímo aplikovat výsledky a formule z I. části.

Příklad 5. Elipsoid v E_3 je dán parametrickými rovnicemi

$$X = a \sin \vartheta \cos \varphi,\ y = b \sin \vartheta \sin \varphi,\ z = c \cos \vartheta,\ \begin{matrix} \varphi \in \langle 0, 2\pi), \\ \vartheta \in \langle 0, \pi\rangle . \end{matrix} \tag{5,1*}$$

Pro plochu (5,1)* jest (položíme-li $\eta^1 = \vartheta$, $\eta^2 = \varphi$)

$$\begin{aligned} B_1^1 &= a \cos \vartheta \cos \varphi,\ B_1^2 = b \cos \vartheta \sin \varphi,\ B_1^3 = -c \sin \vartheta , \\ B_2^1 &= -a \sin \vartheta \sin \varphi,\ B_2^2 = b \sin \vartheta \cos \varphi,\ B_2^3 = 0 . \end{aligned} \tag{5,2*}$$

Vektor t_ν o složkách

$$t_1 = bc \sin^2 \vartheta \cos \varphi,\ t_2 = ac \sin^2 \vartheta \sin \varphi,\ t_3 = ab \cos \vartheta \sin \vartheta \tag{5,3*}$$

jest tečným vektorem variety (5,1)*. Pro složky tensoru h_{ab} při hoření volbě tečného vektoru t_ν vychází

$$\begin{gathered} h_{11} \equiv -t_\alpha\, \partial_1 B_1^\alpha = abc \sin \vartheta,\ h_{12} = h_{21} \equiv -t_\alpha\, \partial_1 B_2^\alpha = 0 , \\ h_{22} = abc \sin^3 \vartheta . \end{gathered} \tag{5,4*}$$

Pro determinant tensoru h_{ab} spočteme na základě předchozího: $h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = a^2b^2c^2 \sin^4 \vartheta$. Jestliže z definičního oboru naší variety vyloučíme body, pro které je $\vartheta = 0, \pi$, potom v ostatních bodech plochy (5,1)* je hodnost tensoru h_{ab} rovna dvěma. Pro tensor h^{ab} kontragredientní k tensoru h_{ab} vyjde

$$h^{11} = \frac{1}{h_{11}} = \frac{1}{abc \sin \vartheta},\ h^{12} = h^{21} = 0,\ h^{22} = \frac{1}{h_{22}} = \frac{1}{abc \sin^3 \vartheta} , \tag{5,5*}$$

při čemž zde a v dalším vylučujeme případ $\vartheta = 0, \pi$. Definujeme afinnormální

[4*]) Zavedeného definicí 1 v části I. práce.

[5*]) Průměrovou rovinou rozumíme rovinu jdoucí asymptotickou přímkou a osou singulární kvadriky (jde-li o kužel resp. o eliptický nebo hyperbolický válec), v případě parabolického válce pokládejme rovinu definovanou uvažovaným bivektorem, za definici průměrové roviny.

vektor $\underset{0}{n}^\nu$ tak jako dříve rovnicemi (2,20), kde místo tensoru $\underset{0}{l}^{ab}$ píšeme h^{ab} a místo m_a rovnou M_a;[6*])

$$\underset{0}{n}^\nu = \tfrac{1}{2}h^{ab}\{B^\nu_c h^{cd}(\partial_d t_\alpha\, \partial_a B^\alpha_b + h_{ab}M_d) - \partial_a B^\nu_b\}\ .^{7*)} \tag{5,6}*$$

Pro vektor M_d v (5,6) je podle (1,52), $(1,49)_{ab}$

$$M_d = \tfrac{2}{4}\,[\tfrac{1}{2}h^{ab}\,\partial_d h_{ab} - h^{ab}\,\partial_d t_\nu\,\partial_a B^\nu_b]\ .^{8*)} \tag{5,7}*$$

Z (5,7)* spočteme podle (5,2)*, (5,3)*, (5,4)*, (5,5)*

$$M_1 = \operatorname{cotg}\vartheta,\ M_2 = 0\ . \tag{5,8}*$$

Nyní bychom mohli přímým dosazováním spočtených veličin spočítat vektor $\underset{0}{n}^\nu$ podle (5,6)*. Tato cesta je však poněkud zdlouhavá. Zde se vyplácí řešit přímo systém rovnic (*) v závěru I. části práce,[9*]) t. j. řešit rovnice

$$\underset{0}{n}^\nu t_\nu = 1\ ,$$

$$\underset{0}{n}^\nu\,\partial_a t_\nu = M_a,\ a = 1, 2\ ,$$

jichž je vektor $\underset{0}{n}^\nu$ v (5,6)* jednoznačným řešením. Řešením těchto rovnic nebo přímým výpočtem podle (5,6)* dostaneme v běžném bodě (ϑ, φ) variety (5,1)* $(\vartheta \neq 0, \pi)$

$$\underset{0}{n}^1 = \frac{1}{bc}\cos\varphi,\ \underset{0}{n}^2 = \frac{1}{ac}\sin\varphi,\ \underset{0}{n}^3 = \frac{1}{ab}\operatorname{cotg}\vartheta\ . \tag{5,9}*$$

V bodě $(\underset{0}{\vartheta}, \underset{0}{\varphi})$, $\underset{0}{\vartheta} \neq 0$ můžeme tedy afinní normálu o směru $\underset{0}{n}^\nu$ v tomto bodě popsat parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} X &= a\sin\underset{0}{\vartheta}\cos\underset{0}{\varphi} + \tau\frac{1}{bc}\cos\underset{0}{\varphi}\ , \\ Y &= b\sin\underset{0}{\vartheta}\sin\underset{0}{\varphi} + \tau\frac{1}{ac}\sin\underset{0}{\varphi},\quad \tau \in (-\infty, \infty)\ . \\ Z &= c\cos\underset{0}{\tau} + \tau\frac{1}{ab}\operatorname{cotg}\underset{0}{\tau}\ . \end{aligned} \tag{5,10}*$_a$$

Zavedeme-li místo parametru τ parametr t vztahem

$$t = 1 + \frac{\tau}{abc\sin\underset{0}{\vartheta}}$$

[6*]) Viz závěr části I a definiční rovnice (1,16), (2,18)-.
[7*]) (I), str. 197, (5,5), (5,3) a str. 185, (2,14).
[8*]) (I), str. 192, (4,1), (4,3), (4,5).
[9*]) (I), str. 197, (5,4), (5,5).

dostaneme, vyjádříme-li z předchozího vztahu τ a dosadíme do $(5,10)_a$

$$\begin{aligned} X &= a \sin \underset{0}{\vartheta} \cos \underset{0}{\varphi}\, t\,, \\ Y &= b \sin \underset{0}{\vartheta} \sin \underset{0}{\varphi}\, t\,,\quad t \in (-\infty, \infty)\,. \\ Z &= c \cos \underset{0}{\vartheta}\,, \end{aligned} \tag{5,10)$_b$ ($$

což jsou rovnice hledané afinní normály v bodě $(\underset{0}{\vartheta}, \underset{0}{\varphi})$. Vztahy $(5,10)^*_b$ mají smysl též pro $\underset{0}{\vartheta} = 0, \pi$. Porovnáním $(5,1)^*$, $(5,10)^*$ zjistíme ihned, že afinní normála prochází počátkem systému souřadnicového (t. j. středem daného elipsoidu) a je tedy v uvažovaném bodě jeho průměrem. Náš elipsoid měl speciální polohu v souřadnicovém systému. Avšak ten fakt, že námi definovaná afinní normála o směru $\underset{0}{n}^\nu$ prochází středem elipsoidu, platí pro každý elipsoid v každé poloze v E_3. Je to poznatek nezávislý na lineární regulární transformaci afinní v E_3. O tom je možné snadno se přesvědčit.

Příklad 6.

Parametrickými rovnicemi

$$x = a \cosh \vartheta \cos \varphi,\; y = b \cosh \vartheta \sin \varphi,\; z = c \sinh \vartheta\,, \tag{6,1)* ($$

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi),\; \vartheta \in (-\infty, \infty) \tag{6,1)* ($$

je popsán v E_3 hyperboloid jednodílný.[10*] Pro složky tensoru h_{ab} vychází (až na faktor)

$$h_{11} = abc \cosh \vartheta,\; h_{12} = h_{21} = 0,\; h_{22} = -abc \cosh^3 \vartheta\,. \tag{6,2)* ($$

Pro determinant z tensoru h_{ab} dostaneme $h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = -a^2b^2c^2 \cosh^4 \vartheta$. Je tedy uvažovaný determinant v každém bodě dané variety záporný a je tedy jeho hodnost rovna dvěma. Pro složky afinnormálního vektoru definovaného v $(5,6)^*$ se dostane

$$\underset{0}{n}^1 = -\frac{1}{bc} \cos \varphi,\; \underset{0}{n}^2 = -\frac{1}{ac} \sin \varphi,\; \underset{0}{n}^3 = -\frac{1}{ab} \operatorname{tgh} \vartheta\,. \tag{6,3)* ($$

V bodě $(\underset{0}{\vartheta}, \underset{0}{\varphi})$ dané variety jsou tedy parametrické rovnice afinní normály o směru $\underset{0}{n}^\nu$:

$$\begin{aligned} X &= a \cosh \underset{0}{\vartheta} \cos \underset{0}{\varphi} - \tau \frac{1}{bc} \cos \underset{0}{\varphi}\,, \\ Y &= b \cosh \underset{0}{\vartheta} \sin \underset{0}{\varphi} - \tau \frac{1}{ac} \sin \underset{0}{\varphi}\,,\quad \tau \in (-\infty, \infty)\,. \\ Z &= c \sinh \underset{0}{\vartheta} - \tau \frac{1}{ab} \operatorname{tgh} \underset{0}{\vartheta}\,. \end{aligned} \tag{6,4a)* ($$

[10*]) Je totiž $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Zavedeme-li nový parametr t vztahem

$$t = \frac{\tau}{abc \cosh \underset{0}{\vartheta}} - 1$$

potom rovnice (6,4)* lze přepsat na tvar

$$\begin{aligned} X &= -a \cosh \underset{0}{\vartheta} \cos \underset{0}{\varphi} \,.\, t\,, \\ Y &= -b \cosh \underset{0}{\vartheta} \sin \underset{0}{\varphi} \,.\, t\,,\quad t \in (-\infty, \infty)\,. \\ Z &= -c \sinh \underset{0}{\vartheta} t\,. \end{aligned} \tag{6,4$^*_b$}$$

Z rovnic $(6,4)^*_b$ je ihned zřejmé, že afinní normály o směru $\underset{0}{n}^\nu$ procházejí počátkem systému souřadnicového, který je středem jednodílného hyperboloidu (podobně jako tomu bylo pro elipsoid v příkladě pátém).

Příklad 7. Plocha v E_3 daná parametrickými rovnicemi

$$x = a \sinh \vartheta \cos \varphi,\ y = b \sinh \vartheta \sin \varphi,\ z = c \cosh \vartheta\,, \qquad \vartheta \in (-\infty, \infty),\ \varphi \in \langle 0, 2\pi) \tag{7,1*}$$

kde a, b, c jsou nezáporné konstanty, jest dvojdílným hyperboloidem ve speciální poloze.[11*]) Pro takto danou varietu spočteme

$$h_{11} = -abc \sinh \vartheta,\ h_{12} = h_{21} = 0,\ h_{22} = -abc \sinh^3 \vartheta \tag{7,2*}$$

a tedy

$$h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = a^2b^2c^2 \sin h^4\vartheta > 0 \text{ pro } \vartheta \neq 0\,.$$

Vyloučíme-li případ $\vartheta = 0$, potom k tensoru h_{ab} můžeme definovat kontragredientní tensor h^{ab}, pro jehož složky vypočteme

$$h^{11} = -\frac{1}{abc \sinh \vartheta},\quad h^{22} = -\frac{1}{abc \sinh^3 \vartheta},\quad h^{12} = h^{21} = 0\,.$$

Spočteme-li afinnormální vektor $\underset{0}{n}^\nu$, definovaný v (5,6)*, máme v bodě $(\underset{0}{\vartheta}, \underset{0}{\varphi})$ $\underset{0}{\vartheta} \neq 0$,

$$\underset{0}{n}^1 = \frac{1}{bc} \cos \underset{0}{\varphi},\quad \underset{0}{n}^2 = \frac{1}{ac} \sin \underset{0}{\varphi},\quad \underset{0}{n}^3 = \frac{1}{ab} \operatorname{cotgh} \underset{0}{\vartheta}\,. \tag{7,3*}$$

Pro afinní normálu v uvažovaném bodě $(\underset{0}{\vartheta}, \underset{0}{\varphi})$ dostaneme analogickým způsobem jako v příkladech předchozích parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} X &= a \sinh \underset{0}{\vartheta} \cos \underset{0}{\varphi} \,.\, t\,, \\ Y &= b \sinh \underset{0}{\vartheta} \sin \underset{0}{\varphi} \,.\, t\,,\quad t \in (-\infty, \infty)\,. \\ Z &= c \cosh \underset{0}{\vartheta} \,.\, t\,, \end{aligned} \tag{7,4*}$$

Rovnicemi (7,4)* je definována afinní normála též ve vyloučeném dříve případě $\underset{0}{\vartheta} = 0$. Z rovnic (7,4)* je současně patrné, že při všech hodnotách $\underset{0}{\vartheta}, \underset{0}{\varphi}$ pro-

[11*]) Je totiž $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.

chází afinní normála počátkem souřadnic, což je střed dvojdílného hyperboloidu; je tedy námi definovaná afinní normála, právě tak jako v předchozích dvou případech, průměrem uvažované kvadriky.

Na základě výsledků z příkladů 5, 6, 7 můžeme vyslovit toto tvrzení:[12*])

2°. *Pro nesingulární (reálné) středové kvadriky má afinní normála o směru* $\underset{0}{n}^\nu$, *definovaném v* (5,6)*, *ten geometrický význam, že v uvažovaném bodě obsahuje průměr kvadriky v tomto bodě, nebo, což je totéž, prochází středem kvadriky.*

Příklad 8. Parametrickými rovnicemi

$$x = u,\ y = v,\ z = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{p} + \varepsilon\frac{v^2}{q}\right),\ \varepsilon = \pm 1,\ p > 0,\ q > 0 \qquad (8,1)^*$$

(p, q jsou konstanty), je popsán v E_3 paraboloid a to eliptický, je-li $\varepsilon > 0$, hyperbolický, je-li $\varepsilon > 0$. Pro složky tensoru h_{ab} vyjde

$$h_{11} = -\frac{1}{p},\ h_{12} = h_{21} = 0,\ h_{22} = -\frac{\varepsilon}{q} \qquad (8,2)^*$$

a tedy pro determinant z tensoru h_{ab}:

$$h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = \frac{\varepsilon}{pq} \neq 0\,.$$

Tedy hodnost tensoru h_{ab} je dvě v každém bodě plochy. Pro vektor $\underset{0}{n}^\nu$ dostaneme

$$\underset{0}{n}^1 = 0,\ \underset{0}{n}^2 = 0,\ \underset{0}{n}^3 = 1\,.$$

Pro parametrické vyjádření afinní normály o směru $\underset{0}{n}^\nu$ dostaneme v bodě $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$ plochy (8,1)*

$$X = \underset{0}{u},\ Y = \underset{0}{v},\ Z = \frac{1}{2}\left(\frac{\underset{0}{u}^2}{p} + \varepsilon\frac{\underset{0}{v}^2}{q}\right) + t,\ t \in (-\infty, \infty)$$

Tvoří tedy afinní normály o směru $\underset{0}{n}^\nu$ v případě plochy typu (8,1)* svazek přímek rovnoběžných s osou z souřadného systému. Máme tak výsledek:

3°. *Pro nesingulární nestředové kvadriky tvoří afinní normály o směru* $\underset{0}{n}^\nu$ *svazek rovnoběžných přímek, které odpovídají průměrům těchto kvadrik, tak jak se o nich pojednává v metrice.*

Závěrečná poznámka. Jak již bylo shora řečeno, mají tvrzení 1°, 1°, 3° platnost při libovolné poloze příslušných variet v E_3. To se dokáže velmi snadno, vyjdeme-li od grupy afinních lineárních transformací v E_3. To by však přesahovalo rámec této práce. Předchozí příklady byly pouze ukázkou a jednoduchou aplikací na dřívější theorii. Z příkladů samotných je zřejmé, že pojmy jako osa singulárních kvadrik průměrová rovina, průměr a střed regulárních kvadrik jsou pojmy afinní. Rovněž je zřejmé, že je možno vybudovat shora naznačeným způsobem obecnou afinní teorii kvadrik a jejich afinní klasifikaci.

[12*]) Z uvedených tří příkladů není jasné, že platí pro jakoukoli polohu těchto typů kvadrik v E_3. Platnost se však dá snadno dokázat.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 79 (1954)

JEDNA METHODA VYŠETŘOVÁNÍ MONOTONIE POSLOUPNOSTÍ

ZBYNĚK ŠIDÁK, Praha.

(Došlo dne 12. srpna 1953.) DT:517.1

V tomto článku zavádím pojem konvexní a zobecněný pojem k-konvexní posloupnosti. Pokud je mi známo, v učebnicích se tyto pojmy nevyskytují, ačkoliv je jich někdy možno výhodně použít pro vyšetřování posloupností. Obsah článku jest ovšem zcela elementární, proto uvádím jen několik nejdůležitějších vět a důkazy provádím stručně; šlo mi v podstatě pouze o to, upozornit na tuto methodu. (V celém článku jde ovšem o posloupnosti reálných čísel). Výklad doprovázím několika příklady.

Definice 1. *Posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ nazveme konvexní, jestliže platí $a_n < \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ pro $n = 2, 3, \ldots$*

Zřejmě existuje-li ryze konvexní funkce $f(x)$ taková, že $f(n) = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, pak posloupnost a_n je konvexní. Pojmu konvexní posloupnosti lze však někdy použít i tehdy, když vyšetřování monotonie pomocí derivací funkce $f(x)$ selže. Zvláště výhodné je v tom případě, když sečtením $a_{n-1} + a_{n+1}$ dostaneme jednoduchý výraz.

Věta 1. *Je-li posloupnost a_n konvexní, číslo $c_1 > 0$, c libovolné, pak jsou konvexní též posloupnosti $c_1 a_n + c$, $a_n + cn$, $a_n - cn$.*

Věta 2. *Je-li posloupnost a_n konvexní a její členy nezáporné, pak též posloupnost a_n^2 je konvexní.*

Věta 3. *Jsou-li posloupnosti a_n, b_n konvexní, pak též $a_n + b_n$ je posloupnost konvexní.*

O platnosti těchto vět se přesvědčíme prostým rozepsáním nerovností podle definice 1.

Věta 4. *Je-li posloupnost a_n konvexní neklesající, pak též posloupnost na_n je konvexní.*

Neboť $2na_n < na_{n-1} + na_{n+1} = (n - 1)a_{n-1} + (n + 1)a_{n+1} + a_{n-1} - a_{n+1} \leqq (n - 1)a_{n-1} + (n + 1)a_{n+1}$.

Věta 5. *Je-li posloupnost a_n konvexní, $\frac{a_n}{n}$ nerostoucí, pak $\frac{a_n}{n}$ je konvexní.*

Kdyby totiž pro nějaké N bylo $2\frac{a_N}{N} \geqq \frac{a_{N-1}}{N-1} + \frac{a_{N+1}}{N+1}$, bylo by $2a_N \geqq$ $\geqq \frac{N}{N-1}a_{N-1} + \frac{N}{N+1}a_{N+1} = a_{N-1} + a_{N+1} + \frac{a_{N-1}}{N-1} - \frac{a_{N+1}}{N+1} \geqq a_{N-1} +$ $+ a_{N+1}$, což je spor.

A nyní odvodíme nejdůležitější věty o konvexních posloupnostech.

Věta 6. *Je-li posloupnost a_n konvexní, pak nastane jeden z těchto tří případů:*

a) *a_n je klesající,*

b) *a_n je rostoucí,*

c) *existuje N tak, že konečná posloupnost $a_1, a_2, \ldots a_N$ je klesající, posloupnost $a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ je rostoucí.*

Důkaz: Jestliže pro všechna $n \geqq 1$ jest $a_{n+1} - a_n < 0$, nastává zřejmě případ a). Jestliže však existuje n tak, že $a_{n+1} - a_n \geqq 0$, vezmeme si první takový index a označíme jej N.

1. Nechť $N = 1$, t. j. $a_2 \geqq a_1$. Z této nerovnosti již snadno úplnou indukcí (s využitím předpokladu konvexity) plyne $a_{n+1} > a_n$ (pro $n = 2,3, \ldots$), tedy nastává případ b) nebo c).

2. Nechť $N > 1$. Pak na posloupnost $a_N, a_{N+1}, \ldots$ použijeme tvrzení sub 1. a zřejmě je tedy splněn případ c).

Korolár 1. *Je-li posloupnost a_n konvexní a z ní vybraná posloupnost klesající, pak a_n je klesající.*

To je zřejmé. Dále pak je též zřejmé, že každá konvexní posloupnost má limitu (aspoň nevlastní). Speciálně platí dokonce:

Věta 7. *Je-li posloupnost a_n konvexní a není-li klesající, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.*

Důkaz: Podle věty 6 je posloupnost a_n od jistého N počínaje rostoucí. Tuto rostoucí posloupnost označme $b_1, b_2, \ldots$ Tvrdím, že pro libovolné $n \geqq 3$ a pro $1 \leqq k \leqq n-2$ jest $b_n > (k+1)b_{n-k} - kb_{n-k-1}$. Vskutku pro $k = 1$ jest $b_n > 2b_{n-1} - b_{n-2}$, jak plyne z konvexity. Nechť tedy platí hořejší nerovnost pro $k - 1$. Pak $b_n > kb_{n-k+1} - (k-1)b_{n-k} > 2kb_{n-k} -$ $- kb_{n-k-1} - (k-1)b_{n-k} = (k+1)b_{n-k} - kb_{n-k-1}$. Platí tedy také pro $k = n - 2$ nerovnost $b_n > (n-1)b_2 - (n-2)b_1 = (n-2)(b_2 - b_1) + b_2$. Protože však $b_2 - b_1 > 0$, jest skutečně $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Mohli bychom ovšem také přesněji v definici 1 nazvati posloupnost a_n ryze konvexní a definovati ještě posloupnost neryze konvexní, dále pak ryze a neryze konkávní. Je jistě zbytečné provádět to v tomto článku, protože všechno je zcela elementární. Věty o konvexních posloupnostech zde odvozené mají být vlastně jen ukázkou, jak je možno tyto pojmy aplikovat na theorii posloupností.

