Časopis pro pěstování matematiky, roč. 79 (1954)

NAPJATOST DESKY S DVĚMA ZALISOVANÝMI KRUHOVÝMI ČEPY

MILOSLAV HAMPL, Praha.

(Došlo dne 2. října 1953.) DT 621.81-41 : 539.3/.4

Do nekonečné rovinné desky se dvěma kruhovými otvory (poloměr a, vzdálenost středů $2e$) jsou za tepla zalisovány kruhové čepy s poloměry $a(1 + \alpha)$. Jde o určení napjatosti desky a čepů.

Předpokládáme při tom, že materiál desky i čepů je homogenní, a má stejné elastické vlastnosti.

Zalisování čepů se provede tím způsobem, že desku ohřejeme tak, aby kruhové otvory se teplotou zvětšily a čepy (neohřáté) se daly do těchto otvorů zalisovati. Po vychladnutí desky vznikne mezi čepem a kruhovým otvorem tlak a tím deska i čepy se dostanou do napjatého stavu, jehož zjištění je obsahem této práce.

Jde o nalezení napjatosti v desce a v čepech, které musí vyhovovat podmínkám:

a) ve styčné kružnici čepy a desky musí býti průvodiče a napětí radiální a smykové v čepu i v desce stejné,

b) radiální a smykové napětí desky v nekonečnu musí býti nulové.

Řešení problému je provedeno vhodnou volbou t. zv. *Airyho biharmonické funkce napětí* (Brit. Assoc. Rep. 1862, Trans. Roy. Soc. vol. *153*, 1863, p. 49) pro případ dvojdimensionální napjatosti. Je známo, že parciálními derivacemi druhého řádu této jediné funkce se dají vyjádřiti všechna tři napětí v rovině (radiální, obvodové a smykové). Viz na př. Technický průvodce, *III*, 1944, str. 442).

Značení:

$x\ y$	souřadnicový systém,
$r, \vartheta; r_1, \vartheta_1; r_2, \vartheta_2$	polární souřadnice podle obr. 1.,
e	vzdálenost středu kruhového otvoru pro čep od počátku,
a	poloměr otvoru,
$a\alpha$	přesazení čepu (= rozdíl poloměrů čepu a kruhovéh ootvoru)
Φ	Airyho funkce napětí,
$\nabla^2\Phi =$	$\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\vartheta^2}$,
u, v	radiální resp. obvodová deformace,
$\widehat{rr}, \widehat{\vartheta\vartheta}, \widehat{r\vartheta}$	radiální, resp. obvodové a smykové napětí v souřadnicích r, ϑ,

E	modul pružnosti v tahu,
ν	Poissonův poměr (0,3 u oceli).

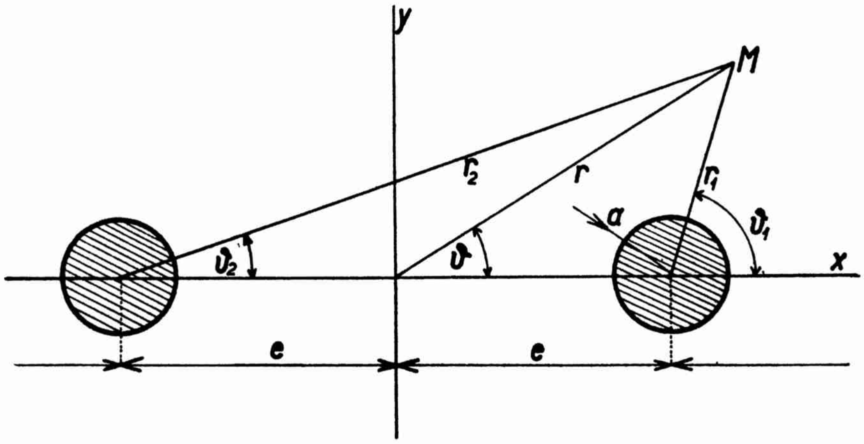
Index c resp. d se vztahuje na čep resp. na desku.