Pojem konvexní posloupnosti lze však zobecnit ještě takto:

Definice 2. *Budiž k pevné přirozené číslo, $k \geqq 2$. Posloupnost a_n nazveme k-konvexní, jestliže jsou pro všechna $n \geqq 1$ splněny tyto dvě podmínky:*

$$a_{n+1} < a_n + \frac{a_{n+k} - a_n}{k}, \quad a_{n+k-1} < a_n + \frac{(k-1)(a_{n+k} - a_n)}{k} .$$

(Tedy posloupnost 2-konvexní jest totéž jako konvexní.)

Pojmu k-konvexní posloupnosti můžeme zřejmě s výhodou užíti zejména tehdy, když výraz $a_{n+k} - a_n$ je jednoduchý. Platí opět řada podobných vět jako pro posloupnosti konvexní; omezíme se zde jen na dvě nejdůležitější.

Věta 8. *Je-li posloupnost a_n k-konvexní, pak nastává jeden z těchto tří případů:*

a) *a_n je klesající,*

b) *a_n je rostoucí,*

c) *existuje N tak, že konečná posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_N$ je klesající, posloupnost $a_{N+k-1}, a_{N+k}, \ldots$ je rostoucí.*

Důkaz: Jestliže pro všechna $n \geqq 1$ jest $a_{n+1} - a_n < 0$, nastává případ a). Jestliže však existuje n tak, že $a_{n+1} - a_n \geqq 0$, vezmeme si první takový index a označíme jej N.

1. Nechť $N = 1$. Předně z nerovností $a_1 \leqq a_2$, $a_2 < a_1 + \dfrac{a_{k+1} - a_1}{k}$ plyne $a_1 < a_{k+1}$. Za druhé jest $a_k < a_1 + \dfrac{(k-1)(a_{k+1} - a_1)}{k} < a_1 + a_{k+1} - a_1 = a_{k+1}$. Tvrdím nyní, že pro $n \geqq k$ platí tyto dvě nerovnosti: $a_{n+1-k} < a_{n+1}$, $a_n < a_{n+1}$. Pro $n = k$ platí podle předešlého. Nechť tedy platí pro n. Předně z nerovností $a_{n+2-k} < a_{n+1-k} + \dfrac{a_{n+1} - a_{n+1-k}}{k} < a_{n+1-k} + a_{n+1} - a_{n+1-k} = a_{n+1}$ a z nerovnosti $a_{n+1} < a_{n+2-k} + \dfrac{(k-1)(a_{n+2} - a_{n+2-k})}{k}$ plyne $a_{n+2-k} < a_{n+2}$. Za druhé pak též $a_{n+1} < a_{n+2-k} + \dfrac{(k-1)(a_{n+2} - a_{n+2-k})}{k} < a_{n+2-k} + a_{n+2} - a_{n+2-k} = a_{n+2}$. Nastává tedy případ b) nebo c).

2. Nechť $N > 1$. Na posloupnost $a_N, a_{N+1}, \ldots$ použijeme tvrzení sub 1. a je tedy splněn případ c).

Platí tedy také obdoba koroláru 1, což je zřejmé. Dokažme ještě obdobu věty 7.

Věta 9. *Je-li posloupnost a_n k-konvexní a není-li klesající, pak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Důkaz: Nechť posloupnost a_n má členy $a_0, a_1, \ldots$ Podle věty 8 jest a_n od nějakého indexu n_0 rostoucí. Limita jistě existuje (aspoň nevlastní), stačí tedy vyšetřit nějakou vybranou posloupnost. Uvažujme posloupnost $a_0, a_k, a_{2k}, \ldots$ $\ldots a_{rk}, \ldots$. Tvrdím, že tato posloupnost je konvexní, tedy že $2a_{rk} < a_{(r-1)k} +$

$+ a_{(r+1)k}$. Z předpokladu, že a_n je k-konvexní, plynou tyto nerovnosti: $a_{rk} < \frac{1}{k} a_{(r-1)k+1} + \frac{k-1}{k} a_{rk+1}$, $a_{(r-1)k+1} < \frac{k-1}{k} a_{(r-1)k} + \frac{1}{k} a_{rk}$, $a_{rk+1} <$ $< \frac{k-1}{k} a_{rk} + \frac{1}{k} a_{(r+1)k}$. Tedy jest $a_{rk} < \frac{k-1}{k^2} a_{(r-1)k} + \frac{1}{k^2} a_{rk} + \frac{(k-1)^2}{k^2} a_{rk} + \frac{k-1}{k^2} a_{(r+1)k}$. Úpravou dostaneme $(k^2 - (k-1)^2 - 1) a_{rk} < (k-1) a_{(r-1)k} +$ $+ (k-1) a_{(r+1)k}$, tedy vskutku $2a_{rk} < a_{(r-1)k} + a_{(r+1)k}$. Z věty 7 pak plyne $\lim_{r \to \infty} a_{rk} = \lim_{n \to \infty} a_n = \infty$, což bylo dokázati.

Bylo by opět možno ještě zavésti pojem k-konkávní posloupnosti atd. a odvodit příslušné věty, to však zajisté již zde nemusíme provádět.

Příklad: K vypracování uvedené methody jsem byl přiveden jedním problémem z matematické statistiky. Při řešení tohoto problému bylo nutno dokázat, že posloupnost o obecném členu $a_n = (n+1)\left(\frac{n\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)} - 1\right)$ jest klesající. Předně přímým výpočtem dokážeme, že vybraná posloupnost sudých (resp. lichých) členů je klesající. Dále rovněž výpočtem se přesvědčíme, že posloupnost $\frac{n^2\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ je konvexní a posloupnost $\frac{n\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ klesající. (Všechny výpočty jsou dosti dlouhé, ale téměř mechanické, proto je neuvádím). Z toho již pomocí našich vět o konvexních posloupnostech plyne, že též a_n je konvexní a podle koroláru 1 je také klesající.

Cvičení:

1. Je dána posloupnost: liché členy $a_{2n-1} = \lg \frac{2n+1}{2n-1}$, sudé členy $a_{2n} = \lg \frac{n+1}{n}$. Pomocí koroláru 1 dokažte, že tato posloupnost je klesající.

2. Použitím věty 7 dokažte, že $\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{a^n} = \infty$ pro $a > 0$.

3. Posloupnost a_n budiž dána takto: $a_{3n} = 9n^2 + 3n$, $a_{3n-1} = 9n^2 - 3n$, $a_{3n-2} = 9n^2 - 9n + 2$. Dokažte, že tato posloupnost je 3-konvexní a rostoucí.

4. Sudé členy posloupnosti buďtež $a_{2n} = (n-1)!$, liché členy $a_{2n+1} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3.1}{2^n}\sqrt{\pi}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Vyšetřete monotonii této posloupnosti a dokažte $\lim a_n = \infty$. (Jde vlastně o posloupnost $a_n = \Gamma(\frac{1}{2}n)$, $n = 2, 3, \dots$). K následujícímu cvičení je potřeba t. zv. Wallisovy formule: $\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^2 . 4^2 \dots (2n)^2}{1^2 . 3^2 \dots (2n-1)^2 . (2n+1)}$.

5. Posloupnost b_n budiž dána takto:

$$b_{2n+1} = (2n+1)\,\frac{1^2 \cdot 3^2 \ldots (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \ldots (2n)^2}\,\pi, \quad b_{2n} = 2n\,\frac{2^2 \cdot 4^2 \ldots (2n-2)^2}{1^2 \cdot 3^2 \ldots (2n-1)^2} \cdot \frac{4}{\pi}\,.$$

Dokažte, že je klesající. (Je to vlastně posloupnost $b_n = \dfrac{n\Gamma^2\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}$).

O SYSTÉMECH LINEÁRNÍCH DIFERENČNÍCH ROVNIC S PERIODICKÝMI KOEFICIENTY

JIŘÍ ČERMÁK, Brno.

(Došlo dne 13. srpna 1953.) DT: 517.949.21

V tomto článku jsou vyšetřovány vlastnosti řešení systémů lineárních diferenčních rovnic s periodickými koeficienty. Vyšetřování je provedeno methodou, která spočívá na pojmech theorie podobných matic *E. Weyra*.

§ 1. Tento článek obsahuje rozšíření některých výsledků T. FORTA[1]) o povaze řešení homogenní lineární diferenční rovnice 2. řádu s periodickými koeficienty na systémy diferenčních rovnic stejného typu. Budiž podotknuto, že některé z Fortových výsledků zobecnil A. A. GNANADOS pro lineární rovnici n-tého řádu[2]). Toto rozšíření je v tomto článku provedeno methodou analogickou methodě, jíž se používá k vyšetřování vlastností integrálů lineárních homogenních systémů diferenciálních rovnic s periodickými koeficienty a která je v podstatě založena na výsledcích theorie podobných matic; je známa pod jménem Floquetova theorie.[3]) Hlavní roli zde obvykle hrají pojmy Weierstrassovy theorie elementárních dělitelů. Na rozdíl od theorie elementárních dělitelů jsem v této práci užil pojmů z theorie podobných matic českého matematika EDUARDA WEYRA[4]) a to Weyrových charakteristických čísel a soustavy normálních vektorů matice[5]). Vedle toho jsou v závěru článku odvozeny ně-

[1]) *T. Fort,* Finite differences, Oxford (1948), 205—207.

[2]) *A. A. Gnanados,* Linear difference equations with periodic coefficients, Proceedings of the Amer. Math. Soc., vol. *2* (1951), 699—703.

[3]) *G. Sansone,* Equazioni differenziali, I., Bologna (2. vyd. 1948), kap. VI.
L. Sauvage, Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes, Paris (1895), 129—131.
J. Čermák, O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic, Práce moravskoslezské akademie věd přírodních, sv. XXV, spis 12, seš. 9 (1953), 337—356.

[4]) *E. Weyr,* O theorii forem bilinearných, Spisy poctěné jubilejní cenou královské české společnosti nauk v Praze (1889); přetištěno v Mh. Math. Phys., sv. *1* (1890), 163 až 236.

[5]) Pojem soustavy normálních vektorů je běžný v současné literatuře, i když nevystupuje pod tímto názvem, na př. *A. I. Malcev,* Osnovy linejnoj algebry, Moskva-Leningrad (1948), 137 nebo *I. M. Gelfand,* Lekcii po linejnoj algebre, Moskva-Leningrad (2. vyd. 1951), 157—160. Domnívám se, že tento pojem náleží Weyrovi; viz také poznámku *J. Dieudonné* v článku: Sur la réduction canonique des couples de matrices, Bulletin de la Société Mathématique de France, *74* (1946), 131.

které vlastnosti řešení lineárních nehomogenních systémů diferenčních rovnic s periodickými koeficienty, které se jeví jako jednoduché přenesení známých vět z theorie lineárních diferenciálních rovnic s periodickými koeficienty.

§ 2. Abychom se v dalším vyhnuli opakování, stanovíme, že proměnná x může nabývati pouze hodnot z množiny celých čísel. Výrok „pro všechna x" značí, že x je libovolné celé číslo.

Uvažujme o lineárním homogenním systému diferenčních rovnic

$$u_i(x + 1) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x)\, u_j(x), \quad i = 1, 2, \dots, n\ , \tag{1}$$

kde koeficienty p_{ij} jsou definovány pro všechna x a jsou periodické s periodou ω (ω je celé kladné číslo), tedy

$$p_{ij}(x + \omega) = p_{ij}(x) \tag{2}$$

pro všechna x; dále determinant $|p_{ij}(x)| \neq 0$ také pro všechna x.

Soustava koeficientů p_{ij} tvoří čtvercovou matici P řádu n, jejíž prvky jsou ovšem funkce nezávisle proměnné x. Matice budeme označovati velkými latinskými písmeny, matice $(p_{ij}(x))$, $(u_{ij}(x))$, jejichž prvky jsou funkce proměnné x, budeme značit $P(x)$, $U(x)$, někdy také prostě P, U. Determinant matice A budeme značit $|A|$, matici jednotkovou E. Vektory v n-rozměrném vektorovém prostoru identifikujeme s jednosloupcovými maticemi o n prvcích a budeme označovati malými tučnými písmeny. Jednotlivé vektory budeme rozlišovati různými písmeny nebo indexy.

V maticové notaci píšeme systém (1) $\mathbf{u}(x + 1) = P(x)\,\mathbf{u}(x)$, $P(x + \omega) = P(x)$.

Množinu n partikulárních řešení

$$u_{1k}(x),\ u_{2k}(x), \dots, u_{nk}(x), \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{3}$$

identifikujeme s vektory $\mathbf{u}^1(x)$, $\mathbf{u}^2(x)$, ..., $\mathbf{u}^n(x)$ a označíme maticí $U(x)$ tak, že sloupce $U(x)$ budou právě partikulární řešení (3).

Z theorie systémů typu (1) je známo, že jejich řešení tvoří n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem komplexních čísel[6]), jehož base se nazývá fundamentální soustava řešení. Soustava n řešení tvoří basi, je-li $|U(x)| \neq 0$

[6]) To je jeden z důvodů, proč se v případě, že x je reálná proměnná, vyšetřování omezuje obvykle na x z množiny celých čísel. Kdyby x byla proměnná v množině všech reálných čísel, řešení by tvořila vektorový prostor nad okruhem periodických funkcí s periodou 1.

Poznámka redakce: Že všechna řešení systému (1) tvoří n-rozměrný prostor, může čtenář dokázati takto:

Je-li $\mathbf{v}$ libovolný n-rozměrný vektor, snadno zjistíme, že existuje takové řešení $\mathbf{u}(x)$ systému (1), že $\mathbf{u}(0) = \mathbf{v}$ (hodnoty $\mathbf{u}(1)$, $\mathbf{u}(2)$, ..., $\mathbf{u}(-1)$, $\mathbf{u}(-2)$, ... lze ze vztahu (1) vypočítat, protože matice (p_{ij}) je podle předpokladu regulární); platí-li pro řešení $\mathbf{u}_1$, ..., $\mathbf{u}_n$, $\mathbf{u}$ vztah $\mathbf{u}(0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i(0)$, je $\mathbf{u}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i(x)$ pro každé x, jak se rovněž snadno zjistí. Protože hodnoty všech řešení v bodě 0 tvoří n-rozměrný prostor, tvoří i všechna řešení n-rozměrný prostor.

pro všechna x. Každé řešení systému (1) lze pak obdržeti jako lineární kombinaci vektorů fundamentální soustavy řešení. Je tedy dáno vzorcem $\mathbf{u}(x) = U(x)\mathbf{c}$, kde $\mathbf{c}$ je nějaký konstantní vektor.

§ **3. Lema 1.** *Buď $U(x)$ fundamentální soustava řešení; potom $U(x + \omega)$ je také fundamentální soustava řešení.*

Důkaz. Buď $U(x)$ fundamentální soustava řešení systému (1); pak změna proměnné x na $x + \omega$ nechává vzhledem k (2) nezměněnu rovnici (1), jest tedy $U(x + \omega)$ také soustava řešení. Dále podle předpokladu $|U(x)| \neq 0$ pro všechna x, jest tedy také $|U(x + \omega)| \neq 0$ pro všechna x a tedy $U(x + \omega)$ je fundamentální soustava řešení.

Dále nechť $U(x)$ je fundamentální soustava řešení.

Věta 1. *Existuje konstantní*[7]) *matice A taková, že*

$$U(x + \omega) = U(x)A, \quad |A| \neq 0 \; . \tag{4}$$

Důkaz plyne ihned z lematu 1.

Definice. *A nazveme fundamentální maticí příslušnou fundamentální soustavě $U(x)$.*

Rozepíšeme-li relaci (4), dostáváme soustavu rovnic

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{u}^1(x + \omega) &= a_{11}\mathbf{u}^1(x) + a_{21}\mathbf{u}^2(x) + \ldots + a_{n1}\mathbf{u}^n(x)\\
\mathbf{u}^2(x + \omega) &= a_{12}\mathbf{u}^1(x) + a_{22}\mathbf{u}^2(x) + \ldots + a_{n2}\mathbf{u}^n(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{u}^n(x + \omega) &= a_{1n}\mathbf{u}^1(x) + a_{2n}\mathbf{u}^2(x) + \ldots + a_{nn}\mathbf{u}^n(x) \; ,
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

což je systém lineárních homogenních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty pro vektory fundamentální soustavy, kde ovšem rozpětí není rovno 1 nýbrž ω[8]). Můžeme tedy vyslovit větu 1. také takto:

Systém diferenčních rovnic s periodickými koeficienty (1) *lze transformovati v systém diferenčních rovnic s konstantními koeficienty* (5).

Relace (4) dává $A = U^{-1}(x)U(x + \omega)$. Je-li $U(x)$ fundamentální soustava řešení, pak jakákoli jiná fundamentální soustava $\overline{U}(x)$ je dána rovnicí $\overline{U}(x) = U(x)Q$, $|Q| \neq 0$. Změna fundamentální soustavy $U(x)$ v $\overline{U}(x)$ má tedy za následek, že původní fundamentální matice A příslušná k fundamentální soustavě $U(x)$ přejde v matici $Q^{-1}U^{-1}(x)U(x + \omega)Q = Q^{-1}AQ$. Jest tedy fundamentální matice příslušná k nové fundamentální soustavě řešení $\overline{U}(x)$ podobná s maticí A. Dokázali jsme takto tuto větu:

Věta 2. *Fundamentální matice je určena až na podobnost.*

§ **4.** Nyní uvedu bez důkazu některé věty z theorie podobných matic, které budu v dalším potřebovat. Připomeňme ještě pro úplnost, že *čtvercové matice A, B n-tého řádu se nazývají podobné, existuje-li regulární (t. j. jejíž*

---

[7]) Konstantní maticí rozumíme matici, jejíž prvky jsou komplexní čísla.

[8]) V theorii diferenčních rovnic se obvykle uvažuje o rovnicích v t. zv. normálním tvaru, u kterých je rozpětí rovno 1; toho lze však vždy docílit vhodnou substitucí nezávisle proměnné.

determinant je různý od nuly) čtvercová matice Q n-tého řádu taková, že $B = Q^{-1}AQ$.

(**4.1**) *Podobné matice mají stejný charakteristický polynom a stejné charakteristické kořeny.*[9])

Nadále nechť A je čtvercová matice n-tého řádu, jejíž prvky jsou komplexní čísla, a a jeden z jejích charakteristických kořenů. Potom nula je charakteristický kořen matice $A - aE$. Má-li a násobnost $\alpha(\geqq 1)$, označme

$$\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\varrho = \alpha, \ldots$$

nulity[10]) postupných mocnin

$$A - aE, (A - aE)^2, (A - aE)^3, \ldots, (A - aE)^\varrho, \ldots$$

kde ϱ je první celé číslo, které dává nejvyšší nulitu α.[11])

Čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ jsou přirozená a nazývají se charakteristická čísla nebo také Weyrova charakteristika matice A příslušná ke kořenu a. Dá se ukázati, že splňují nerovnosti

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \ldots \geqq \alpha_\varrho .$$

Dále se dá ukázat, že ke kořenu a matice A lze přiřadit soustavu $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\varrho = \alpha$ lineárně nezávislých vektorů

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{a}^{11}, \ldots, \boldsymbol{a}^{1,\alpha_\varrho}, \\ \boldsymbol{a}^{21}, \ldots, \boldsymbol{a}^{2,\alpha_\varrho}, \boldsymbol{a}^{2,\alpha_\varrho+1}, \ldots, \boldsymbol{a}^{2,\alpha_{\varrho-1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{a}^{\varrho 1}, \ldots, \boldsymbol{a}^{\varrho,\alpha_\varrho}, \boldsymbol{a}^{\varrho,\alpha_\varrho+1}, \ldots, \boldsymbol{a}^{\varrho,\alpha_{\varrho-1}}, \boldsymbol{a}^{\varrho,\alpha_{\varrho-1}+1}, \ldots, \boldsymbol{a}^{\varrho,\alpha_1}, \end{array} \tag{6}$$

která se nazývá normální soustava vektorů příslušná ke kořenu a matice A, vyznačujících se tím, že se každý vektor, pokud jeho symbol není v posledním řádku, transformuje maticí $A - aE$ ve vektor, jehož symbol je právě pod ním, kdežto vektory v posledním řádku se transformují ve vektor 0.