Podstata řešení problému je založena na známém řešení napjatosti jednoho kruhového čepu zalisovaného do otvoru v nekonečné rovině. V tomto případě mají Airyho funkce napětí tvar:

a) pro desku $\Phi_d = A \log \frac{r_1}{a}$,

b) pro čep $\Phi_c = B\, r_1^2$.

Těmito funkcemi (resp. jejich derivacemi) se dá vyjádřit napjatost v každém místě desky a čepu.



Obr. 1.

Přičteme-li k těmto funkcím touž biharmonickou (po případě harmonickou) funkci, znamená to, že jsme na původní stav napjatosti superponovali nový, který sice změní napětí ve styčné kružnici čepu s deskou, ale tak, že obě změny budou stejné, takže krajové podmínce a) bude zase vyhověno.

Za tuto superponovanou Airyho funkci volíme $A \log \frac{r_2}{a}$ a dokážeme v dalším, že všem krajovým podmínkám je vyhověno a kromě toho vypočteme napětí v čepu a v desce, do níž jsou zalisovány dva čepy (se stejnými poloměry).

Zvolme tedy tyto Airyho funkce napětí:

1. pro desku:

$$\Phi_d = A \log \frac{r_1}{a} + A \log \frac{r_2}{a} , \qquad (1,0)$$

2. pro čep 1:

$$\Phi_1 = \mathrm{B}\, r_1^2 + \mathrm{A} \log \frac{r_2}{a}\,, \tag{1,1}$$

resp. pro čep 2:

$$\Phi_2 = Br_2^2 + \mathrm{A} \log \frac{r_1}{a}\,. \tag{1,2}$$

Formule pro jednotlivá napětí v polárních souřadnicích r, ϑ:

$$\widehat{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} = \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\,, \tag{2,1}$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\,, \tag{2,2}$$

$$\widehat{r\vartheta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\right), \tag{2,3}$$

a pro deformace:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\mathrm{E}}\left(\widehat{rr} - \nu\widehat{\vartheta\vartheta}\right), \tag{3,1}$$

$$\frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\mathrm{E}}\left(\widehat{\vartheta\vartheta} - \nu\widehat{rr}\right), \tag{3,2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{1}{\mathrm{G}}\,\widehat{r\vartheta}\,. \tag{3,3}$$

Krajové podmínky problému:
Na obvodě čepů musí býti

$$a(1 + \alpha) + u_c = a + u_d\,, \tag{4,1}$$

$$v_c = v_d\,, \tag{4,2}$$

$$\widehat{rr}_c = \widehat{rr}_d\,, \tag{4,3}$$

$$\widehat{r\vartheta}_c = \widehat{r\vartheta}_d\,. \tag{4,4}$$

Všem podmínkám vyhovíme vhodnou volbou konstant A, B.

Pro další výpočet užijeme těchto vztahů:

$$r_2^2 = r_1^2 + 4e^2 + 4er_1 \cos \vartheta_1\,, \tag{5,1}$$

tedy

$$\frac{\partial r_2}{\partial r_1} = \frac{r_1 + 2e\cos\vartheta_1}{r_2}, \quad \frac{\partial r_2}{\partial \vartheta_1} = -\frac{2er_1 \sin\vartheta_1}{r_2}\,. \tag{5,2}$$

Pak

$$\frac{\partial \Phi_d}{\partial r_1} = \frac{\mathrm{A}}{r_1} + \mathrm{A}\frac{r_1 + 2e\cos\vartheta_1}{r_2^2}\,, \tag{6,1}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_d}{\partial r_1^2} = -\mathrm{A}\frac{1}{r_1^2} + \mathrm{A}\left[\frac{1}{r_2^2} - \frac{2(r_1 + 2e\cos\vartheta_1)^2}{r_2^4}\right], \tag{6,2}$$