Platí tedy vzorce:

$$\left.\begin{array}{lll} (A - aE)\boldsymbol{a}^{\mu\nu} = \boldsymbol{a}^{\mu+1,\nu} & \text{pro} & 1 \leqq \mu \leqq \varrho - 1 \\ (A - aE)\boldsymbol{a}^{\mu\nu} = 0 & \text{pro} & \mu = \varrho \end{array}\right\} \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{\varrho-\mu+1}, \tag{7}$$

které můžeme rozepsat také tímto způsobem:

$$\left.\begin{array}{lll} A\boldsymbol{a}^{\mu\nu} = a\boldsymbol{a}^{\mu\nu} + \boldsymbol{a}^{\mu+1,\nu} & \text{pro} & 1 \leqq \mu \leqq \varrho - 1 \\ A\boldsymbol{a}^{\mu\nu} = a\boldsymbol{a}^{\mu\nu} & \text{pro} & \mu = \varrho \end{array}\right\} \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{\varrho-\mu+1} . \tag{7'}$$

Nechť $a, b, \ldots, f$ značí všechny vzájemně různé charakteristické kořeny matice A a $\alpha, \beta, \ldots, \varphi$ jejich násobnosti. Potom ke každému kořenu přísluší jistá normální

---

[9]) Je-li A čtvercová matice, pak výraz $|A - \lambda E|$ se nazývá charakteristický polynom matice A a kořeny tohoto polynomu jsou charakteristické kořeny matice A.

[10]) Je-li h hodnost matice A, potom $n - h$ se nazývá nulitou matice A.

[11]) Dá se ukázat, že v posloupnosti matic $A - aE$ $(A - aE)^2, \ldots$ existuje první matice taková, že její nulita je α a všechny následující mají také nulitu α.

soustava vektorů a tyto jednotlivé normální soustavy obsahují celkem $\alpha + \beta + \dots$ $\dots + \varphi = n$ vektorů. Soustava těchto n vektorů se nazývá normální soustava vektorů příslušná k matici A a dá se ukázat, že všechny tyto vektory jsou nezávislé.

(**4.2**) *Weyrovy charakteristiky příslušné ke všem charakteristickým kořenům matice A, stručněji Weyrova charakteristika matice A, tvoří úplnou soustavu invariantů podobnosti v tom smyslu, že dvě matice jsou si podobné tehdy a jen tehdy, mají-li stejné charakteristické kořeny a stejnou Weyrovu charakteristiku.*

Matice může být interpretována jako lineární homogenní transformace ve vektorovém prostoru. S tohoto hlediska podobné matice představují tutéž transformaci vzhledem k různým basím.[12])

(**4.3**) *Nechť je ve vektorovém prostoru nad tělesem komplexních čísel zadána transformace zprostředkovaná maticí A. Vezmeme-li za basi prostoru Weyrovu normální soustavu vektorů příslušnou k matici A, pak podle vzorců (7′) matice transformace nabývá t. zv. Jordanův kanonický tvar*

$$\left[\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} a & 1 & 0 & \dots & . & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{array} & \\ & \ddots \\ & \begin{array}{cccccc} f & 1 & 0 & \dots & . & 0 \\ 0 & f & 1 & \dots & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f \end{array} \end{array}\right] = C \,. \tag{8}$$

Jinými slovy lze (4.3) formulovat také takto:

Existuje regulární matice Q, jejíž prvky jsou komplexní čísla taková, že

$$A = Q^{-1}CQ \,.$$

Abychom mohli matici C lépe popsati, označíme počet vektorů stojících v prvním sloupci schematu (6) číslem e_1, v druhém e_2 atd. až v posledním e_{α_1}. Matice C jest potom tvaru

$$\begin{pmatrix} A_1, & 0 \;, & \dots & \\ 0 \;, & A_2, & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$$

kde A_i jsou čtvercové matice a 0 matice nulové a na př. ke kořenu a patří α_1 matic A_i o řádech $e_1, e_2, \dots, e_{\alpha_1}$, při čemž matice A_i, $i = 1, 2, \dots, \alpha_1$, mají

[12]) *I. M. Gelfand*, l. c. 99.

zvlášť jednoduchý tvar, jak ukázáno v (8). Podobně se dají popsat matice příslušné k ostatním charakteristickým kořenům.

Poznámka. Snadno zjistíme, vypočteme-li elementární dělitele matice A příslušné k charakteristickému kořenu a, že čísla $e_1, e_2, \ldots, e_{\alpha_1}$ jsou právě exponenty těchto elementárních dělitelů, t. zv. *Segreho charakteristika příslušná ke kořenu* a.[13])

(**4.4**) *Má-li matice vesměs jednoduché kořeny* $s_1, s_2, \ldots, s_n$, *jest její Jordanův kanonický tvar* diag $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, *t. j. matice, jejíž všechny prvky mimo hlavní diagonálu jsou rovny nule.*

(**4.5**) *Má-li matice A kořeny $a, b, \ldots, f$ o násobnostech $\alpha, \beta, \ldots, \varphi$ a je-li A — — aE nulity α, $A - bE$ nulity $\beta, \ldots, A - fE$ nulity φ,*[14]) *potom kanonický tvar matice obsahuje v hlavní diagonále α prvků a, β prvků $b, \ldots, \varphi$ prvků f; prvky mimo hlavní diagonálu jsou vesměs rovny nule.*[15])

§ 5. Nyní ukážeme, že povaha řešení systému (1) je těsně spjata s charakteristickými kořeny a Weyrovou a Segreho charakteristikou fundamentální matice.

Předně plyne z věty 2, dále (4.1), (4.2) a poznámky předešlého odstavce

Věta 3. *Charakteristický polynom, charakteristické kořeny a Weyrova i Segreho charakteristika fundamentální matice nezávisí na volbě fundamentální soustavy řešení systému* (1).

Protože Q je libovolná regulární matice a je bezpodstatné, jakou fundamentální soustavu řešení k určení fundamentální matice zvolíme, můžeme podle (4.3) dále předpokládati, že $U(x)$ je taková fundamentální soustava, že fundamentální matice má kanonický Jordanův tvar.

Nechť má fundamentální matice kořeny $a, b, \ldots, f$[16]) o násobnostech $\alpha, \beta, \ldots$ $\ldots, \varphi$ a Weyrových charakteristikách $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_\sigma), \ldots, (\varphi_1, \ldots, \varphi_\tau)$.

Pak z relace (4) vzhledem ke kanonickému tvaru popsanému maticí (8) vidíme ihned, že $u^1(x + \omega)$, $u^2(x + \omega), \ldots, u^\alpha(x + \omega)$ jsou lineární homogenní funkce jedné neb dvou z hodnot $u^1(x), u^2(x), \ldots, u^\alpha(x)$, dále $u^{\alpha+1}(x + \omega)$, $u^{\alpha+2}(x + \omega), \ldots, u^{\alpha+\beta}(x + \omega)$ lineární homogenní funkce jedné neb dvou z hodnot $u^{\alpha+1}(x), u^{\alpha+2}(x), \ldots, u^{\alpha+\beta}(x)$ atd.

Jelikož, jak z kanonického tvaru (8) vychází, souvislost těchto skupin je zcela obdobná, stačí vzíti v úvahu souvislost ve skupině první (řešení přiřazených ke kořenu a), t. j. souvislost řešení $u^1(x + \omega)$, $u^2(x + \omega), \ldots, u^\alpha(x + \omega)$

---

[13]) *A. I. Malcev*, l. c. 186.
C. C. Mac Duffee, The theory of matrices, Berlin (1933), 73 (Ergebnisse der Math. u. ihrer Grenzgeb.).

[14]) To je ekvivalentní výroku, že Weyrova charakteristika ke každému kořenu obsahuje pouze první charakteristické číslo.

[15]) Jordanův kanonický tvar uvedený v (4.4) a (4.5) se označuje jako diagonální matice.

[16]) Vzhledem k (4) a (4.1) jsou všechny charakteristické kořeny různé od nuly.

s řešeními $\mathbf{u}^1(x), \mathbf{u}^2(x), \ldots, \mathbf{u}^\alpha(x)$. Snadno se vidí, že se těchto α řešení rozpadá na α_1 podskupin, které jsou charakterisovány řadou relací tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^1_{(k)}(x+\omega) &= a\mathbf{u}^1_{(k)}(x) \\ \mathbf{u}^2_{(k)}(x+\omega) &= \mathbf{u}^1_{(k)}(x) + a\mathbf{u}^2_{(k)}(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{u}^{e_k}_{(k)}(x+\omega) &= \mathbf{u}^{e_k-1}_{(k)}(x) + a\mathbf{u}^{e_k}_{(k)}(x), \quad k = 1, 2, \ldots, \alpha_1 . \end{aligned} \tag{9}$$

Jest tedy takto dokázána

Věta 4. *Má-li fundamentální matice kořeny $a, b, \ldots, f$ o násobnostech $\alpha, \beta, \ldots \ldots, \varphi$ a Weyrových charakteristikách $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_\sigma), \ldots, (\varphi_1, \ldots, \varphi_\tau)$, pak ke každému kořenu existuje skupina nezávislých řešení, jejichž počet je roven násobnosti kořene. Každá taková skupina se dá rozděliti na podskupiny řešení, které jsou charakterisovány relacemi tvaru* (9). *Počet těchto podskupin je roven prvnímu charakteristickému číslu v příslušné Weyrově charakteristice.*

Poznámka. Je-li kanonický tvar fundamentální matice matice diagonální, redukují se relace (9) na vztah $\mathbf{u}^i(x+\omega) = s\mathbf{u}^i(x)$, kde s je některý z charakteristických kořenů.

Vezmeme-li nyní za východisko vlastnosti řešení popsané ve větě 4, dá se snadno odvoditi analytický tvar řešení. Stačí opět, když se omezíme na skupinu řešení přiřazenou kořenu a. Relace (9) tvoří zvláštní lineární systém diferenčních rovnic s konstantními koeficienty, jenž je tak jednoduchý, že analytický tvar obecného řešení tohoto systému se dá najít, aniž vezmeme na pomoc obecnou theorii systémů lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty.

Způsob odvození je dobře znám[17]) a tak uvedeme pouze výsledek.

Označíme-li $\frac{1}{\omega}\log a = r$ (log je hlavní hodnota logaritmu), potom nejobecnější analytický tvar řešení je tento:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^1_{(k)}(x) &= e^{rx}\mathbf{q}^{11}_{(k)}(x) \\ \mathbf{u}^2_{(k)}(x) &= e^{rx}[\mathbf{q}^{12}_{(k)}(x) + x\mathbf{q}^{22}_{(k)}(x)] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{u}^{e_k}_{(k)}(x) &= e^{rx}[\mathbf{q}^{1e_k}_{(k)}(x) + x\mathbf{q}^{2e_k}_{(k)}(x) + \ldots + x^{e_k-1}\mathbf{q}^{e_k,e_k}_{(k)}(x)], \quad k = 1, 2, \ldots, \alpha_1; \end{aligned} \tag{10}$$

složky vektorů $\mathbf{q}^{m,n}_{(k)}$ jsou periodické funkce s periodou ω a žádný z vektorů $\mathbf{q}^{m,n}_{(k)}$ není identicky roven nule ($m, n = 1, 2, \ldots, e_k$).

Právě odvozené vlastnosti řešení systému (1) nám umožňují vyšetřovat na př. asymptotické vlastnosti řešení, existenci periodických řešení a podobně. Omezíme se na tyto dvě věty:

---

[17]) *E. Goursat*, Cours d'Analyse mathématique, II., Paris (4. vyd. 1924), 513. *L. Sauvage*, l. c. 131—133.

Věta 5. *Postačující podmínka, aby systém* (1) *měl netriviální periodické řešení s periodou ω, je, aby fundamentální matice měla charakteristický kořen roven* 1.

Důkaz plyne ihned z věty 4.

Dodatek k větě 5. *Podmínka ve větě* 5 *je nutná.*

Důkaz. Uvažme, že obecné řešení systému (1) je dáno vzorcem $\mathbf{u}(x) = U(x)\mathbf{c}$. Má-li nyní existovat nenulový vektor $\mathbf{c}$ a konstanta ϱ tak, aby platilo $\mathbf{u}(x + \omega) = \varrho\mathbf{u}(x)$, pak vzhledem k (4) dostaneme

$$U(x)A\mathbf{c} = \varrho U(x)\mathbf{c} ,$$

což implikuje

$$U(x)\{A - \varrho E\}\mathbf{c} = 0 ,$$

a poněvadž $|U(x)| \not\equiv 0$ a vektor $\mathbf{c}$ nemá být nulový, musí být ϱ kořenem charakteristického polynomu $|A - \varrho E|$ fundamentální matice. Má-li tedy existovati periodické řešení $\mathbf{u}(x)$ s periodou ω, t. j. $\mathbf{u}(x + \omega) = \mathbf{u}(x)$, je nutné, aby fundamentální matice měla charakteristický kořen rovný 1.[18])

Věta 6. *Postačující podmínka, aby všechna řešení skupiny odpovídající charakteristickému kořenu a měla pro $x \to \infty$ limitu rovnou nule, je, aby reálná část čísla r byla záporná nebo, což je ekvivalentní, aby absolutní hodnota charakteristického kořene a byla menší než* 1. *Postačující podmínka, aby všechna řešení systému* (1) *měla pro $x \to \infty$ limitu rovnou nule je, aby všechny charakteristické kořeny fundamentální matice byly co do absolutní hodnoty menší než* 1.

Důkaz plyne ze vzorců (10).

Poznámka. Podobně jako u věty 5 se dá ukázat, že podmínka ve větě 6 je nutná.

§ 6. Uvažujme nakonec o nehomogenním lineárním systému diferenčních rovnic s periodickými koeficienty a periodickou pravou stranou

$$u_i(x + 1) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x)u_j(x) + b_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n , \tag{11}$$

$$|p_{ij}(x)| \neq 0, \; p_{ij}(x + \omega) = p_{ij}(x), \quad b_i(x + \omega) = b_i(x) \text{ pro všechna } x.$$

Je-li $b_i(x) \equiv 0$, dostaneme ze systému (11) systém (1), který nazýváme *homogenní systém příslušný k* (11).

V maticové notaci píšeme (11)

$$\mathbf{u}(x + 1) = P(x)\mathbf{u}(x) + \mathbf{b}(x) .$$

Hledejme, zda existuje řešení systému (11), které je periodické s periodou ω.

Nechť $\mathbf{u}_0(x)$ je partikulární řešení systému (11) a $U(x)$ fundamentální soustava řešení příslušného homogenního systému (1). Potom, jak je známo,

---

[18]) Snadno se vidí, že počet lineárně nezávislých řešení s periodou ω je roven prvnímu charakteristickému číslu Weyrovy charakteristiky příslušné ke kořenu 1. Dále se dá ukázat, že má-li fundamentální matice k-násobný kořen 1, pak k tomuto kořenu přísluší řešení s periodou $k\omega$ a naopak.

obecné řešení systému (11) $\boldsymbol{u}(x)$ se dostane jako součet obecného řešení příslušného homogenního systému (1) a nějakého partikulárního řešení systému (11), tedy

$$\boldsymbol{u}(x) = U(x)\boldsymbol{c} + \boldsymbol{u}_0(x) .$$

Protože, jak se snadno vidí, $\boldsymbol{u}_0(x + \omega)$ je také řešení systému (11), existuje konstantní vektor $\boldsymbol{k}$ takový, že

$$\boldsymbol{u}_0(x + \omega) = U(x)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{u}_0(x) .$$

Nyní

$$\boldsymbol{u}(x + \omega) = U(x + \omega)\boldsymbol{c} + \boldsymbol{u}_0(x + \omega) = U(x)\{A\boldsymbol{c} + \boldsymbol{k}\} + \boldsymbol{u}_0(x)$$

a $\boldsymbol{u}(x)$ bude řešení periodické s periodou ω tehdy a jen tehdy, bude-li platit

$$A\boldsymbol{c} + \boldsymbol{k} = \boldsymbol{c} \quad \text{čili} \quad (A - E)\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{k} . \tag{12}$$

Mohou nastat dvě možnosti: 1. $|A - E| \neq 0$. V tomto případě charakteristický polynom fundamentální matice nemá žádný kořen rovný 1 a (1) nemá podle věty 5 periodické řešení s periodou ω. Systém lineárních rovnic (12) má jediné řešení a existuje tedy jedno a pouze jedno periodické řešení systému (11) s periodou ω.

2. $|A - E| = 0$. V tomto případě má charakteristický polynom fundamentální matice aspoň jeden kořen rovný 1 a (1) má podle věty 5 aspoň jedno periodické řešení s periodou ω. Je-li systém lineárních rovnic (12) inkompatibilní, nemá systém periodické řešení s periodou ω, je-li kompatibilní, existuje nekonečně mnoho periodických řešení s periodou ω.

Shrneme-li tyto výsledky, dostáváme tuto větu:

Věta 7. *Nemá-li homogenní systém* (1) *periodické řešení s periodou ω, potom nehomogenní systém* (11) *má jedno a pouze jedno periodické řešení s periodou ω. Má-li homogenní systém* (1) *aspoň jedno periodické řešení s periodou ω, potom nehomogenní systém* (11) *buď nemá žádné periodické řešení s periodou ω nebo má takových řešení nekonečně mnoho.*

Резюме.

О ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ИРЖИ ЧЕРМАК (Jiří Čermák), Брно.

(Поступило в редакцую 13. VIII 1953 г.)

Содержанием этой статьи является расширение некоторых результатов Т. Форта о характере (природе) решений однородного линейного разностного уравнения 2-ого порядка с периодическими коэффициентами на системы разностных уравнений того же типа. Это проделано при помощи

метода, известного под названием теории флоке, используемой обыкновенно при исследовании свойств интегралов однородных линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В противоположность теории элементарных делителей Вейерштраса, на которой обычно основывается указаный метод, в настоящей работе использованы понятия теории подобных матриц Э. Вейра. Помимо этого выведены в заключении статьи некоторые свойства решений неоднородных линейных систем разностных уравнений, которые представляют собой лишь простую перефразировку известных теорем теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Zusammenfassung.

ÜBER LINEARE SYSTEME VON DIFFERENZENGLEICHUNGEN MIT PERIODISCHEN KOEFFIZIENTEN

JIŘÍ ČERMÁK, Brno.

(Eingelangt 13. VIII. 1953.)

Diese Arbeit enthält eine Erweiterung einiger Resultate von T. Fort über die Natur der Lösungen der homogenen linearen Differenzengleichung 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten auf Systeme von Differenzengleichungen gleichen Typus. Die Erweiterung ist durch eine Methode durchgeführt, die den Namen Floquetsche Theorie trägt und die man zur Untersuchung der Eigenschaften der Integrale von homogenen linearen Systemen der Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten benützt. Zum Unterschied von der Weierstrassschen Elementarteilertheorie, die man gewöhnlich bei dieser Methode herannimmt, sind in dieser Arbeit die Begriffe aus der Theorie der ähnlichen Matrizen von E. Weyr benützt. Zum Schluss der Arbeit sind noch einige Eigenschaften der Lösungen der linearen unhomogenen Systeme von Differenzengleichungen abgeleitet, die als einfache Übertragung bekannter Sätze aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten angesehen werden können.

POZNÁMKA O POUŽITÍ WEYROVY THEORIE MATIC K INTEGRACI SYSTÉMŮ DIFERENCIÁLNÍCH LINEÁRNÍCH ROVNIC S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

OTAKAR BORŮVKA, Brno.

(Došlo dne 20. října 1953.) DT: 517.941.92

1. K integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty se obvykle používá klasické metody Weierstrassovy, spočívající na redukci matice koeficientů systému na kanonický tvar. Tento způsob umožňuje zejména poznání funkční struktury hledaných integrálů. Při numerických výpočtech se tato metoda zpravidla kombinuje s metodou neurčitých koeficientů za účelem snadnějšího docílení numerické náplně příslušných vzorců.[1]) Podstatně jiná je metoda Peano-Bakerova, založená na postupných kvadraturách a vedoucí k vyjádření integrálů systému hodnotou exponenciální funkce matice koeficientů a počátečními podmínkami.[2])

Ve svých přednáškách o diferenciálních rovnicích, které jsem konal ve stud. roce 1948/49 na přírodovědecké fakultě M. U. v Brně, vyložil jsem integrační metodu založenou na Weyrově theorii matic. Tato metoda se vyznačuje tím, že vede k přehledným explicitním vzorcům pro integrály, vyjadřujícím algebraickou povahu problému. Nedávno uveřejnil M. KUMOROVITZ práci o integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty, která je s Weyrovou theorií matic v úzké souvislosti.[3]) Autor odvodil explicitní vzorec pro obecné řešení daného systému, avšak jeho metoda je zaměřena jiným směrem než k využití možností daných onou theorií. Níže popsanou metodu lze přenésti i na řešení jiných problémů, na př. na řešení analogického problému o rovnicích diferenčních.[4])

---

[1]) Viz na př. *V. V. Stěpanov*, Kurs diferenciálních rovnic (Praha, 1950), 324 a n.

[2]) *Giovanni Sansone*, Equazioni differenziali nel campo reale. Parte prima (Bologna, 1941), 80 a n.

[3]) *Michal Kumorovitz*, Une solution du système linéaire homogène d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants, Annales de la Société Polonaise de mathématique, T. XXIII (1950). Viz též: *Lothar Collatz*, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen (Leipzig, 1949), 315 a n.

[4]) *Jiří Čermák*, O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic, Práce Moravskoslezské akademie přírodních, sv. XXV (1953), 337 a n.

2. Znamenitý český matematik EDUARD WEYR uveřejnil v r. 1889 ve Spisech poctěných jubilejní cenou Král. české společnosti nauk v Praze práci nazvanou: „O theorii forem bilinearných". V ní vyvinul originálním a důmyslným způsobem novou theorii matic, která se co do obsažnosti vyrovná proslulé Weierstrassově theorii elementárních dělitelů a co do jednoduchosti a průhlednosti ji předčí. Prof. FR. STUDNIČKA ve svém posudku Weyrovy práce napsal: „Obsahem řadí se spis tento k nejmodernějším vymoženostem vědy mathematické a jest hoden vším právem plného uznání, jakéhož se mu zajisté dostane, až bude uveřejněn." Weyr uveřejnil svoji práci také německy v následujícím roce 1890 v časopise Monatshefte für Mathematik und Physik pod názvem: „Zur Theorie der bilinearen Formen". Nicméně se mně zdá, že Weyrova práce nenalezla ve světové literatuře ono místo, které jí přináleží. Na př. v obsáhlé Wedderburnově knize o maticích z r. 1934 jsou sice v seznamu literatury obě Weyrovy práce uvedeny, avšak v textu není o jejich obsahu zmínky. Poznamenejme, že v poslední kapitole své práce aplikuje Weyr svoji theorii na studium integrálů diferenciální lineární homogenní rovnice n-tého řádu v okolí singulárního bodu.

3. Uvedu v přehledu výsledky Weyrovy theorie, pokud jsou potřebné v dalším výkladu.

Budiž A libovolná čtvercová matice ($1 \leqq$) n-tého řádu v tělese komplexních čísel. Připomeňme, že *nulitou matice* A se rozumí rozdíl čísla n a hodnosti matice A. *Charakteristickou rovnicí matice* A se rozumí algebraická rovnice, která vznikne anulováním determinantu $|A - \lambda E|$; přitom λ značí proměnnou a E jednotkovou matici n-tého řádu. Kořeny charakteristické rovnice matice A se nazývají *kořeny matice* A.

Budiž a libovolný kořen matice A a α ($\geqq 1$) jeho násobnost.

Uvažujme o posloupnosti matic:

$$(E =)\quad (A - aE)^0,\quad (A - aE)^1,\quad (A - aE)^2, \ldots, (A - aE)^r,\ (A - aE)^{r+1}, \ldots$$

a označme jejich nulity:

$$(0 =)\ \nu_0,\quad \nu_1,\quad \nu_2, \ldots,\quad \nu_r,\quad \nu_{r+1}, \ldots .$$

Tyto nulity z počátku rostou, až při určité mocnině $(A - aE)^r$ dosáhnou hodnoty α, načež další jsou vesměs rovny α; platí tedy vztahy:

$$(0 =)\quad \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_r = \nu_{r+1} = \ldots \quad (= \alpha) .$$

Čísla

$$\alpha_1 = \nu_1,\quad \alpha_2 = \nu_2 - \nu_1,\quad \alpha_3 = \nu_3 - \nu_2, \ldots, \alpha_r = \nu_r - \nu_{r-1}$$

jsou t. zv. *charakteristická čísla matice* A *příslušná ke kořenu* a. Vyznačují se zejména tím, že nerostou, takže platí nerovnosti:

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \ldots \geqq \alpha_r .$$

Dále existuje t. zv. *normální soustava vektorů příslušná ke kořenu* a, která se skládá z $\alpha_r + \alpha_{r-1} + \ldots + \alpha_1 = \alpha$ nezávislých vektorů o n složkách.

Taková soustava je charakterisována těmito vlastnostmi: a) Její vektory jsou rozloženy do r skupin a systém těchto skupin a též systém vektorů v každé skupině jsou uspořádány, b) ϱ-tá skupina obsahuje $\alpha_{r-\varrho+1}$ vektorů $\boldsymbol{a}_{\varrho 1}, \dots$ $\dots, \boldsymbol{a}_{\varrho,\alpha_{r-\varrho+1}}$, c) maticí $A - aE$ se transformuje σ-tý vektor $\boldsymbol{a}_{\varrho\sigma}$ v ϱ-té skupině buď v σ-tý vektor $\boldsymbol{a}_{\varrho+1,\sigma}$ v následující skupině nebo ve vektor nulový, podle toho, zda je $\varrho \leqq r - 1$ nebo $\varrho = r$ ($\varrho = 1, \dots, r$; $\sigma = 1, \dots, \alpha_{r-\varrho+1}$). Normální soustavu vektorů příslušnou ke kořenu a můžeme tedy vyjádřit schematem:

$$
\begin{array}{l}
\boldsymbol{a}_{11}, \dots, \boldsymbol{a}_{1,\alpha_r}, \\
\boldsymbol{a}_{21}, \dots, \boldsymbol{a}_{2,\alpha_r}, \boldsymbol{a}_{2,\alpha_r+1}, \dots, \boldsymbol{a}_{2,\alpha_{r-1}}, \\
\boldsymbol{a}_{31}, \dots, \boldsymbol{a}_{3,\alpha_r}, \boldsymbol{a}_{3,\alpha_r+1}, \dots, \boldsymbol{a}_{3,\alpha_{r-1}}, \boldsymbol{a}_{3,\alpha_{r-1}+1}, \dots, \boldsymbol{a}_{3,\alpha_{r-2}}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\boldsymbol{a}_{r1}, \dots, \boldsymbol{a}_{r,\alpha_r}, \boldsymbol{a}_{r,\alpha_r+1}, \dots, \boldsymbol{a}_{r,\alpha_{r-1}}, \boldsymbol{a}_{r,a_{r-1}+1}, \dots, \boldsymbol{a}_{r,\alpha_{r-2}}, \dots, \boldsymbol{a}_{r,\alpha_1}
\end{array}
\tag{1}
$$

a vzorci:

$$
\begin{aligned}
(A - aE)\, \boldsymbol{a}_{\varrho\sigma} &= \boldsymbol{a}_{\varrho+1,\sigma} \quad \text{pro } 1 \leqq \varrho \leqq r - 1, \quad \sigma = 1, \dots, \alpha_{r-\varrho+1}\,, \\
&= 0 \qquad\quad\ \text{pro } \varrho = r\,.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Poznamenejme, že vektory tvořící ϱ-tou skupinu, $1 \leqq \varrho \leqq r$, se transformují maticí $(A - aE)^{r-\varrho}$ v (nezávislé) vektory r-té skupiny a maticí $(A - aE)^{r-\varrho+1}$ ve vektor nulový. Toho používáme k určení normální soustavy vektorů v konkretních případech: Za vektory první skupiny zvolíme libovolné nezávislé vektory $\boldsymbol{a}_{11}, \dots, \boldsymbol{a}_{1,\alpha_r}$, které se maticí $(A - aE)^{r-1}$ transformují ve vektory nezávislé a maticí $(A - aE)^r$ ve vektor nulový. Jsou-li již určeny vektory $\boldsymbol{a}_{\varrho 1}, \dots, \boldsymbol{a}_{\varrho,\alpha_{r-\varrho+1}}$, $1 \leqq \varrho \leqq r - 1$, obdržíme vektory $\boldsymbol{a}_{\varrho+1,1}$ $\dots, \boldsymbol{a}_{\varrho+1,\alpha_{r-\varrho+1}}$ podle vzorců: $\boldsymbol{a}_{\varrho+1,\sigma} = (A - aE)\boldsymbol{a}_{\varrho\sigma}$, $\sigma = 1, \dots, \alpha_{r-\varrho+1}$, a v případě $\alpha_{r-\varrho} > \alpha_{r-\varrho+1}$ dále tím, že za vektory $\boldsymbol{a}_{\varrho+1,\alpha_{r-\varrho+1}+1}, \dots, \boldsymbol{a}_{\varrho+1,\alpha_{r-\varrho}}$ zvolíme libovolné, na vektorech $\boldsymbol{a}_{\varrho+1,\sigma}$ nezávislé vektory, které se maticí $(A—aE)^{r-\varrho-1}$ transformují ve vektory nezávislé a maticí $(A - aE)^{r-\varrho}$ ve vektor nulový.

Když ke každému kořenu matice A přiřadíme příslušnou normální soustavu vektorů, obdržíme celkem n ($=$ součet násobností jednotlivých kořenů) vektorů. Tyto vektory jsou nezávislé a tvoří t. zv. *normální soustavu vektorů příslušnou k matici A.*

Když matice A je reálná, pak ke každému reálnému kořenu matice A existuje příslušná normální soustava vektorů reálných. Ke každým dvěma komplexně sdruženým kořenům matice A existují příslušné normální soustavy vektorů, které jsou komplexně sdružené; z každé soustavy obdržíme druhou tím, že její vektory nahradíme vektory komplexně sdruženými.

4. Budiž dán systém n ($\geqq 1$) diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n\,, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_n' &= a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n\,.
\end{aligned}
\tag{a}
$$

Ve vektorovém označení jej můžeme vyjádřit vzorcem:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \ , \tag{a}$$

v němž A značí matici (a_{ik}). Nezávisle proměnná budiž x.

Budiž a α-násobný kořen matice A s charakteristickými čísly $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \ldots \geqq \alpha_r$, a nechť vektory (1) *tvoří k němu příslušnou normální soustavu vektorů. Pak vektory $\mathbf{y}_{\varrho\sigma}$ ($\varrho = 1, \ldots, r$; $\sigma = 1, \ldots, \alpha_{r-\varrho+1}$), v počtu α, definované vzorcem:*

$$\mathbf{y}_{\varrho\sigma} = \epsilon^{ax} \cdot \left(\mathbf{a}_{\varrho\sigma} + \frac{x}{1!} \mathbf{a}_{\varrho+1,\sigma} + \ldots + \frac{x^{r-\varrho}}{(r-\varrho)!} \mathbf{a}_{r\sigma} \right) , \tag{3}$$

jsou nezávislé a každý z nich jest integrálem systému (a).

Vskutku, každý minor α-tého řádu matice (typu n/α)

$$(\mathbf{y}_{r1}, \ldots, \mathbf{y}_{11}; \mathbf{y}_{r2}, \ldots, \mathbf{y}_{12}; \ldots, \mathbf{y}_{r\alpha_1}) \ ,$$

v libovolném čísle x, se rovná, jak je patrno, součinu čísla exp $\alpha a x$ a stejnolehlého minoru matice

$$(\mathbf{a}_{r1}, \ldots, \mathbf{a}_{11}; \mathbf{a}_{r2}, \ldots, \mathbf{a}_{12}; \ldots, \mathbf{a}_{r\alpha_1}) \ .$$

Z toho soudíme, že vektory $\mathbf{y}_{\varrho\sigma}$ jsou nezávislé.

Dále platí rovnice, pro $1 \leqq \varrho \leqq r$, $\sigma = 1, \ldots, \alpha_{r-\varrho+1}$:

$$\mathbf{y}'_{\varrho\sigma} = a \cdot \mathrm{e}^{ax} \sum_{k=0}^{r-\varrho} \frac{x^k}{k!} \mathbf{a}_{\varrho+k,\sigma} + \mathrm{e}^{ax} \sum_{k=1}^{r-\varrho} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \mathbf{a}_{\varrho+k,\sigma} \ ,$$

při čemž v případě $\varrho = r$ značí druhý výraz na pravé straně vektor nulový. Odtud plynou s ohledem na vzorce (2) vztahy:

$$\mathbf{y}'_{\varrho\sigma} = a \cdot \mathrm{e}^{ax} \sum_{k=0}^{r-\varrho} \frac{x^k}{k!} \mathbf{a}_{\varrho+k,\sigma} + \mathrm{e}^{ax} \sum_{k=1}^{r-\varrho+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} (A - aE)\mathbf{a}_{\varrho+k-1,\sigma} =$$

$$= A \left(\mathrm{e}^{ax} \sum_{k=0}^{r-\varrho} \frac{x^k}{k!} \mathbf{a}_{\varrho+k,\sigma} \right) = A\mathbf{y}_{\varrho\sigma} \ .$$

Z nich vidíme, že vektor $\mathbf{y}_{\varrho\sigma}$ jest integrálem systému (a).

Nechť $a, b, \ldots, f$ značí jednotlivé kořeny matice A a $\alpha, \beta, \ldots, \varphi$ jejich násobnosti. Když ke každému kořenu přiřadíme podle vzorců (3) soustavu integrálů systému (a), obdržíme celkem $\alpha + \beta + \ldots + \varphi = n$ integrálů systému (a). Tyto integrály jsou nezávislé, neboť determinant jejich matice v libovolném čísle x se rovná, jak je patrno, součinu čísla exp $(\alpha a + \beta b + \ldots + \varphi f)x$ a determinantu normální soustavy vektorů příslušné k matici A, takže je různý od nuly. Tím jest určen fundamentální systém integrálů systému (a).

Všimněme si zejména případu, kdy matice A a rovněž nezávisle proměnná x jsou reálné. Pak ke každému reálnému kořenu matice A existuje příslušná normální soustava vektorů reálných a k němu podle vzorců (3) přiřazené integrály systému (a) jsou rovněž reálné. Ke dvěma komplexně sdruženým kořenům $a = a_1 + \mathrm{i}a_2$, $\bar{a} = a_1 - \mathrm{i}a_2$ matice A existují příslušné normální soustavy vektorů $\mathbf{a}_{\varrho\sigma} = \mathbf{a}_{\varrho\sigma 1} + \mathrm{i}\mathbf{a}_{\varrho\sigma 2}$, $\overline{\mathbf{a}}_{\varrho\sigma} = \mathbf{a}_{\varrho\sigma 1} - \mathrm{i}\mathbf{a}_{\varrho\sigma 2}$ komplexně sdružených a k nim podle vzorců (3) přiřazené integrály $\mathbf{y}_{\varrho\sigma}$, $\overline{\mathbf{y}}_{\varrho\sigma}$ systému (a) jsou komplexně sdružené. Vektory $\mathbf{y}_{\varrho\sigma 1} = (\mathbf{y}_{\varrho\sigma} + \overline{\mathbf{y}}_{\varrho\sigma}) : 2$, $\mathbf{y}_{\varrho\sigma 2} = (\mathbf{y}_{\varrho\sigma} - \overline{\mathbf{y}}_{\varrho\sigma}) : 2\mathrm{i}$, vyjádřené vzorci:

$$\mathbf{y}_{\varrho\sigma 1} = \mathrm{e}^{a_1 x} \sum_{k=0}^{r-\varrho} \frac{x^k}{k!} (\cos a_2 x \, \mathbf{a}_{\varrho+k,\sigma 1} - \sin a_2 x \, \mathbf{a}_{\varrho+k,\sigma 2}) \,,$$

$$\mathbf{y}_{\varrho\sigma 2} = \mathrm{e}^{a_1 x} \sum_{k=0}^{r-a} \frac{x^k}{k!} (\sin a_2 x \, \mathbf{a}_{\varrho+k,\sigma 1} + \cos a_2 x \, \mathbf{a}_{\varrho+k,\sigma 2}) \,, \tag{4}$$

jsou reálné, nezávislé a jsou ovšem integrály systému (a). Vidíme, že když matice A je reálná, existuje fundamentální systém integrálů systému (a), které jsou tvaru (3) nebo vždy po dvou tvaru (4). Poznamenejme, že vzorce (3) a (4) vyjadřují integrály systému (a) ovšem i pro komplexní hodnoty proměnné x.

RACIONÁLNÍ KŘIVKY S MAXIMÁLNÍM POČTEM REÁLNÝCH UZLOVÝCH BODŮ

LUDĚK GRANÁT a MIROSLAV FIEDLER, Praha.

(Došlo dne 30. listopadu 1953.) 513.61,12

V soutěži studentské tvořivosti v r. 1952 podal *Luděk Granát* jednoduchý příklad (rovinné) racionální křivky n-tého stupně pro sudé kladné n, která má maximální počet, totiž $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, (reálných) uzlových bodů. Výsledek (bez důkazu) je uveden ve větě 1. Spoluautor, který Granátovu práci četl, nalezl rovněž jednoduchý příklad takové racionální křivky n-tého stupně, a to pro každé přirozené n. O tom jednají věty 2 a 3.

V celém článku předpokládáme, že je dána rovina a v ní pravoúhlá soustava souřadnic x, y. Pod pojmem racionální křivky n-tého stupně, kde n je přirozené číslo, rozumíme množinu všech bodů (x, y), pro něž pro nějaké reálné číslo t je

$$x = \frac{f(t)}{h(t)}, \quad y = \frac{g(t)}{h(t)}, \quad h(t) \neq 0\,,^{1)} \tag{1}$$

kde $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ jsou reálné polynomy nejvýše n-tého stupně bez společných nulových bodů, z nichž alespoň jeden je právě n-tého stupně, a přitom platí: alespoň jeden bod (x_0, y_0), $x_0 = \frac{f(t_0)}{h(t_0)}$, $y_0 = \frac{g(t_0)}{h(t_0)}$, $h(t_0) \neq 0$, odpovídá jen parametru t_0, při čemž matice

$$\begin{Vmatrix} f(t_0), & g(t_0), & h(t_0) \\ f'(t_0), & g'(t_0), & h'(t_0) \end{Vmatrix} \tag{2}$$

má hodnost 2 (f' atd. jsou derivace podle t).

Uzlovým bodem křivky (1) je pak bod (x, y), který odpovídá právě dvěma různým číslům t_1, t_2, $t_1 \neq t_2$, a to reálným (t. j. $x = \frac{f(t_1)}{h(t_1)} = \frac{f(t_2)}{h(t_2)}$, $y = \frac{g(t_1)}{h(t_1)} = \frac{g(t_2)}{h(t_2)}$, $h(t_1) \cdot h(t_2) \neq 0$), a přitom

[1]) Tato množina se doplňuje bodem $(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{h(t)}$, $\bar{y} = \lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{h(t)}$, pokud existuje a případně isolovanými singulárními body tvaru (1) pro ta t komplexní (ne reálná), pro která jsou x i y reálná.

$$\begin{vmatrix} f(t_1), & g(t_1), & h(t_1) \\ f'(t_1), & g'(t_1), & h'(t_1) \\ f'(t_2), & g'(t_2), & h'(t_2) \end{vmatrix} \neq 0.^{2)} \tag{3}$$

Platí potom, známá věta, že racionální křivka n-tého stupně má nejvýše $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ uzlových bodů. Uvedeme teď dvě věty (první bez důkazu, druhou se stručným důkazem), které obsahují jednoduché příklady racionálních křivek n-tého stupně, které mají právě $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ uzlových bodů:

Věta 1. *Budiž $n > 0$ sudé číslo, $n = 2m$, h reálné číslo takové, že $h > m - 1$, $h \neq m$. Hypocykloida o parametrických rovnicích*

$$x = h \cos m\tau + m \cos(m-1)\tau ,$$
$$y = h \sin m\tau - m \sin(m-1)\tau ,$$
$$0 \leq \tau < 2\pi ,$$

je racionální křivka n-tého stupně[3]) *s $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ uzlovými body.*

Věta 2. *Budiž n přirozené číslo. Množina M bodů*

$$x = \cos n\tau, \quad y = \cos(n-1)\tau, \quad 0 \leq \tau \leq \pi , \tag{4}$$

je částí racionální křivky R_n n-tého stupně, která má (dokonce v M) $\frac{1}{2}(n-1)$ . . $(n-2)$ uzlových bodů. Všechny body R_n dostaneme, připojíme-li ještě jednak množinu M' bodů

$$x = \cosh n\sigma, \quad y = \cosh (n-1)\sigma, \quad \sigma > 0 . \tag{4'}$$

jednak množinu M'' bodů

$$x = (-1)^n \cosh n\zeta, \quad y = (-1)^{n-1} \cosh(n-1)\zeta, \quad \zeta > 0 . \tag{4''}$$

Důkaz: Nejprve uvedeme tři pomocná tvrzení:

1. Pro každé přirozené číslo n existuje polynom $T_n(x)$ n-tého stupně tak, že je pro každé ξ

$$\begin{aligned} \cos n\xi &= T_n(\cos \xi) , \\ \cosh n\xi &= T_n(\cosh \xi) . \end{aligned} \tag{5}$$

Přitom pro sudé (liché) n obsahuje $T_n(x)$ jen sudé (liché) mocniny x.

Důkaz plyne snadno indukcí pomocí vzorců

$$\begin{aligned} \cos(n+1)\xi &= 2 \cos\xi \cos n\xi - \cos(n-1)\xi , \\ \cosh(n+1)\xi &= 2 \cosh \xi \cosh n\xi - \cosh(n-1)\xi .^{4)} \end{aligned} \tag{6}$$

---

[2]) To znamená, že v bodě (x, y) existují dvě reálné tečny a že jsou různé.

[3]) Na tvar (1) ji lze uvést substitucí $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\tau = t$. O hypocykloidě viz na př. *G. Loria:* Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. 2. vyd., 2. díl, str. 94.

[4]) Polynomy $T_n(x)$ jsou t. zv. Čebyševovy polynomy. $T_n(x)$ lze na př. vyjádřit n-řádkovým determinantem

$$T_n(x) = \begin{vmatrix} x, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 1, & 2x, & 1, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 2x, & \ldots, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 2x, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1, & 2x \end{vmatrix} .$$

2. Budiž n přirozené číslo. Označme S_n množinu těch celých čísel m, $0 < m \leqq n(n-1)$, která nejsou dělitelna ani číslem n, ani $n-1$. Potom S_n má $(n-1)(n-2)$ prvků a platí:

Ke každému číslu $k \in S_n$ existuje právě jedno číslo $k' \in S_n$ tak, že pro $\varepsilon^2 = 1$ je

$$k' \equiv \varepsilon(2n-1)\,k \mod 2n(n-1)\,. \tag{7}$$

Je $k' \neq k$ a k číslu k' obdobně sestrojené číslo je opět k.