$$\frac{\partial \Phi_d}{\partial \vartheta_1} = -\mathrm{A}\frac{2er_1 \sin\vartheta_1}{r_2^2}\,, \tag{6,3}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_d}{\partial \vartheta_1^2} = -\mathrm{A}\left[\frac{2er_1 \cos\vartheta_1}{r_2^2} + \frac{8e^2r_1^2 \sin^2\vartheta_1}{r_2^4}\right], \tag{6,4}$$

$$\nabla_1^2 \Phi_a = 0\,. \tag{6,5}$$

A tedy napětí v desce v souřadnicích r, ϑ:

$$(\widehat{r_1 r_1})_d = -(\widehat{\vartheta_1\vartheta_1})_d = -\frac{\partial^2\Phi_a}{\partial r_1^2} = \mathrm{A}\frac{1}{r_1^2} - \mathrm{A}\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}\log\frac{r_2}{a}\,, \tag{7,1}$$

$$(\widehat{r_1\vartheta_1})_d = -\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{\mathrm{A}}{r_1}\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}\log\frac{r_2}{a}\right). \tag{7,2}$$

Pro radiálnou deformaci podle (3,1) platí:

$$\frac{\partial u_d}{\partial r_1} = -\frac{1}{\mathrm{E}}(1+\nu)\frac{\partial^2\Phi_d}{\partial r_1^2}\,, \tag{7,3}$$

a integrací

$$\underline{u_d = -\frac{1}{\mathrm{E}}(1+\nu)\frac{\partial\Phi_d}{\partial r_1}} = -\frac{1}{\mathrm{E}}(1+\nu)\mathrm{A}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{\partial\log\frac{r_2}{a}}{\partial r_1}\right) \tag{7,4}$$

(integrační konstanta $= 0$, neboť pro $\lim r_1 = \infty$, musí být $u_d = 0$).

Čep I.

$$\Phi_1 = \mathrm{B}r_1^2 + \mathrm{A}\log\frac{r_2}{a}\,, \tag{8,1}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial r_1} = 2\mathrm{B}r_1 + \mathrm{A}\frac{r_1 + 2e\cos\vartheta_1}{r_2^2}\,, \tag{8,2}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r_1^2} = 2\mathrm{B} + \mathrm{A}\left[\frac{1}{r_2^2} - \frac{2(r_1 + 2e\cos\vartheta_1)^2}{r_2^4}\right], \tag{8,3}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\vartheta_1} = -\mathrm{A}\frac{2er_1\sin\vartheta_1}{r_2^2}\,, \tag{8,4}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\vartheta_1^2} = -\mathrm{A}\left[\frac{2er_1\cos\vartheta_1}{r_2^2} + \frac{8e^2r_1^2\sin^2\vartheta_1}{r_2^4}\right], \tag{8,5}$$

$$\underline{\nabla_1^2\Phi_1 = 4\mathrm{B}}\,. \tag{8,6}$$

Napětí v čepu 1 v souřadnicích r_1, ϑ_1:

$$\widehat{r_1r_1}_c = 4\mathrm{B} - \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r_1^2} = 2\mathrm{B} - \mathrm{A}\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}\log\frac{r_2}{a}\,, \tag{9,1}$$

$$\widehat{\vartheta_1\vartheta_1}_c = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r_1^2} = 2\mathrm{B} + \mathrm{A}\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}\log\frac{r_2}{a}\,, \tag{9,2}$$

$$\widehat{r_1\vartheta_1} = -\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{\mathrm{A}}{r_1}\frac{\partial\log\frac{r_2}{a}}{\partial\vartheta_1}\right), \tag{9,3}$$

$$\frac{\partial u_c}{\partial r_1} = \frac{1}{\mathrm{E}}\left[4\mathrm{B} - (1+\nu)\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r_1^2}\right]; \tag{9,4}$$

integrací:

$$u_c = \frac{1}{\mathrm{E}}\left[4\mathrm{B}r_1 - (1+\nu)\frac{\partial \Phi_1}{\partial r_1}\right] = \frac{1}{\mathrm{E}}\left[2\mathrm{B}\,(1-\nu)r_1 - \mathrm{A}\,(1+\nu)\frac{\partial \log \frac{r_2}{a}}{\partial r_1}\right]; \tag{9,5}$$