Důkaz. První část je zřejmá. Pro dané $k \in S_n$ existují čísla k_i, $i = 1, 2$, tak, že $-n(n-1) \leqq k_i < n(n-1)$ a $k_i \equiv (-1)^i(2n-1)\,k \mod 2n(n-1)$. Poněvadž čísla $2n-1$ a $2n(n-1)$ jsou nesoudělná, je $k_i \neq 0$, a dále $k_1 = -k_2$, neboť $k_1 \equiv -k_2 \mod 2n(n-1)$. Má tedy právě jedno z čísel k_1, k_2, označme je k' (a tedy vůbec právě jedno) vlastnost, že je $0 < k' < n(n-1)$ a že platí (7). Kdyby k' bylo dělitelno n resp. $n-1$, pak by i k bylo dělitelno n resp. $n-1$ proti předpokladu. Tedy $k' \in S_n$. Kdyby $k' = k$, pak by pro $\varepsilon = 1$ resp. $\varepsilon = -1$ bylo k dělitelné n resp. $n-1$, což je spor. Konečně číslo k'' obdobně sestrojené pro k' je

$$k'' \equiv \varepsilon'(2n-1)\,k' \equiv \varepsilon\varepsilon'[4n(n-1)+1]\,k \equiv \varepsilon\varepsilon' k \equiv k \mod 2n(n-1)$$

pro $\varepsilon' = \varepsilon$, takže $k'' = k$.

Poznámka. Všechna čísla z S_n se tedy rozpadají v $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ dvojic (k, k') čísel navzájem sdružených podle (7).

3. Nechť n je celé číslo, $n > 1$. Platí $\cos nu = \cos nv$, $\cos(n-1)\,u = \cos(n-1)\,v$, $0 \leqq u \leqq \pi$, $0 \leqq v \leqq \pi$, $u \neq v$ právě tehdy, je-li $u = \dfrac{k\pi}{n(n-1)}$, $v = \dfrac{k'\pi}{n(n-1)}$, kde k a k' jsou sdružená čísla z S_n.

Důkaz. Nechť pro $n > 1$ je $\cos nu = \cos nv$, $\cos(n-1)\,u = \cos(n-1)\,v$, $0 \leqq u \leqq \pi$, $0 \leqq v \leqq \pi$, $u \neq v$. Potom existují čísla ε_1, ε_2, $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$, a celá čísla r, s tak, že

$$nu = \varepsilon_1 nv + 2r\pi\,, \tag{8a}$$

$$(n-1)\,u = \varepsilon_2(n-1)\,v + 2s\pi\,. \tag{8b}$$

Snadno se zjistí, že $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ (kdyby $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, pak $u = v$), takže (řešením (8a) a (8b)) čísla $k = \dfrac{n(n-1)}{\pi}u$, $k' = \dfrac{n(n-1)}{\pi}v$ jsou celá. Kdyby k bylo dělitelné n resp. $n-1$, pak by (jak se zjistí eliminací v) $r = 0$ resp. $s = 0$ a $u = v$ proti předpokladu. Tedy $k \in S_n$. Násobením (8a) i (8b) číslem $\dfrac{n(n-1)}{\pi}$ a sečtením plyne $k' = \varepsilon_1(2n-1)\,k - 2n(n-1)\,\varepsilon_1(r+s)$, a tedy (7). Důkaz obráceného tvrzení je snadný.

Teď již můžeme dokázat větu 2:

Z pomocného tvrzení 1 plyne, že M, M' a M'' jsou disjunktní části množiny R_n bodů (x, y) tvaru

$$x = T_n(t),\ y = T_{n+1}(t)\,, \tag{9}$$

a to M pro $-1 \leqq t \leqq 1$, $t = \cos\tau$, M' pro $t > 1$, $t = \cosh\sigma$, a konečně M'' pro $t < -1$, $t = -\cosh\zeta$. Avšak R_n je racionální křivka: (1) je splněna pro $f(t) = T_n(t)$, $g(t) = T_{n-1}(t)$, $h(t) = 1$; přitom bod (1,1) odpovídá jen parametru $t_0 = 1$, a matice (2) má hodnost 2 pro $t_0 = 1$, neboť $T'_n(1) = n^2$ (dokáže se indukcí po derivování vztahu $T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$, který plyne z (6)).

Budiž teď $k \in S_n$. Dokážeme, že bod $P_k(x_k, y_k)$, $x_k = \cos\dfrac{k}{n-1}\pi$, $y_k = \cos\dfrac{k}{n}\pi$, je uzlový bod R_n: bod P_k totiž můžeme dostat jen v části M, neboť $|x_k| \leqq 1$, $|y_k| \leqq 1$. Z pomocných tvrzení 3 a 2 snadno plyne, že P_k dostaneme právě pro dva různé parametry $t_1 = \cos\dfrac{k\pi}{n(n-1)}$, $t_2 = \cos\dfrac{k'\pi}{n(n-1)}$, kde k' je číslo sdružené s k v S_n. Že pro tyto hodnoty je splněna nerovnost (3), vyplývá odtud, že pro $t = \cos\tau$, $0 \neq \tau \neq \pi$, je $T_n'(t) = \dfrac{n \sin n\tau}{\sin\tau}$, a ze vztahu (7).

Lze tedy každé dvojici čísel sdružených v S_n přiřadit jeden uzlový bod R_n (tyto body jsou navzájem různé), t. j. R_n má alespoň (a podle citované známé věty právě) $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ uzlových bodů.

Poznamenejme ještě, že z identity $T_{n(n-1)}(\cos\xi) = T_n(\cos(n-1)\,\xi) = T_{n-1}(\cos n\xi)$ plyne, že R_n má rovnici $T_{n-1}(x) - T_n(y) = 0$. Vyjdeme-li od této rovnice a použijeme-li známých vlastností Čebyševových polynomů, můžeme[5]) postupovat jednodušeji. Dokážeme totiž (nezávisle na větě 2) tuto větu:

Věta 3. *Nechť $T_k(x)$ jsou Čebyševovy polynomy k-tého stupně, $k \geqq 0$, $n > 1$ přirozené číslo. Pak*

$$f(x, y) \equiv T_{n-1}(x) - T_n(y) = 0$$

je rovnice racionální křivky n-tého stupně, která má $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ uzlových bodů.

Důkaz. Že $f(x, y)$ je ireducibilní polynom (i nad tělesem komplexních čísel), plyne odtud, že

$$f(x, y) = ay^n + bx^{n-1} + g(x, y)\,,$$

kde $ab \neq 0$ a $g(x, y)$ je polynom stupně nejvýše $n-2$. Vícenásobné body $f(x, y) = 0$ jsou právě ty body (x, y) pro něž je současně $f(x, y) = T_{n-1}(x) - T_n(y) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = T'_{n-1}(x) = 0$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -T'_n(y) = 0$. Pro Čebyševovy polynomy však platí[6])

---

[5]) Podle upozornění akademika *E. Čecha*.

[6]) Na př. *И. П. Натансон:* Конструктивная теория функций, 1949, str. 69.

$$k^2(1 - T_k^2(x)) = (1 - x^2)\, T_k'^2(x)\,, \tag{10}$$

$$(1 - x^2)\, T_k''(x) - xT_k'(x) + k^2\, T_k(x) = 0\,. \tag{11}$$

Z (11) a (10) je $T_k'(1) = k^2$, takže podle předchozího vícenásobné body $f(x, y) = 0$ jsou právě ty body (x, y), pro něž je pro $\varepsilon^2 = 1$

$$T_{n-1}(x) = T_n(y) = \varepsilon,\ (x^2 - 1)(y^2 - 1) \neq 0\,.$$

Je-li n liché (resp. sudé), je $T_{n-1}(x) = 1$ právě pro $\frac{n-3}{2}\left(\text{resp. } \frac{n-2}{2}\right)$ různých hodnot x (totiž pro $x_k = \cos\frac{2k\pi}{n-1}$, $0 < 2k < n - 1$, $k = 1, 2, \ldots$), $T_{n-1}(x) = -1$ právě pro $\frac{n-1}{2}\left(\text{resp. } \frac{n-2}{2}\right)$ různých x $\left(\bar{x}_l = \cos\frac{(2l-1)\,\pi}{n-1}\right.$, $\left.0 < 2l - 1 < n - 1,\ l = 1, 2, \ldots\right)$. Obdobně $T_n(y) = 1$ pro $\frac{n-1}{2}\left(\text{resp. } \frac{n-2}{2}\right)$ různých hodnot y, $T_n(y) = -1$ pro $\frac{n-1}{2}\left(\text{resp. } \frac{n}{2}\right)$ různých y. Dostáváme tím pro n liché (sudé) $\frac{1}{4}(n - 3)(n - 1) + \frac{1}{4}(n - 1)^2$ (resp. $\frac{1}{4}(n - 2)^2 + \frac{1}{4}(n - 2)\, n$), t. j. vždy $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$, různých vícenásobných bodů (x, y), pro něž je vždy $|x| < 1$, $|y| < 1$.

Je-li (x, y) takový vícenásobný bod, pro který je $T_{n-1}(x) = T_n(y) = \varepsilon$, $\varepsilon^2 = 1$, pak pro tento bod je podle (11)

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = -T_{n-1}''(x)\, T_n''(y) = -\frac{(n-1)^2\, n^2 \varepsilon^2}{(1 - x^2)(1 - y^2)} < 0\,,$$

t. j. každý takový bod je uzlový (dvojnásobný bod s reálnými různými tečnami). Protože každá ireducibilní křivka n-tého stupně s $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ dvojnásobnými body je racionální, je tím věta dokázána.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 79 (1954)

ÚLOHY A PROBLÉMY

Zahajujeme hlídku úloh a problémů, která byla slíbena v minulém čísle ve článku „Nové úkoly".

Tato hlídka není míněna jako souhrn dosud neřešených problémů, ale spíše jako tribuna matematických dotazů. Budou zde problémy těžší, lehčí, někdy i velmi jednoduché; je pravděpodobné, že se na mnohé z nich již najde odpověď v matematické literatuře. Budeme uveřejňovat také problémy, jejichž řešení je autorovi známo, jestliže autor bude hledat nějaké jednodušší řešení nebo jestliže bude pokládat problém za velmi zajímavý; to ovšem bude vždy poznamenáno.

Prosíme čtenáře, aby řešení nebo odkaz na literaturu zasílali redakci, nebo aby navázali styk přímo s autorem.

Rovněž žádáme naše čtenáře, aby nám zasílali problémy vhodné pro tuto hlídku.

Redakce.

1. Budiž a přirozené číslo, které není druhou mocninou celého čísla. Rozhodněte, zda existují přirozená čísla x, y taková, aby platilo

$$ax^2 + 1 = y^2 .$$

Jan Mařík, Praha.

2. Vyšetřete chování řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1} \cdot x^{\frac{n(n-1)}{2}}$ na kružnici $|x| = 1$ (spojitost limity, stejnoměrnost konvergence). Podobně pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot b_n} \cdot \frac{x^{b_n} - 1}{x - 1} \cdot x^{c_n}$, kde b_n jsou přirozená čísla, $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$, a potom pro mocninnou řadu, vzniklou „rozepsáním" této řady.

Jan Mařík, Praha.

3. Platí věta: Nechť $a_n \to 0$. Pak řada $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje pro každé x, pro něž platí $|x| = 1$ a které je bodem regularity funkce f. Nelze dokázat podobnou větu pro sčítatelnost místo pro konvergenci? (Rozhodněte na př. o správnosti této věty: Nechť platí $\frac{a_n}{n} \to 0$. Pak je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sčítatelná podle aritmetického středu v každém bodě x ($|x| = 1$), který je jejím bodem regularity).

Jan Mařík, Praha.

4. Buď C jednoduchá rovinná křivka konečné délky a D její vnitřek (komplement). Budiž $t_0 \in C$. Utvořme funkci $\vartheta(z, t)$, kde z probíhá množinu D a t množinu $(C - t_0)$, tak, aby $\vartheta(z, t)$ bylo úhlem mezi kladným směrem osy x a vektorem $\overrightarrow{zt}$ a aby funkce ϑ byla spojitá. Budiž

$$F(z) = \int_C |\mathrm{d}_t \vartheta(z, t)| .$$

(Funkce F je zřejmě spojitá na D a nezávisí na volbě funkce ϑ.) Dokažte (přesně a pokud možno jednoduše) nějakou nutnou a postačující podmínku, aby funkce F byla omezená. (Viz *J. Radon*, Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss., Wien, Math. Naturw. Kl. *128*, Abt. 2a, IIa, 1123; 1919.)

Ivo Babuška, Praha.

5. Buď T čtverec. Rozhodněte, zda existuje funkce φ holomorfní na T taková, že platí

$$\iint_T (\mathrm{Re}\, \varphi)^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y < \infty , \tag{1}$$

$$\iint_T (\mathrm{Im}\, \varphi)^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \infty . \tag{2}$$

Poznámka: Lze dokázat, že platí-li (1), pak je

$$\iint_T (\mathrm{Im}\, \varphi)^{2-\varepsilon} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y < \infty$$

pro každé $\varepsilon > 0$.

Ivo Babuška, Praha.

REFERÁTY

O POPULARISACI MATEMATIKY

(Referát o diskusi konané v matematické obci pražské za přítomnosti zástupce Československé společnosti pro šíření politických a vědeckých znalostí dne 26. října 1953.)

Schůzi zahájil zástupce Československé společnosti pro šíření politických a vědeckých znalostí (v dalším Společnost) s. ing. *Čeleda* projevem, v němž se zmínil o thematickém plánu, který navrhla pro matematiku Společnost. Upozornil, že tím Společnost nijak nechce vnucovat matematikům tato themata, nýbrž že je to pouhý podnět a že Společnost ráda přijme přednášku na jakékoli thema.

V diskusi asp. dr *Hájek* nastínil plán popularisační přednášky z matematické statistiky, která se chystá, a upozornil na to, že přední výkony na poli matematiky jsou málo využity k šíření zájmu o matematiku. Jako vzor popularisace uvedl přednášky *J. B. S. Haldane*.

Dále se ke slovu přihlásil akad. *Jarník* a upozornil na obtíže spojené se snahou popularisovat matematiku; aktuální problémy v matematice se téměř nedají popularisovat, a na druhé straně to, co se dá popularisovat, nemá přímý praktický význam a může vzbudit dojem pouhého hraní nebo „zajímavé kuriosity". Podobný názor vyslovil akademík *Kořínek*.

Doc. *Nožička* promluvil o všeobecném názoru na matematiku; uvedl několik příkladů, z nichž bylo patrné, jak veřejnost nesprávně chápe, co je vlastně matematika, a vůbec neví, v čem vlastně spočívá matematikova práce. Málokterý nematematik správně chápe na př. význam matematických formulí.

Akad. *Novák* upozornil, že popularisovat matematiku je umění a že by nám zde mohl být vzorem Haldane; ten zpravidla vychází od aplikací matematiky, od konkretních příkladů.

Doc. *Jeníček* se zmínil o tom, že nikdo nepopularisuje na př. hru na klavír; nesmíme chtít při popularisačních přednáškách někoho mnoho naučit, nýbrž se musíme jen snažit, aby posluchači získali lepší poměr k vědě.

Asp. dr *Hájek* se připojil k projevu doc. Nožičky a řekl, že širší veřejnost nevidí rozdíl mezi matematikem a účetním.

Prof. *Vyčichlo* poukázal na důležitost školských otázek; v popularisačních přednáškách bychom měli pomáhat škole, vyložit pojetí učebnic, osnov a všímat si též učitelů.

Doc. *Havlíček* projevil názor, že je třeba vycházet z příkladů, že však je třeba též ukázat, že matematik též uvažuje, nejen „počítá".

Akad. *Čech* prohlásil, že je z dosavadního průběhu diskuse patrné, že matematiku lze snadno popularisovat, protože většina toho, co v diskusi bylo řečeno, by se dobře hodila do nějaké populární přednášky. Zdá se však, že přítomní by chtěli na populární přednášce mluvit méně srozumitelně než v této diskusi. Dále řekl, že by byl ochoten proslovit dvě přednášky za rok, kdyby si sám směl zvolit thema; navrhl pak tyto náměty: 1. Struktura matematického jazyka; proč matematika učí kriticky číst. 2. Trojčlenka. 3. Proč máme různé druhy studia matematiky na universitě. 4. Proč je nedostatek matematických kádrů. 5. Stojí matematický ústav za peníze, které do něho společnost vkládá? 6. Vývoj Karlovy university.

Akad. Čech pak upozornil, že bychom neměli práci pro veřejnost odtrhovat od své vědecké a pedagogické práce. K projevu prof. Vyčichla pak připomněl, že je třeba se starat také o závodní učiliště, nejen o všeobecně vzdělávací školy a že by se tato práce měla stát též úkolem JČMF.

Akad. *Jarník* pak upozornil, že je těžké vysvětlit širší veřejnosti boj proti idealismu uvnitř matematiky samé; ve směru ideologickém by bylo asi lepší zachytit boj proti idealismu na frontě „matematika — veřejnost", snažit se o to, aby veřejnost získala k matematice správný poměr. Jde o jistý druh propagace; JČMF by měla provádět tuto propagaci v kádrech odbornějších, kdežto Společnost v širší veřejnosti.

Doc. *Holubář* se pak zmínil o vyučování matematice. K této věci mají někdy špatný poměr učitelé i rodiče; bylo by třeba, aby se Společnost obracela též na rodičovská sdružení.

Prof. *Janko* upozornil na důležitost popularisace; tímto způsobem statistika rychle pronikla do výroby. Byly vypracovány texty, s nimiž pak absolventi speciální větve matematické statistiky seznámili své spolupracovníky v praxi.

Prof. *Knichal* podotkl, že přednášková forma pro popularisaci matematiky nevyhovuje právě nejlépe; bylo by snad lépe vytvořit jakési pracovní skupinky, kde by se dávaly též úlohy. Je třeba aktivnější účasti.

Prof. *Pleskot* upozornil, že v t. zv. „středních kádrech" je větší zájem o matematické myšlení, než by se zdálo, a poznamenal, že se leckdy osvědčily internátní kursy matematiky.

Akademik *Kořínek* pak řekl, že je sice popularisace vědy důležitá, že však v tomto směru budeme moci málo vykonat pro velké pracovní přetížení všech našich matematiků.

Doc. *Nožička* se pak zmínil o tom, že někteří vědečtí pracovníci jsou přetíženi organisační prací, že je však jejich vina, že si to nedovedou jinak zařídit. Popularisace vědy je důležitější než mnohé funkce, které nám ubírají čas.

Debatu uzavřel ing. *Čeleda.* Zmínil se o tom, že Společnost má též publikační komisi, která vydává knížečky asi o 20 stránkách formátu A5, takže je možná popularisační činnost též v této formě. Dále prohlásil, že není třeba mít příliš velké obavy z toho, že veřejnost bude chtít jen přednášky „praktické"; pomoc praxi nesmíme chápat příliš úzce. Vzbudí-li přednáška zájem o vědu, je to rovněž pomoc praxi. Rovněž by bylo možné místo přednášek uspořádat kursy, třeba lidovou universitu. Nakonec poznamenal, že je třeba též odbourávat funkce, jimiž jsme přetíženi; je však třeba začít „zdola". Ještě jednou pak upozornil, že thematický plán, který Společnost matematikům předložila, nikterak není míněn tak, že by Společnost chtěla matematikům něco předpisovat; Společnost naopak vítá každý návrh na thema přednášky a tím spíše přednášku na libovolný námět.

Jan Mařík, Praha.

O FOURIEROVĚ TRANSFORMACI A DIRACOVĚ δ-FUNKCI

(Referát o přednášce *Jana Mařika*, přednesené 2. listopadu 1953 v matematické obci pražské.)

Přednášející napřed zopakoval postup, pomocí něhož bývá ve fysikálních učebnicích naznačen přechod od formule $S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$ k inversní formuli $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega)$

$e^{i\omega t}\,d\omega$. Naznačil pak fysikální význam funkce $S(\omega)$, která určuje t. zv. spektrum funkce $f(t)$. Je jistě přirozené vyšetřovat na př. též spektrum funkce tvaru $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\omega_n t}$. Integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$ však neexistuje ani v jednoduchém případě $f(t) = e^{it}$. Jestliže však utvoříme formálně „integrál" $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi a_n \delta_{\omega_n}(\omega) \right) e^{i\omega t}\, d\omega$, kde δ_{ω_n} je Diracova funkce, patřící k číslu ω_n, dostaneme

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi a_n \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\omega_n}(\omega) \,.\, e^{i\omega t}\, d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\omega_n t} = f(t)\,;$$

můžeme tedy říci, že $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi a_n\, \delta_{\omega_n}(\omega)$ je spektrum funkce $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\omega_n t}$. Tak dostáváme formálně stejný vzorec $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$ pro funkce se spektrem spojitým jako pro funkce se spektrem čárovým. Chceme-li ovšem tomuto vzorci dát v obou případech přesný smysl, musíme se vzdát požadavku, aby každé spektrum bylo určeno nějakou funkcí; zřejmě neexistuje funkce ψ taková, aby na př. pro každou spojitou funkci f platilo $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, f(x)\, dx = f(0)$, jak se o t. zv. Diracově δ-funkci předpokládá. δ-funkci samu lze snadno vyjádřit jakousi měrou; chceme-li však definovat také její derivace, pak nám již theorie míry nestačí a potřebujeme větší aparát. Takovým aparátem jsou Schwartzovy distribuce. Prostor distribucí obsahuje (mimo jiné) všechny lokálně integrovatelné funkce a lokálně konečné míry; každá distribuce má všechny derivace (tyto derivace jsou opět distribucemi). Pro jistý podprostor distribucí lze pak definovat Fourierovu transformaci; do tohoto podprostoru patří na př. všechny funkce, které ve směru do $\pm\infty$ nerostou rychleji než nějaká mocnina $|x|$, a všechny derivace takovýchto funkcí. Na tomto podprostoru — budeme jej značit S — určuje pak Fourierova transformace operátor, který zobrazuje prostě S na S; komplexně sdružený operátor je k němu inversní. Operátor $\mathfrak{F}$, určený Fourierovou transformací na množině S, má pak obvyklé „dobré" vlastnosti; je-li na př. $\mathfrak{F}(T) = V$, je $\mathfrak{F}(T') = i\omega\, V(T, V \in S)$. Dále platí $\mathfrak{F}(e^{i\omega t}) = 2\pi\delta_\omega$, tedy opravdu

$$\mathfrak{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\omega_n t} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi a_n \delta_{\omega_n}\,.$$

Zejména je $\mathfrak{F}(1) = 2\pi\delta_0$; Fourierovým obrazem polynomu je pak lineární kombinace derivací δ-funkcí.

Je tedy vidět, že Fourierova transformace, definovaná na množině distribucí S, vyhovuje v praxi lépe než Fourierova transformace, definovaná na nějaké množině funkcí; formální operace, kterých se obvykle používá a které při „obyčejné" transformaci nemají žádný určitý smysl, se pak stanou plně „oprávněnými". *Jan Mařík*, Praha.

O POVOLÁNÍ MATEMATIKA

(Výtah z referátu akademika *Eduarda Čecha* o brožuře О профессии математика, napsané akademikem *A. N. Kolmogorovem* a vydané Ministerstvem vysokých škol SSSR, Moskva 1952, a z diskuse. Pořádáno matematickou obcí pražskou dne 7. prosince 1953.)

Brožura obsahuje mnoho informací, o kterých je třeba diskutovat již z toho důvodu, že o matematice v SSSR máme méně důkladné informace, než je tomu u jiných oborů. Ne-jedná se při tom pouze o činnost vědeckou, ale i o činnost pedagogickou, ve které má právě sovětská škola bohaté zkušenosti. Nutno proto došlé materiály pečlivě studovat. Brožura je přeložena do češtiny, ale některé partie jsou vynechány.

Akademik *Ed. Čech* vyzdvihl při té příležitosti důležitost přesnosti a správnosti překladů a ukázal některé případy nepřesností v překladu uvedené brožury; ukázal, že potom překlad jako celek nevyniká takovou průrazností jako originál.

Z obsahu brožury zdůraznil autorův názor, že úkolem matematika je především bádat o nových výsledcích a nespokojit se pouze s hromaděním hotových výsledků. Aby matematik začal tvořit co nejdříve, je nutno, aby školitelé předkládali svým žákům konkretně formulované speciální problémy.

Potom upozornil na článek o A. N. Kolmogorovovi, uveřejněný k jeho padesátinám v Dokladech AN SSSR, kde je zevrubně popsána vědecká dráha A. N. Kolmogorova. Je tam podán náčrt jeho životopisu s připomínkami k některým úsekům jeho života.

Při té příležitosti akademik Čech dále upozornil na účelnost zavedení velkého množství seminářů z nejrůznějších partií matematiky, jak je tomu na Lomonosovově universitě v Moskvě, a dodal, že je nutno se postarat o co nejužší spolupráci matematiků s techniky a fysiky. Matematicko-fysikální fakulta je povolána k tomu, aby vedla výuku matematiky vůbec, na všech druzích škol.

Zdůraznil dále význam a úspěchy Moskevské školy pro rozšiřování matematiky ve všech místech SSSR i její snahu, aby pedagogičtí pracovníci se věnovali své práci co nejpečlivěji a nespoléhali výhradně na učebnice a neulehčovali si tak práci.

Přitom vyzdvihl především význam studentských (žákovských) kroužků; v jejich práci se obráží jednak celkové zaměření práce matematické fakulty (byť ve speciálních problémech), jednak jsou v nich žáci vedeni k výzkumu právě v těch partiích matematiky, které jsou v dané etapě vývoje pro rozvoj matematiky nejdůležitější.

Nakonec se akademik Čech dotkl matematických olympiad konaných v SSSR, jejich smyslu a významu.

Diskuse: Dr *J. Veselka* uvítal kritiku překladů, jak ji podal akademik Čech. V odpovědi akademik Čech doporučil trvat při překladech na těchto třech věcech: 1. aby překladatel thema ovládal, 2. aby byly pořádány o překladech diskuse, 3. aby překlady byly doplňovány vlastními poznámkami.

Akademik *J. Novák* doporučuje, jak se to osvědčilo při překladu knihy Gnedenka a Chinčina „Elementární úvod do theorie pravděpodobnosti", spolupráci s filology, aby se předešlo nepřesným překladům.

Zapsal *František Fabián*, Praha.

OSKULAČNÍ KVADRIKY S DANÝM STŘEDEM

(Referát o přednášce akademika *Eduarda Čecha*, přednesené v matematické obci pražské dne 14. prosince 1953.)

Přednášející uvedl nejprve některé výsledky, jež uveřejnil v Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Wroclaw, VII (1952), No 1. Je-li totiž H nadplocha v afinním prostoru A_{n+1} dimense $n + 1$, O pevný bod v A_{n+1}, který neleží na H, lze zvolit v A_{n+1} lineární soustavu souřadnic $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tak, že O je počátek a H má rovnici $f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 1$, kde f je homogenní funkce druhého stupně. Má-li f spojité parciální derivace druhého řádu, potom existuje v každém bodě $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ nadplochy H právě jedna oskulační kvadrika se středem v bodě O a její rovnice je $\sum\limits_{i,k=0}^{n} f_{ik} y_i y_k = 2$ (přitom $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ značí běžný bod a f_{ik} zkráceně $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_k}$, $i, k = 0, 1, \ldots, n$). Pomocí tohoto vyjádření lze daleko jednodušeji než jinými methodami studovat nadplochy v A_{n+1} té vlastnosti, že všechny jejich oskulační kvadriky s pevným středem O vyhovují některým podmínkám.

Akademik Čech pak ukázal, jak lze některé z těchto výsledků aplikovat při řešení speciálních parciálních diferenciálních rovnic. Použitím uvedených method lze na př. zjistit, že rovnice (f je funkce $x_0, x_1, \ldots, x_n$)

$$f - \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \tfrac{1}{2} \sum_{i,k=0}^{n} x_i x_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_k} = 0$$

má obecné řešení tvaru $f = f_1 + f_2$, kde f_1 resp. f_2 jsou homogenní funkce prvního resp. druhého stupně. Závěrem vyzval akademik Čech přítomné, aby dokázali uvedený tvar obecného řešení přímo. To bylo provedeno různými způsoby. Nejjednodušší je položit $x_i = y_i t$. Tím přejde rovnice v obyčejnou diferenciální rovnici Eulerova typu vzhledem k nezávisle proměnné t. *Miroslav Fiedler*, Praha.

MATYÁŠ LERCH A JEHO DÍLO

(Referát o přednášce člena korespondenta ČSAV *Otakara Borůvky*, přednesené v matematické obci pražské dne 11. ledna 1954.)

Zveřejněné vědecké dílo *Matyáše Lercha*, prvního profesora matematiky na přírodovědecké fakultě M. U. v Brně, se skládá z 238 vědeckých prací (mimo drobností), které byly uveřejněny ve 32 různých časopisech nebo sbornících našich a zahraničních. Z nich je psáno 118 česky, 80 francouzsky, 34 německy, 3 chorvatsky, 2 polsky a 1 portugalsky. Prací z matematické analysy je 158, z theorie čísel 48, z geometrie 13, z jiných oborů 19.

Lerchovo vědecké dílo nebylo dosud systematicky studováno a kriticky zhodnoceno. V letech 1945—48 jsem konal na přírodovědecké fakultě M. U. v Brně „Seminář pro studium díla Matyáše Lercha", jehož cílem bylo upozornit studenty na Lerchovy práce a přivést je k jejich studiu. Začátkem r. 1952 podjal jsem se úkolu připravit se skupinou brněnských spolupracovníků, v rámci činnosti tehdejšího Ústředního ústavu matematického, nyní Matematického ústavu ČSAV, kritické vydání Lerchových spisů z matematické analysy. Práce byla rozvržena na tři roky a v nynějším stadiu je splněna přibližně ze dvou třetin. Zúčastňují se jí mladší pracovníci z brněnských vysokých škol, zejména pracovníci z Vojenské technické akademie, dr *Jiří Čermák* a dr *Věra Radochová*, a z Vysoké školy stavitelství doc. dr *Ludvík Frank*. V rámci těchto prací byl vypracován Lerchův životopis (dr L. Frank) a byl sestaven chronologicky uspořádaný úplný seznam jeho prací (dr *Jos. Škrášek*); o tom viz články v Časopisu pro pěst. mat., *2 (78)*, 1953, 119 a n. Současně byl prostudován (dr L. Frank) Lerchův vědecký spor s německým matematikem *A. Pringsheimem*, o němž rovněž bude uveřejněna zpráva.

Při studiu Lerchova díla jde o tyto úkoly:

1. O roztřídění prací do několika skupin, které se vždy týkají otázek příbuzných nebo podobných, u nichž lze předvídat obsahové nebo methodické souvislosti;

2. o zkoumání výsledků co do důležitosti, t. j. ve vztahu k jiným výsledkům Lerchovým nebo jiných autorů;

3. o zkoumání základních methodických prvků v Lerchových důkazech co do účinnosti a dosahu; o studium ojedinělých obratů vedoucích k řešení předložených otázek.

Přitom jest ovšem věnovat pozornost tomu, zda jde o věci nové či nikoli. Jako studijní pomůcky používáme těchto pramenů: 1. Spisy klasiků, zejména Cauchyho, Weierstrasse a Kroneckera; 2. monografie, disertace a knižní díla starší i moderní, pokud mohou obsahovat užitečné údaje o Lerchových pracích; 3. příslušné statě v Encyklopedii; 4. recense Lerchových prací v časopise Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik; 5. jednotlivé články v časopisech, pokud mají vztah k Lerchovu dílu.

Organisačně je práce rozvržena na řadu spolupracovníků, při čemž je zajištěno, že jejich činnost vyústí vždy v jednolitý referát o celé skupině studovaných prací, ucelený obsahově i slohově. Některé z těchto referátů budou již v tomto roce 1954 dodány k uveřejnění.

V druhé části své přednášky jsem předvedl ukázku výsledků týkajících se Lerchova přínosu k theorii funkce gamma, čímž jsem navázal na právě vyšlý článek *V. V. Gussova* „Přínos ruských učenců v theorii funkce gamma" (Sovětská věda, Matematika-fysika-astronomie, roč. III, 1953, 540 a n.). V závěru jsem popsal všeobecné znaky Lerchova vědeckého díla.

Otakar Borůvka, Brno.

O HAUSDORFFOVĚ MÍŘE

(Referát o přednášce akademika *Vojtěcha Jarníka*, přednesené v matematické obci pražské dne 18. ledna 1954.)

Přednášející promluvil o aplikacích Hausdorffovy míry na aritmeticky definované množiny na přímce. Nejdříve uvedeme definici *vnější Hausdorffovy míry:*

Budiž M množina na přímce a budiž $f(d)$ funkce definovaná pro $d > 0$ a monotonně klesající k nule pro $d \to 0$. Zvolme číslo $\varrho > 0$ a pokryjme množinu M posloupností intervalů $I_1, I_2, I_3, \ldots$, jejichž délky $|I_1|, |I_2|, |I_3|, \ldots$ nepřesahují ϱ. Položme

$$L_\varrho = \inf \sum_{i=1}^{\infty} f(|I_i|),$$

kde infimum bereme pro všechna možná pokrytí splňující uvedené předpoklady. Klesá-li ϱ k nule, potom L_ϱ neroste a tak definujeme

$$\mu(M, f) = \lim_{\varrho \to 0} L_\varrho.$$

$\mu(M, f)$ nazýváme vnější Hausdorffovou měrou — pro stručnost Hausdorffovou měrou — množiny M a snadno lze ukázat, že $\mu(M, f)$ je vnější míra ve smyslu Carathéodoryově.

Zřejmě platí:

Nechť $\dfrac{f_1(d)}{f_2(d)} \to 0$ *pro* $d \to 0$.

Jestliže $\mu(M, f_1) > 0$, *pak* $\mu(M, f_2) = \infty$;

jestliže $\mu(M, f_2) < \infty$, *pak* $\mu(M, f_1) = 0$.

Tím dostává oprávnění definice:

Hausdorffovou dimensí dané množiny M — označíme ji dim M — nazveme infimum takových čísel s $(s > 0)$, že $\mu(M, x^s) = 0$.

Nyní přistoupíme k aplikacím těchto pojmů. Akademik Jarník nejprve dokázal tento obecný výsledek Folksmannův:

Nechť pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ je dáno g_n (> 0) intervalů, které se nepřekrývají a které mají všechny stejnou délku λ_n. Tyto intervaly nazveme intervaly řádu n. Nechť

každý interval řádu n je obsažen v některém intervalu řádu $n - 1$ ($n \geq 2$) a obsahuje alespoň jeden interval řádu $n + 1$. Nechť M_n je sjednocení všech intervalů řádu n,

$$M = \prod_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Položme

$$g_n = 2^{n\sigma_n}, \quad \sigma = \liminf_{n\to\infty} \sigma_n .$$

Nechť dále je

$$\lambda_n = 2^{-n(\nu + o(1))}, \quad \nu > 0 .$$

Potom platí

1. $\dim M \leq \frac{\sigma}{\nu}$;

2. jestliže mimo to každý interval řádu n obsahuje právě $\frac{g_{n+1}}{g_n}$ intervalů řádu $n + 1$ a jestliže posloupnost čísel $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}$ je omezená, $n = 1, 2, 3, \ldots$, potom

$$\dim M = \frac{\sigma}{\nu} .$$

Jako aplikace této Folksmannovy věty akademik Jarník ukázal, že dimense Cantorova diskontinua je $\frac{\lg 2}{\lg 3}$ a že platí toto tvrzení:

Budiž $\mathfrak{A}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel. $\alpha(n)$ nechť je počet prvků posloupnosti $\mathfrak{A}$, které nepřesahují n. Položme

$$D\mathfrak{A} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{n} .$$

Jestliže $\mathfrak{B}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, nechť $\gamma_{\mathfrak{B}}$ je takové číslo, jehož dyadický rozvoj je

$$0, e_1 e_2 e_3 \ldots ,$$

kde $e_i = 1$, jestliže $i \in \mathfrak{B}$, a $e_i = 0$ v opačném případě.

Nechť A je množina všech čísel $\gamma_{\mathfrak{B}}$, kde $\mathfrak{B}$ je posloupnost vybraná z posloupnosti $\mathfrak{A}$. Potom platí

$$\dim A = D(\mathfrak{A}) .$$

Akademik Jarník dále vyložil některé hlubší výsledky Folksmannovy, Chinčinovy a Knichalovy. *Jaroslav Kurzweil*, Praha.

RECENSE ČLÁNKŮ A KNIH

B. V. Kutuzov, **Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie.** Z ruštiny přeložili *Rudolf Zelinka* a *Vlastimil Macháček.* Vydalo nakladatelství ČSAV, sekce matematicko-fysikální, Praha 1953, stran 168, obrazů 164, náklad 3300, cena Kčs 18,—.

Překlad Kutuzovovy knihy vychází v české literatuře již jako třetí spis věnovaný neeukleidovské geometrii. Prvním spisem o této geometrii je *Úvod do neeukleidovské geometrie* od *V. Hlavatého,* který vyšel r. 1926, v druhém vydání r. 1949 a ve kterém je vyložena rovinná geometrie hyperbolická a eliptická; výklad je tu podán na základě projektivní geometrie a to analyticky. Druhý spis vyšel nedávno, v květnu 1953, a jsou to *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského* od *J. B. Pavlíčka.* Zde je vyložena Lobačevského geometrie (hyperbolická) jak rovinná tak prostorová cestou elementárně geometrickou, při čemž těžiště knihy spočívá v důsledném a systematickém vybudování Lobačevského geometrie z axiomů.

Naproti tomu Kutuzovova knížka, jejíž recensi zde podáváme, není systematickým výkladem neeukleidovské geometrie, ale velmi přístupně psanou příručkou „pro učitele matematiky na středních školách a také pro žáky vyšších tříd", jak čteme v poslední větě anotace, uvedené v ruském originále. Tato věta byla v českém překladu vynechána; je zvláštní, že český čtenář není nikde v nějaké poznámce od překladatelů seznámen s tím, že ruský originál má přímo podtitul *Příručka pro učitele středních škol* a že byl jako takový schválen ministerstvem kultury RSFSR.

Podívejme se nyní blíže na obsah Kutuzovovy knížky. Je rozdělena do osmi kapitol, z nichž první čtyři se věnují vlastní Lobačevského geometrii (pouze v rovině) a poslední se zabývají t. zv. základy geometrie.

Kutuzov při svém výkladu vychází z toho, jak sám píše v úvodu, že ani znalost Lobačevského geometrie ani znalost základů geometrie, k nimž je Lobačevského geometrie důležitým předstupněm, není samoúčelná, ale nezbytná k plnějšímu pochopení struktury geometrie, což je zejména důležité pro učitele matematiky. V úvodu je ještě připomenuta zásluha N. I. Lobačevského o objev nové geometrie a stručně shrnuta historie marných pokusů o důkaz pátého Eukleidova postulátu a na závěr zopakovány geometrické věty, které se dají dokázat bez pomoci tohoto postulátu: jsou to jednak věty, jež se probírají na střední škole, a proto jsou uvedeny bez důkazu, jednak věty Legendre-Saccheriovy a některé věty o Saccheriově čtyřúhelníku, jejichž důkazy jsou v textu podány.

První kapitola se zabývá větami, jež měly v historii velký význam: jsou to věty ekvivalentní s Eukleidovým axiomem o rovnoběžkách. Kutuzov dokazuje ekvivalenci těchto vět, při čemž Eukleidův postulát o rovnoběžkách uvádí v podstatě v Playfairově formulaci. Pro úplnost uvedeme výčet těchto vět: Součet úhlů trojúhelníka je roven dvěma pravým. — Ve všech trojúhelnících je součet úhlů týž. — Libovolným bodem, který leží uvnitř dutého úhlu, lze vést přímku, která protíná obě ramena mimo vrchol. — Existují dva podobné neshodné trojúhelníky. — Tři body, které leží uvnitř téže poloroviny vyťaté přímkou a které mají od této přímky stejné vzdálenosti, leží na přímce. — Libovolnými třemi body, které neleží na přímce, lze proložit kružnici. — Střídavé úhly mezi dvěma neprotínajícími se přímkami v rovině a příčkou jsou si rovny. — Strana pravidelného šestiúhelníka je rovna poloměru opsané kružnice.

V druhé kapitole pracuje již Kutuzov s Lobačevského axiomem a probírá jeho nejjednodušší důsledky pro rovinnou geometrii. Při tom se tato kapitola rozvíjí paralelně s kapitolou prvou: ježto axiom Lobačevského je negací Eukleidova axiomu o rovnoběžkách (za předpokladu ovšem, že zůstávají v platnosti všechny ostatní axiomy eukleidovské geometrie), jsou negace vět ekvivalentních s Eukleidovým postulátem v Lobačevského geometrii správnými větami. Utvoříme-li tedy negace k větám dokazovaným v první kapitole, dostáváme přibližně obsah druhé kapitoly. Poučka, že součet úhlů trojúhelníka je menší dvou pravých (jež se opírá v důkazu o Legendrovu větu) je doplněna faktem, že různé trojúhelníky mají různý součet úhlů, z čehož plyne nová věta o shodnosti trojúhelníků: dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech třech úhlech. V souvislosti s tím uvádí Kutuzov „zajímavou větu geometrie Lobačevského, týkající se vztahu mezi úsečkou a úhlem: *Každá úsečka v Lobačevského geometrii definuje určitý úhel*“ (cituji podle recensovaného překladu; v originále stojí „jednoznačně určuje“), jež sama o sobě i v souvislosti s textem, který na tuto větu navazuje, je naprosto nesrozumitelná.

Pozdržme se na chvíli u této věci. Věta v Kutuzovově formulaci (právě tak jako v recensovaném překladu, ačkoliv puntičkářsky vzato by měla přesněji znít „ke každé úsečce lze v Lobačevského geometrii jednoznačně přiřadit určitý úhel“, protože „úsečka“ nemůže nic definovat) není charakteristickou větou pro Lobačevského geometrii, neboť platí i v geometrii Eukleidově: stačí vzít pravý úhel $\sphericalangle AVB$ a uvažovat všechny polopřímky, jež mají počátek v bodě A a protínají rameno VB. Označíme-li proměnný průsečík písmenem X, pak každé úsečce VX je jednojednoznačně přiřazen úhel $\sphericalangle VAX$. Kutuzovovi šlo zde však zřejmě o něco jiného, totiž o fakt, že úsečky mají v Lobačevského geometrii „absolutní míru“, užijeme-li výrazu, jenž pochází od Lamberta a od Legendra. Tento fakt se projevuje takto: jednojednoznačné přiřazení úhlů a úseček v Lobačevského geometrii, jež podává Kutuzov, je předpisem „každé úsečce x přiřadíme ten úhel, který svírají strany rovnostranného trojúhelníka o straně x“ plně určeno, a to v tomto smyslu: jsou-li f_1 a f_2 dvě zobrazení určená tímto předpisem, pak pro každou úsečku x vždy platí $f_1(x) = f_2(x)$. Naproti tomu předpis, který jsme prve udali pro eukleidovskou geometrii, podstatně závisí na velikosti úsečky AV (v tom spočívá právě volba „jednotky“ pro délku), neboť určuje-li pravý úhel $\sphericalangle A_1V_1B_1$ zobrazení f_1 a pravý úhel $\sphericalangle A_2V_2B_2$ zobrazení f_2, pak pro každou úsečku x bude platit $f_1(x) = f_2(x)$ tehdy a jen tehdy, bude-li délka úsečky A_1V_1 táž jako délka úsečky A_2V_2. Uvažovaná věta z Kutuzovova textu by měla znít tedy alespoň takto: „Ke každé úsečce lze v Lobačevského geometrii jednojednoznačně přiřadit určitý úhel, při čemž toto přiřazení je plně určeno nezávisle na volbě délkové jednotky“. Je možné, že toto vše chtěl Kutuzov vystihnout právě slovy, že „každá úsečka jednoznačně definuje určitý úhel“ a že ruskému čtenáři je tato věta srozumitelná, neboť ve vlasti Lobačevského má neeukleidovská geometrie jistou tradici. Pochybuji však, že nezasvěcený čtenář českého překladu by za větou v uvedené formulaci viděl všechno, co by za ní vidět měl.

Vraťme se nyní k obsahu Kutuzovovy knihy. V druhé kapitole se setkáváme dále s větou: uvnitř úhlu existuje takový bod, že každá přímka jím procházející protne nejvýše jedno rameno úhlu mimo vrchol, jež je negací další věty z I. kapitoly. Vedle této formulace uvádí Kutuzov větu ještě v názornějším znění: je-li dán ostrý úhel, pak lze vždy určit takovou kolmici na jedno rameno, jež neprotíná rameno druhé. V dalším pak dokazuje, že mezi všemi takovými kolmicemi existuje kolmice nejbližší vrcholu. Zbývající odstavce druhé kapitoly jednají o ekvidistantní křivce, o úhlech Saccheriho čtyřúhelníka při horní základně, o trojúhelnících, jimž nelze opsat kružnici, a o faktu, že strana pravidelného šestiúhelníka je v Lobačevského rovině větší než poloměr jemu opsané kružnice.

Třetí kapitola je věnována vzájemné poloze přímek v Lobačevského rovině. Je zde zaveden pojem přímek souběžných a rozběžných, odvozeny základní vlastnosti vztahu orientované souběžnosti, totiž symetrie a transitivnost (zde Kutuzov přehlédl, že je nutno pokládat za souběžné i splývající přímky, neboť by jinak obecně formulovaná vlastnost transitivnosti neplatila) a vlastnosti přímek rozběžných. Při tom větu, že dvě rozběžky mají právě jednu společnou kolmici, dokazuje svým vlastním a novým způsobem, který pochází z r. 1942. Kromě toho je v této kapitole ukázáno, že dvě souběžky se v orientaci souběžnosti k sobě blíží asymptoticky, v orientaci opačné se neomezeně vzdalují, dále je zaveden úhel souběžnosti a probrány některé zvláštní polohy přímek v rovině, jako je asymptotický trojúhelník. Na závěr je ukázáno, jak lze různými způsoby zavést souřadnice v Lobačevského rovině (a to souřadnice pravoúhlé a Beltramiho; o souřadnicích ekvidistantních tu zmínky není).

Ve čtvrté kapitole je vyložena theorie obsahů mnohoúhelníků Lobačevského roviny, jež je zde obzvláště jednoduchá, protože obsah trojúhelníka je až na faktor úměrnosti roven defektu tohoto trojúhelníka. Důkaz tohoto tvrzení je vlastně jediným předmětem čtvrté kapitoly. Důkaz vychází z toho, že součet defektů trojúhelníků, na něž je daný trojúhelník rozdělen, je roven defektu tohoto daného trojúhelníka. Protože obsah mnohoúhelníka má tu vlastnost, že 1. shodným mnohoúhelníkům je přiřazen týž obsah a 2. obsah je additivní v tom smyslu, že součet obsahů mnohoúhelníků, na něž je daný mnohoúhelník rozdělen, je roven obsahu mnohoúhelníka původního, je tím ukázáno, že defekt trojúhelníka splňuje oba požadavky na obsah. Kutuzov však dokazuje ještě přímým důkazem, že poměr „obsahů" dvou trojúhelníků je týž jako poměr jejich defektů, jestliže tentokrát bereme „obsah" ve smyslu „rovnoplochosti rozkladem" (podle Hilberta), kdy dva mnohoúhelníky pokládáme za rovnoploché, jsou-li 1. buď shodné nebo 2. je lze rozdělit úsečkami tak, že ze vzniklých částí lze složit shodné mnohoúhelníky. Dále se Kutuzov zmiňuje ještě o faktu, že součet úhlů trojúhelníka se tím více blíží dvěma pravým, čím menší je jeho obsah a naopak, že žádný trojúhelník v Lobačevského rovině nemůže mít obsah větší než je určité číslo. Za toto číslo lze vzít obsah limitního trojúhelníka (jehož strany jsou vzájemně souběžné přímky). Odtud plyne další věta ekvivalentní s Eukleidovým postulátem o rovnoběžkách: ke každému číslu existuje trojúhelník, jehož obsah je větší než toto číslo. Závěrem Kutuzov hodnotí zásluhy Lobačevského, který ve svých pracích novou geometrii velmi široce a hluboce rozpracoval, a stručně se zmiňuje o významu neeukleidovské geometrie pro celou matematiku.

Jak jsme již uvedli, věnuje se Kutuzov v posledních čtyřech kapitolách základům geometrie. Svůj výklad začíná v páté kapitole rozborem nejstaršího díla z tohoto oboru, totiž Eukleidových Základů. Analysuje cíl Eukleidova spisu, hodnotí jeho přínos i nedostatky a ukazuje, jak teprve v 19. stol. bylo cíle dosaženo pracemi *M. Pasche* a později *D. Hilberta.* V šesté kapitole je pak dosti podrobně vyložen Hilbertův axiomatický výklad geometrie. Poměrně obsažná a látkově bohatá je sedmá kapitola, která jedná o modelech (interpretacích) geometrie. Vedle Fedorovovy interpretace eukleidovské prostorové geometrie, která je u nás známa pod názvem „cyklografie", a analytické interpretace eukleidovské geometrie jsou zde vyloženy zejména Beltrami-Kleinova a Poincarého interpretace geometrie neeukleidovské. Vedle Poincarého interpretace rovinné geometrie, s níž jsou velmi vhodně a snadno vyloženy i elementy hyperbolické trigonometrie, je probrána také Poincarého interpretace geometrie prostorové, takže na tomto místě je vlastní výklad Lobačevského geometrie doplněn základními fakty z prostorové geometrie, zejména pokud jde o vlastnosti ekvidistantních ploch a horosféry.

Poslední kapitola stručně pojednává o principiálních vlastnostech axiomatického systému, totiž o jeho bezespornosti, nezávislosti a úplnosti.

Vcelku lze říci, že Kutuzovova knížka velmi zdařile jedná o základních věcech z oboru základů geometrie. Je psána velmi srozumitelně a ani výběrem látky není příliš rozsáhlá, takže ani četba ani studium knihy není nijak namáhavé.

Český překlad je věrným přetlumočením ruského originálu. Vyskytují se v něm sice na některých místech drobná nedopatření, vcelku však neruší dobrou srozumitelnost textu. Mám zejména námitky proti těmto formulacím:

Str. 11, poslední řádek: místo „pojem nedefinovatelnosti základních pojmů" má být „pojem nedefinovaných...".

Str. 12, řádek 12 shora: divně zní „objasnit na obrázcích této interpretace" (v originále stojí „razjasniť na obrazach etoj interpretacii..."); přesnější překlad je „objasnit v této interpretaci".

Str. 97, řádek 5 zdola: místo „A. Poincaré" má být „H. Poincaré" (Henri).

Str. 99, řádek 13 shora: místo „tyto pojmy se... nepopisují" má být „...neopisují...".

Str. 146, řádek 5 a 6 shora: ve větě „Na příklad *PSQ* (vlastně oblouk polokružnice)..." přidali překladatelé proti originálu text v závorce, který smysl věty ještě více zatemňuje; lépe by snad bylo větu přeložit takto: „Na příklad oblouk *PSQ*...".

Str. 146, řádek 7 a 8 shora: ve větě „Obrázky 135 a 136 obsahují „trojúhelníky s nulovými úhly" by snad místo „obsahují" bylo lépe napsat „zobrazují".

Nevím rovněž, zda je vhodné seznam citované literatury jednoduše opsat azbukou, i když v něm jsou uváděny práce neruských autorů, přeložené do ruštiny, jež jsou u nás přístupné daleko snáze v originále. *Jan Pavlíček*, Praha.

Alois Urban, **Trigonometrie.** Vydalo ve II. vydání jako 2. svazek sbírky „Věda všem" Nakladatelství ČSAV, Praha 1953. Str. 189, náklad 3300. Cena Kčs 18,—.

K sepsání této knížky, jež po prvé vyšla na začátku roku 1952, byl autor veden hlavně snahou, aby vážným zájemcům z řad absolventů bývalých škol II. stupně, nynějších osmiletek, umožnil přístupnou a jasnou formou seznámit se s rovinnou trigonometrií. Knížka jim v plné míře ukazuje její logickou výstavbu, založenou na geometrické definici goniometrických funkcí, a dává jim tak příležitost k prohloubení jejich matematického vzdělání. Pro úspěšnou četbu spisku jsou potřebny jen základní znalosti matematiky z osmiletky. Méně běžné a známé pojmy i věty, hlavně o podobných trojúhelnících, uvádí autor v 1. až 4. oddílu; důkazy některých z nich odsunul až do dodatku v oddílu 18., aby čtenáři umožnil dostat se co nejdříve k vlastní látce.

Ke goniometrii přichází autor až v oddílu 5. Definuje v něm nejprve tangens ostrého úhlu a pak velmi přístupnou formou seznamuje čtenáře s pojmy, které jsou v dalším nezbytné: pojem funkce, grafu a obloukové míry a aplikuje je na uvedenou definici tangenty. Zbývající část oddílu obsahuje výklad o používání tabulky tangenty ostrých úhlů.

V oddíle 6. až 8. zavádí autor postupně funkce kotangens, sinus a kosinus ostrého úhlu a podobně jako v oddílu 5. vykládá jejich základní vlastnosti a učí manipulaci s tabulkami jejich hodnot.

Řešení pravoúhlého trojúhelníka a ovšem i úloh, jež na ně vedou, je věnován oddíl 9. V oddílu 10. vykládá autor, jak používat tabulek dekadických logaritmů goniometrických funkcí při řešení trigonometrických úloh. Nepředpokládá však v dalším textu znalost počítání s logaritmy, a proto v něm všude při řešení úloh uvádí vždy výpočet pomocí tabulek goniometrických funkcí a pak pomocí tabulek jejich logaritmů. Oddíl 11., jímž končí první část knížky, obsahuje základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi ostrého úhlu.

V oddílu 12. a 13. definuje autor goniometrické funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens obecného úhlu a vyšetřuje i jejich podrobnější vlastnosti. V oddílu 14. jsou odvozeny t. zv. součtové věty pro goniometrické funkce a ovšem i jejich důsledky.

V oddílu 15. uvádí autor základní věty, jichž je potřeba k řešení obecných trojúhelníků, totiž větu sinovou, kosinovou, tangentovou, vzorce Cagnoliho, vzorce pro funkce polovičních úhlů trojúhelníka atp. V oddílu 16. je užito všech těchto vět a vzorců k řešení obecných trojúhelníků, hlavně k takovým úlohám, jež jsou nejdůležitější anebo které se v praxi nejčastěji vyskytují. Oddíl 17. obsahuje několik velmi častých a důležitých aplikací v t. zv. praktické geometrii. V podstatě běží o zjištění vzdálenosti dvou bodů, kterou nelze změřit přímo.

Kladem spisku je velké množství příkladů, jednak v textu úplně provedených, jednak uvedených za oddíly ku procvičení vyložené látky. Na konci knížky v oddílu 19. jsou uvedeny jejich výsledky. Příklady jsou vesměs původní. Jejich množství dobře poslouží i učitelům jedenáctiletek, které jistě zaujme i uspořádání látky. Po zkušenostech, jichž docent Urban nabyl při vyučování na průmyslových školách, definuje a probírá základní vlastnosti goniometrických funkcí odděleně a postupně nejprve pro funkce tangens a kotangens a pak pro sinus a kosinus. Tím se jeho spisek liší od běžných příruček anebo učebnic trigonometrie.

Krátká doba, v níž bylo první vydání knížky rozebráno, svědčí o značném zájmu o ni i o tom, že výše zmíněný úkol, který si její autor vytkl, plní velmi dobře. Proto je třeba její další vydání jen uvítat. *Zbyněk Nádeník*, Praha.

Stanislav Horák, **Elipsa.** Nakladatelství ČSAV, Praha 1953. Str. 78, 35 obrazů, náklad 3300. Cena brož. Kčs 9,—.

V knižnici „Věda všem“, vydávané Československou akademií věd, vyšla nedávno jako první svazek Horákova knížka o elipse. Podle slov autorovy předmluvy je knížka určena především pro zájemce o geometrii z řad žáků našich škol. U čtenáře se předpokládá pouze znalost geometrie asi v rozsahu učiva osmiletky; tato okolnost byla směrodatná při výběru i zpracování látky.

Knížka obsahuje šest kapitol. Od popisu „zahradnické“ konstrukce elipsy přechází autor v první kapitole k definici základních pojmů a odvozuje nejjednodušší poučky. Jsou zde věty o souměrnosti elipsy, je vyložen princip elipsografu a bez důkazu uvedena konstrukce kružnic křivosti ve vrcholech elipsy. Druhá kapitola pojednává o poloze bodu vzhledem k elipse; zavádí se pojem vnitřního a vnějšího bodu elipsy a hlavním výsledkem je věta o konvexitě množiny bodů, ležících uvnitř elipsy a na ní. Třetí kapitola je v podstatě věnována podrobnému naznačení důkazu věty, že elipsa má s přímkou společné nejvýše dva body; přesný důkaz je mimo dosah prostředků, na něž se autor omezil. V dalších dvou kapitolách se autor zabývá hlavně vlastnostmi tečen elipsy. Poslední, šestá kapitola má ráz dodatku a obsahuje důkaz dvou pomocných vět, jichž se užívá v kapitole páté.

Jednotlivé kapitoly obsahují jednak vlastní výklad, jednak podrobné řešení několika úloh, ponejvíce konstruktivních, které se thematicky přimykají k látce právě vyložené. Pak následují cvičení (celkem je jich v knížce 90) a nakonec řešení a návody k řešení některých cvičení. — Text je doprovázen 35 obrázky.

Předností autorova podání je snaha o přesnost, projevující se v pečlivém provedení důkazů, v důkladném rozboru řešených problémů i ve vyjadřování. Nedůslednosti, které se místy vyskytují, nejsou zpravidla takového rázu, že by čtenáře uvedly do rozpaků. Na př. na str. 11 v odstavci, začínajícím 3. ř. shora, není jasné, co se předpokládá o bodech M_1, M_1'; na str. 33 ve cvičení 5 a 7 je kolmicí míněna kolmice na hlavní osu; na str. 44 definice vnitřního a vnějšího úhlu průvodičů ztrácí smysl pro hlavní vrcholy elipsy; dále v poznámce k def. 4 mělo zřejmě být řečeno, že *tečny* jiných křivek mají jiné definice. Na str. 62 se náhle objevuje několik tiskových chyb: v řádce 8 zdola má být Q_1' místo Q_1, v ř. 7 zdola má být F_1Q_1' místo F_1Q_2'; kromě toho v obr. 29 má být (vzhledem k textu) kružnice o středu F_2 a o poloměru $2a$ označena g_1' místo g'.

Pro svou přístupnost najde Horákova knížka bezpochyby hodně mladých čtenářů a zejména žákům jedenáctiletek bude užitečným doplňkem matematického učiva.

Ladislav Kosmák, Praha.

H. v. Sanden: **Praktische Mathematik.** (B. G. Teubner, Leipzig, 1953, str. 128.)

Kniha vznikla z přednášek o praktické matematice, jež byly konány na hanoverské technice a které doplňovaly přednášky z vyšší matematiky.

Kniha je rozdělena do šesti kapitol: I. Grafický počet, II. Taylorova věta. Přibližné vzorce, III. Integrování, derivování a interpolace, IV. Statistika, V. Vyrovnávací počet a methoda nejmenších čtverců, VI. Harmonická analysa a synthesa pomocí trigonometrické interpolace.

V prvé kapitole uvádí autor nejprve některé základní věci z grafického počtu: určení vhodných jednotek; závislost grafu funkce, určitého integrálu funkce a derivace funkce na zvolených jednotkách; konstrukce funkcí xf a $\frac{1}{x}f$ k dané funkci f (v pravoúhlých souřadnicích). Dále autor probírá integrování funkcí daných graficky, a to jak nahrazením křivky lomenou čarou tak pomocí integrátoru; zvláštní odstavec je věnován grafickému integrování součinu dvou funkcí. V posledních odstavcích se čtenář seznamuje s logaritmickým pravítkem a s užitím logaritmického papíru.

Druhou kapitolu začíná autor několika všeobecnými poznámkami o přesnosti při numerickém počítání. Pak přechází k nahrazování daných funkcí polynomy a k jejich odvození užívá Taylorovy věty. Odvozuje sice zbytek Taylorovy řady, a to v integrálním tvaru, avšak nezabývá se methodami odhadu této veličiny a místo odhadu zbytku se spokojuje s odhadem výrazu $\frac{1}{(n+1)} \cdot f^{(n+1)}(c_0)(x - x_0)^{n+1}$. Partie je doplněna přehlednou tabulkou přibližných vzorců pro nejčastěji se vyskytující funkce s udáním intervalu použitelnosti, připouštíme-li chybu 0,1%, 1% a 10%. Stručně je pojednáno o odhadu změny funkce několika proměnných pomocí totálního diferenciálu. Další část kapitoly je věnována numerickému řešení rovnic. Autor uvádí Newtonovu methodu a iterační methodu, avšak bez udání podmínek, za nichž procesy konvergují. Tato partie je doplněna výkladem o Hornerově schematu.

V třetí kapitole autor nejprve odvozuje Simpsonův vzorec pro výpočet určitého integrálu. Při určování nepřesnosti tohoto vzorce si všímá nejen nepřesnosti způsobené nahrazením integrandu jinou funkcí, ale také nepřesnosti zaviněné nepřesným udáním funkčních hodnot. Dále je zaveden pojem diference libovolného řádu a je ukázáno, jak můžeme užít diferencí k odhadu velikosti derivace a k prvé orientaci o průběhu funkce. Nakonec je ještě odvozena Newtonova formule pro interpolaci vpřed.

Obsahem čtvrté kapitoly je výklad některých elementárních pojmů statistiky, a to s hlediska jejich aplikací v theorii chyb a vyrovnávání, jež je podána v V. kapitole. Tím je určen i rozsah látky vyložené ve čtvrté kapitole i způsob jejího výkladu a celkové pojetí statistiky; jde totiž o statistiku čistě popisnou, tak jak byla statistika chápána ještě na počátku tohoto století, nikoliv o matematickou statistiku v dnešním smyslu.

Pátá kapitola navazuje na čtvrtou výkladem vyrovnávacích method, zejména methody nejmenších čtverců v obvykle běžném rozsahu. Při tom jsou vyloženy též některé vlastnosti variance. V závěru páté kapitoly je pojednáno o koeficientu korelace a jeho užití jako míry lineární závislosti.

Konečně v šesté kapitole seznamuje autor čtenáře s tím, jak určit trigonometrický polynom aproximující danou periodickou funkci, a to pro případ, že v intervalu jedné periody známe buď 12 nebo 24 funkčních hodnot. Uvádí schemata, podle nichž lze výpočty s výhodou provádět.

Na celé knize je patrno, že ji psal autor s velkou počtářskou praxí, který dovede dát čtenáři mnoho, třeba drobných, ale přitom velmi užitečných rad. Každá partie je osvětlena na řadě příkladů. Autor zdůrazňuje význam kontroly při numerickém počítání a také vždy uvádí způsob, jak provedený výpočet zkontrolovat.

Celý výklad statistické části knihy trpí poněkud neaktuálností celkového pojetí úlohy statistiky při zpracování empirických dat. I když uvážíme po výtce praktické zaměření knihy a její relativní elementárnost, přece musíme jen litovati, že v knize nenalezl místa na př. alespoň princip testů významnosti, jasněji formulovaný než tomu je, nebo třeba kriterium χ^2. Téměř zásadně se v knize nerozlišuje mezi charakteristikami populačními a výběrovými. To sice dovoluje autorovi využívat asymptotické normality některých charakteristik i pro velmi malé výběry (viz příklad na str. 89—90), ale zároveň nás nutí k pochybnosti o přesnosti a smyslu výsledků; tím je vysvětlen i příliš velký význam přikládaný normálnímu zákonu rozložení.

Ačkoliv autor v předmluvě píše, že kniha je určena posluchačům i absolventům technik, je v knize užito pouze elementů infinitesimálního počtu bez větších nároků na nějaké hlubší matematické vzdělání čtenáře. To má sice svou stinnou stránku, že autor se musí omezit ve všech vykládaných partiích na pouhé počátky (což je ovšem dáno i rozsahem knihy) bez hlubšího theoretického rozboru, ale také stránku světlou, že kniha je přístupna velmi širokému poli čtenářů, především středním technickým kádrům, a právě těm bychom chtěli knihu upřímně doporučit. *O. Vejvoda, Fr. Zítek*, Praha.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 79 (1954)

ZPRÁVY

ŠEDESÁT LET PROFESORA DR JAROSLAVA JANKO

Dovršení 60. roku života Jankova je vhodnou příležitostí k letmému načrtnutí a zhodnocení charakteristických rysů jeho obsáhlé vědecké činnosti jak v řadě užších oborů vědeckých, jako je ekonomická statistika, matematika v jevech hospodářských, demografie, pojišťovnictví, tak zejména v širokém oboru theorie matematické statistiky se stále rostoucím okruhem jejích aplikací.

Janko je rodem z Opatova na Moravě. Narodil se 3. prosince 1893; gymnasium studoval v Třebíči v letech 1904—1912, vesměs s vyznamenáním. Již za středoškolských studií projevuje se výrazně jeho sklon k matematice. Po maturitě vstupuje Janko na filosofickou fakultu Karlovy university v Praze a věnuje se studiu matematiky a fysiky jako hlavních předmětů pro učitelství na středních školách. Již v 3. roce studia dokončuje samostatnou práci z oboru theoretické fysiky: „O elektromagnetických kmitech koaxiálních válců kruhových", přijatou do Rozprav české akademie věd a umění II. tř. Průběhem r. 1918 skládá státní zkoušky učitelské způsobilosti pro střední školy a koncem téhož roku i rigorosa a je promován na doktora filosofie právě v den svých 25. narozenin. Janko se chystal zřejmě v té době k vědecké práci vysokoškolské v oboru theoretické fysiky. Avšak v téže době počíná na přírodovědecké fakultě, oddělené z fakulty filosofické, zvýšený zájem o aplikovanou matematiku, tehdy dosti opomíjenou. Janko zaměřuje ihned svoje úsilí na tento důležitý úsek matematiky. Dochází v krátké době k zavedení speciálního dvouletého cyklu přednášek o pojistné matematice a matematické statistice. Janko se účastní těchto přednášek a skládá úspěšně závěrečnou zkoušku v únoru 1926.

První období praktické činnosti Jankovy sahá od r. 1919 do r. 1931, kdy byl zaměstnán v tehdejším ministerstvu sociální péče. V této době se věnuje Janko vedle rozsáhlé práce úřední samostatnému hlubšímu studiu matematické statistiky a pojistné matematiky. V r. 1929 se habilituje pro obor pojistné matematiky a matematické statistiky na Vysoké škole speciálních nauk a krátce na to, v r. 1931 je jmenován mimořádným profesorem a opouští ministerstvo sociální péče. Vstupem na vysokou školu speciálních nauk počíná nové období činnosti Jankovy, jejímž těžištěm zůstává učitelská činnost na této škole až do r. 1952. V r. 1936 je jmenován řádným profesorem, ve škol. roce 1937/38 je zvolen po prvé děkanem fakulty speciálních nauk, v r. 1946/47 po druhé a k 1. 10. 1952 přechází do stavu učitelských sil katedry matematické statistiky na matematicko-fysikální fakultě Karlovy university, kam přešlo také studium statistického inženýrství.

Úřední prostředí obklopující Janka v době státní služby v ministerstvu sociální péče působilo intensivně na směr vědecké jeho činnosti a na volbu konkretních themat. Bude to jasně patrno ze stručného přehledu jeho rozsáhlé publikační činnosti. Jankova vědecká činnost se soustředila na užití matematické statistiky na jevy přírodní, hospodářské a sociální. V pozdější době věnoval hlavní pozornost užití matematické statistiky v kontrole jakosti výroby.

Zmíním se nejprve o původních vědeckých pracích Jankových:

1. Aplikace statistiky v demografii. Janko byl členem Státního výboru statistického a v trvalém styku se Státním úřadem statistickým. Účastnil se celostátních akcí tohoto úřadu zejména v odboru demografickém. Z této spolupráce vzniká významná studie Jankova publikovaná ve Statistickém obzoru 1931 ,,Konstrukce úmrtnostních tabulek obyvatelstva na podkladě sčítání lidu". V bohatém, logicky pěkně uspořádaném přehledu existujících method pro konstrukci takovýchto tabulek Janko kriticky hodnotí důvody pro volbu mezi dvěma nejvhodnějšími methodami — Becker-Zeunerovou a Rathsovou — a osvětluje názorně kladné i záporné stránky těchto method. Sleduje v pojednání podrobně vliv migrace na výsledky a vliv časového kolísání četnosti porodů a neopomíjí ke konci ani otázky technického provedení souvisící s konstrukcí tabulky úmrtnosti. Zdůrazňuje potřebu zvláštních tabulek pro země české a pro Slovensko. Z dalších prací v oboru demografie uvádím ještě zajímavý článek ,,Roční míry přírůstku obyvatelstva" předložený na XXIV. sezení Mezinárodního statistického institutu v Praze 1938 (Stat. obzor 1938). Obsahuje výpočet ročních měr plodnosti v českých zemích a odvození několika aproximativních vyjádření analytických, která se s různou přesností přimykají k hodnotám empirickým.

2. Matematika a statistika v pojišťovnictví. Z původních prací z oboru pojistné matematiky uvádím nejprve článek ,,Užití základních čísel při úrokové míře (i) pro výpočet hodnot důchodů při úrokové míře (i')," Poj. obzor 1929. Prvá část článku je založena na použití Taylorova rozvoje pro hodnotu životního důchodu jednak jako funkce diskontního faktoru (v), jednak jako funkci úrokové míry (i). Zvláště pozoruhodným je v další části článku užití Steffensenovy nerovnosti

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \leq \int_a^{a+\lambda} f(t)\,dt;\ f(t) \text{ nerostoucí v } (a, b);\ \lambda = \int_a^b \varphi(t)\,dt,$$

$$0 < \varphi(t) < 1\,.$$

Do téhož oboru spadá další studie Jankova „Statistické metody umožňující předběžný odhad úmrtnosti vadných životů“ (franc.) a „Metody zajišťování“, oba články z r. 1937. Statistikou úmrtností pojištěnců zabývá se Janko v obsáhlém článku „Některé nové methody ve statistice úmrtnosti“, r. 1929. Pojednáná v něm podrobně o pokusech dospěti k závěrům o míře úmrtnosti jen z dat o úmrtích, reprodukuje výpočet jedné úmrtnostní tabulky provedený *R. A. Fisherem,* v němž opravuje zjištěné chyby a doplňuje částečně původní theoretické odvození. Speciálními pojistně matematickými otázkami zabýval se Janko v článku „Poznámky k hypothekárnímu pojištění životnímu“ (1941), v dalším článku „Tarif tvárný v životním pojištění“ (1946) a „Diferenční rovnice reservy pojistného“ (1949).

3. Aplikace matematiky a statistiky na jevy hospodářské. V r. 1924 uveřejnil Janko v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky zajímavou studii „O formě tarifů“, k níž se organicky pojí článek v Poj. obzoru „Rozbor některých čsl. tarifů (zvláště daňových)“. Janko podává jednak výstižný kritický přehled o různých řešeních problému monotonně progresivního tarifu vyskytujících se ve světové literatuře, jednak zobecňuje v případě analytických tarifů vhodným způsobem logaritmickou formuli Douglas-Whiteovu.

Činnost v ministerstvu sociální péče dává Jankovi podnět k řadě původních prací zabývajících se problémy statistiky ekonomické.

4. Theorie matematické statistiky. V theorii matematické statistiky zahajuje Janko svoji činnost studií „Koeficient korelace v homográdní statistice“ (1926), v níž se zabývá určitou aproximací analytického vyjádření vícerozměrného rozložení pravděpodobností, která umožňuje přibližné vyjádření koeficientu mnohonásobné korelace. Tato i následující práce nazvaná „K teorii representativní metody“ (1928) nevybočují ještě nijak z rámce obvyklého klasického postupu řešení úloh matematické statistiky. Značný vzestup je patrný již v dalším článku „Technické užití klasifikace statistických charakteristik“ (1934), kde autor otevírá odborné veřejnosti nové zajímavé obzory a seznamuje ji s klasifikací problémů statistické indukce ve formulaci R. A. Fisherově. Zdůrazňuje fundamentální důležitost theorie náhodného výběru o malém rozsahu při řešení těchto problémů. Z práce je zřejmé, že se Janko v té době již zabývá užitím matematické statistiky v kontrole jakosti, která — ovšem teprve po skončení druhé světové války — zaujímá v Jankově činnosti vědecké přední místo a jeho zásluhou proniká stále hlouběji do našich závodů.

Dalším příspěvkem v theorii matematické statistiky je obšírnější článek „Homogenita statistického souboru“ (1940). Vychází z pojmu *základního statistického souboru* a rozlišuje při tom t. zv. formální homogenitu elementů souboru různého stupně podle počtu shodných znaků u jednotlivých prvků. Připomenuv stručně pojem materiální homogenity, přechází k definici kolektivu ve smyslu *Misesově*. Referuje podrobně o námitkách proti této definici a uvádí pak modifikace její navržené jednak *Copelandem*, jednak *Waldem*. V dalším soustřeďuje pozornost na otázku vhodných kriterií homogenity. Na prvém místě jedná o analyse rozptylu, jejíž základní relace odvozuje, a demonstruje pak užití výsledků k testování homogenity na konkretním příkladě statistiky fertility v několika okresích za léta 1930—1937, odvozuje pak Fisherovu theorii korelace mezi třídami (intraclass correlation) a připomíná Pearsonův χ^2 test, Lexisovu míru disperse a použití Studentova t-testu.

O neúnavné píli Jankově svědčí velký počet článků (více než 170) obsahujících jednak referáty o jednotlivých aktuálních otázkách sociálně politických, ekonomických, pojistně-matematicko-statistických a v přítomné době též ideologických, jednak publikované diskusní příspěvky na mezinárodních sjezdech, na schůzích Čsl. statistické společnosti a jinde, recense knih, jubilejní pocty, hesla do slovníku a pod., jakož i řada veřejných přednášek.

Veden stálou snahou po zvýšení úrovně studia na vysoké škole a úsilím po proniknutí statistických method do výroby a jiných úseků techniky věnuje se Janko obtížné práci spojené s vydáním celé řady učebnic a učebných pomůcek. S velkým zájmem širší veřejnosti setkala se prvá jeho učebnice statistiky vydaná v letech 1942—1944 v Sbírce „Cesta k vědění" nazvaná: „Jak vytváří statistika obrazy světa a života". Její úspěch je potvrzen uskutečněním druhého vydání v letech 1948—49. Je to první naše kniha podávající přehled základních pojmů a moderních method matematické statistiky založených na theorii náhodného výběru s četnými aplikacemi v technické praxi, formou přístupnou čtenáři se středoškolským vzděláním. Výstižně jsou vyloženy základy statistické indukce a na četných příkladech z praktického života je ukázáno, jak třeba získávat, zpracovat a hodnotit statistický materiál.

Naléhavá potřeba vhodné pomůcky pro studium matematické statistiky na vysoké škole vede Janka k sepsání dvoudílných skript „Matematická statistika I" v r. 1949 a „Matematická statistika II" v r. 1951.

Uvedené učebnice a skripta doplnil Janko postupně samostatnými sbírkami statistických tabulek. Již v r. 1931 vydává „Tabulky k numerickým metodám početním a matematické statistice", v r. 1938 „Tabulky ke cvičení z pojistné matematiky", v r. 1950 „Tabulky k matematické statistice" zahrnující 10 tabulek zvláště důležitých pro aplikace. Tyto tabulky podstatně rozšířené se zřetelem na nejnovější pokroky v theorii matematické statistiky, a místy nově upravené, vydává Janko v r. 1953. Obsahují 20 tabulek a vyhovují v přítomné době všem hlavním potřebám v praxi.

Obraz knižní činnosti Jankovy dlužno doplniti jeho první knihou jednající o matematické statistice „Základy statistické indukce" z r. 1937. Kniha znamenala v té době významný a záslužný čin, který přispěl ke zvýšení úrovně statistického vzdělání u nás.

Konečně budiž uvedena elementární učebnice „Základy statistiky" sepsaná společně s akademikem *Novákem* a dr. *Robkem* a vydaná v r. 1950.

Již z uvedeného přehledu Jankovy publikační činnosti je patrno, že obor jeho působnosti se neomezoval na vysokou školu. Byl aktivním členem v celé řadě vědeckých společností. Janko se účastní pracemi a diskusními příspěvky mezinárodních kongresů aktuárských a statistických, a to v Londýně r. 1927, ve Stockholmu 1930, v Římě 1934, v Paříži, Ženevě, Berlíně, Drážďanech, Stuttgartě. V r. 1947 byl na studijní cestě v USA. Účastnil se tehdy statistického kongresu ve Washingtonu, sjezdu pro matematiku a matematickou statistiku v Yale, přednášek na Columbijské universitě v New Yorku a na universitě v Princetonu.

Významné místo v Jankově činnosti náleží též jeho dlouholeté úspěšné činnosti pedagogické a jeho trvalému úsilí o reorganisaci studia pojistné matematiky na Vysoké škole speciálních nauk. Výsledkem této snahy byla přeměna původního dvouletého studia na čtyřleté studium statistického inženýrství v r. 1946.

Již z běžného přehledu Jankovy rozsáhlé a mnohostranné činnosti vědecké, který jsem předvedl v lapidárních tazích, rysují se dostatečně ostře význačné charakteristické znaky Jankovy osobnosti: Je to především veliká a vytrvalá píle v práci, kterou Janko nekoná isolovaně od společnosti, nýbrž v těsném a široce založeném styku s vedoucími osobami a institucemi veřejného hospodářského života za tím cílem, aby zaměřil svoji práci správným směrem. Jako další charakteristický rys vidíme u Janka silně uplatňovanou trvalou snahu po harmonickém spojení theorie s aplikací, zejména spoluprací při technickém zdokonalování výroby. Konečně neméně význačná je Jankova snaha po dosažení co nejvyšší úrovně ve svém oboru a to neúnavným doplňováním vědomostí nezbytných k udržení se na této úrovni. Janko nezůstává nikdy stát ve vědeckém vývoji, neoddává se žádnému odpočinku v tomto směru. Tento úkol není právě snadný, uvážíme-li počáteční úroveň u nás po první světové válce a trvalý, časem překotný vývoj matematické statistiky a jejích aplikací.

Ladislav Truksa, Praha.

MATEMATICKÝ ÚSTAV ČESKOSLOVENSKÉ AKADEMIE VĚD

Akademik *Eduard Čech* byl presidiem Československé akademie věd dnem 1. ledna 1954 na vlastní přání zproštěn funkce ředitele Matematického ústavu ČSAV, aby se plně mohl věnovat práci vědecké. Je známo, že založení a organisační a vědecké vybudování tohoto ústavu je z největší části dílem akademika E. Čecha. Presidium ČSAV vyslovilo proto při této příležitosti akademikovi Ed. Čechovi vřelý dík za velmi obětavou péči, kterou ústavu doposud věnoval, a žádá ho o další spolupráci.

Presidium ČSAV jmenovalo současně prof. dr. *Vladimíra Knichala* od 1. ledna 1954 ředitelem tohoto ústavu. *Redakce.*

PŘEDNÁŠKY A DISKUSE V MATEMATICKÉ OBCI PRAŽSKÉ

10. 12. 1953. *Heinrich Grell*, profesor matematiky na Humboldtově universitě v Berlíně: O theorii ideálů I.
11. 12. 1953. *Heinrich Grell*, profesor matematiky na Humboldtově universitě v Berlíně: O theorii ideálů II.
14. 12. 1953. *Eduard Čech:* Oskulační kvadriky s daným středem.
16. 12. 1953. Diskuse o popularisaci matematické statistiky. (Na podkladě návrhu přednášky „Co dává člověku matematická statistika", který vypracoval *Jaroslav Hájek*).
4. 1. 1954. *Eduard Čech:* O záměně proměnných.
11. 1. 1954. *Otakar Borůvka:* Matyáš Lerch a jeho dílo.
18. 1. 1954. *Vojtěch Jarník:* O Hausdorffově míře.
25. 1. 1954. *Zbyněk Nádeník:* O jistých dvojicích ploch.

SEZNAM MATEMATICKÝCH ČASOPISŮ DOCHÁZEJÍCÍCH DO MATEMATICKÉHO ÚSTAVU ČSAV V ROCE 1954

Acta mathematica (Budapest)
Acta mathematica (Uppsala)
Acta scientiarum mathematicarum (Szeged)
American Journal of Mathematics (Baltimore)
American Mathematical Monthly (Buffalo)
Anales de la sociedad cientifica Argentina (Buenos Aires)
Annales de l'université de Lyon (Sciences mathématiques et astronomie) (Lyon)
Annales de l'institut de H. Poincaré (Paris)
Annales universitatis Mariae Curie Skłodowska (Lublin)
Annales de la Société polonaise de Mathématique (Kraków)
Annales academiae scientiarum Fennicae (Helsinki)
Annali della scuola norm. sup. di Pisa (Pisa)
Annals of mathematical Statistics (Baltimore)
Annals of Mathematics (Princeton)
Applied scientific Research (The Hague)
Archimedes (Erlangen)
Archiwum mechaniki stosowanej (Warszawa)
Arkiv för Matematik (Stockholm)
Atti della Acc. Naz. dei Lincei (Roma)
Bolletino della Unione matematica Italiana (Bologna)
Bulletin de la Société Mathématique de France (Paris)
Bulletin of the American Mathematical Society (Providence)
Bulletin of the Calcutta Mathematical Society (Calcutta)
Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences (Warszawa)
Cahiers Rhodaniens (Lyon)
Canadian Journal of Mathematics (Toronto)
Commentarii mathematici Helvetici (Zürich)
Commentarii mathematici universitatis Sti. Pauli (Tokyo)
Communications on pure and applied Mathematics (New York)
Compositio mathematica (Groningen)
Comptes rendus de l'Académie Bulgare des sciences (Sofie)
Časopis pro pěstování matematiky (Praha)
Čechoslovackij matematičeskij žurnal (Praha)
Doklady akademii nauk SSSR (Moskva)
Duke Mathematical Journal (Durham)
Elementa (Tidskrift för matematik, fysik och kemi) (Stockholm)
Enseignement Mathématique (Genève)
Ganita (Lucknow)
Glasnik matematičko-fizički i astronomski (Zagreb)

Indagationes mathematicae actis quibus titulus proceedings of the Section of Sciences (Amsterdam)
Izvestija akademii nauk SSSR, serija matematičeskaja (Moskva)
Izvestija akademii nauk SSSR, otd. techničeskich nauk (Moskva)
Journal of the Indian Mathematical Society (Poona)
Journal of the Institute of Actuaries (London)
Journal of the Faculty of Science of Hokkaido University (Sapporo)
Journal of the Institute of Polytechnics (Osaka)
Journal of the Osaka Institute of Science and Technology (Osaka)
Journal of Symbolic Logic (Princeton)
Kansas Science Bulletin (Kansas City)
Matematičeskij sbornik (Moskva)
Matematika v škole (Moskva)
Matematika ve škole (Praha)
Matematikai lapok (Budapest)
Mathematik-physische Meddelelser (København)
Matematyka. Czasopismo dla nauczycieli (Wrocław)
Mathematica Japonicae (Tokyo)
Mathematica scandinavica (København)
Mathematical Gazette (London)
Mathematical Journal of Okayama University (Okayama)
Mathematics Student (Madras)
Mathematical Reviews (Providence)
Mathematical Tables and Aids to Computation (Washington)
Mathematics Teacher (New York)
Mathematische Nachrichten (Berlin)
Mathematische Zeitschrift (Berlin)
Mechanika (Moskva)
Mémorial de l'artillerie francaise (Paris)
Nachrichten der Akademie der Wissenschaften math.-phys. Klasse (Göttingen)
Nachrichten der österreichischen mathematischen Gesellschaft (Wien)
Nieuw archief voor Wiskunde (Amsterdam)
Nordisk matematisk tidskrift (Oslo)
Nuovo cimento (Bologna)
Osaka mathematical Journal (Osaka)
Pacific Journal of Mathematics (Berkley)
Portugaliae mathematica (Lisboa)
Prikladnaja matematika i mechanika (Moskva)
Prikladnaja mechanika (Moskva)
Proceedings of the Cambridge philosophical Society (Cambridge)
Proceedings, Serie A (Amsterdam)
Proceedings of the American Mathematical Society (Menasha)
Proceedings of the Royal Irish Academy (Dublin)
Proceedings of the London Mathematical Society (London)
Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Edinburgh)
Proceedings of the Royal Society (London)
Quarterly of Applied Mathematics (Providence)
Rendiconti del Seminario matematico della Universita di Padova (Padova)
Rendiconti di instituto matematico Lombardo (Milano)
Revista Matematica Hispano-Americana (Madrid)
Revista Universidad National del Tucuman (Tucumán)
Revista Scientifica (Rio de Janeiro)
Revista de la Union Matematica Argentina (Buenos Aires)
Revista de Faculdade de Ciencias (Lisboa)
Revista de la sociedad Cubana de Ciencias físicas y matemáticas (Habana)
Révue de la faculté des sciences de l'Université d'Istambul (Istambul)
Rozprawy matematyczne (Warszawa)
Sankhya, the Indian Journal of Statistics (Calcutta)
Science Reports (Tokyo)
Scripta mathematica (New York)
Sovětská věda. Matematika, fysika a astronomie (Praha)
Studia Mathematica (Warszawa)
Transactions of the American Mathematical Society (Menasha)
Uspechi matematičeskich nauk (Moskva)
Vestnik akademii nauk SSSR (Moskva)
Vestnik akademii nauk kazachskoj SSR (Alma-Ata)
Vestnik Moskovskogo universiteta (Moskva)

Vestnik društva matematičara i fizičara nar. rep. Srbije (Belgrad)
Wiskundige opagven met de oplossingen (Groningen)
Zastosowania matematyki (Warszawa)
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (Berlin)

O. V.

Redakce: Matematický ústav Československé akademie věd Praha II, Žitná 25, tel. 241193. — Administrace: Nakladatelství Československé akademie věd, Praha II, Žitná 25, telefon 2319-50. — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 48,—, cena jednotlivého sešitu Kčs 12,—. Novinové výplatné povoleno Okrskovým poštovním úřadem Praha 022: j. zn. 309-38-Ře-52. — Dohlédací poštovní úřad Praha 022. — Tisknou a expedují Pražské tiskárny n. p., provozovna 05 (Prometheus), Praha VIII, Tř. Rudé armády 171. — Náklad 1500 výtisků.
Vyšlo dne 17. VI. 1954. — D 00715