(integrační konstanta $= 0$, neboť pro $r_1 = 0$ musí být $u_c = 0$). Po dosazení do (4,1) pro $r_1 = a$:

$$a\alpha = -\frac{1}{\mathrm{E}}(1+\nu)\,\mathrm{A}\left[\frac{1}{a} + \left(\frac{\partial \log \frac{r_2}{a}}{\partial r_1}\right)_{r_1=a}\right] -$$

$$-\frac{1}{\mathrm{E}}(1-\nu)\,2\mathrm{B}a + \frac{1}{\mathrm{E}}(1+\nu)\,\mathrm{A}\left(\frac{\partial \log \frac{r_2}{a}}{\partial r_1}\right)_{r_1=a},$$

a tedy

$$\underline{\mathrm{E}\alpha a^2 = -\mathrm{A}(1+\nu) - 2\mathrm{B}(1-\nu)a^2}\,. \tag{10,1}$$

Normální napětí na obvodě čepu ($r_1 = a$) musí býti stejné, (podmínka (4,3)) jako na obvodě otvoru v desce:

$$2\mathrm{B} - \mathrm{A}\left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}\log\frac{r_2}{a}\right)_{r_1=a} = \mathrm{A}\frac{1}{a^2} - \mathrm{A}\left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}\log\frac{r_2}{a}\right)_{r_1=a},$$

odtud

$$\underline{\mathrm{A} = 2\mathrm{B}a^2}\,, \tag{10,2}$$

tedy

$$\mathrm{E}a^2\alpha = -4\mathrm{B}a^2\,,$$

$$\mathrm{A} = 2\mathrm{B}a^2 = -\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha\,; \tag{10,3}$$

tangenciální napětí $\widehat{r_1\vartheta_1}$ pro $r_1 = a$ jsou u čepu i desky identická. Tím jsou určeny konstanty A, B. Snadno zjistíme, že pro takto určené A, B jsou i podmínky (4,2) a (4,4) splněny.

Je tedy

$$\Phi_d = -\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha\left(\log\frac{r_1}{a} + \log\frac{r_2}{a}\right), \tag{11,1}$$

$$\Phi_{c1} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha\left[\frac{r_1^2}{2a^2} + \log\frac{r_2}{a}\right]. \tag{11,2}$$

Napětí na obvodě $r_1 = a$:

u desky:

$$(\widehat{r_1r_{1d}})_{r_1=a} = -(\widehat{\vartheta_1\vartheta_{1d}})_{r_1=a} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha\left[\frac{1}{a^2} + \frac{a^2 + 4ae\cos\vartheta_1 + 4e^2\cos 2\vartheta_1}{(a^2 + 4ae\cos\vartheta_1 + 4e^2)^2}\right], \tag{12,1}$$

$$(\widehat{r_1\vartheta_{1d}})_{r_1=a} = 2\mathrm{E}a^2\alpha\,\frac{e\sin\vartheta_1(a + 2e\cos\vartheta_1)}{(a^2 + 4ae\cos\vartheta_1 + 4e^2)^2}, \tag{12,2}$$

u čepu:

$$(\widehat{r_1 r_1}_c)_{r_1=a} = (\widehat{r_1 r_1}_d)_{r_1=a} \,, \tag{12,3}$$

$$(\widehat{\vartheta_1 \vartheta_1}_c)_{r_1=a} = -\mathrm{E}a^2\alpha - (\widehat{r_1 r_1}_c)_{r_1=a} \,, \tag{12,4}$$

$$(\widehat{r_1 \vartheta_1}_c)_{r_1=a} = (\widehat{r_1 \vartheta_1}_d)_{r_1=a} \,. \tag{12,5}$$

Napětí v čepu obecně:

$$\widehat{r_1 r_1}_c = \frac{\mathrm{A}}{a^2} - \mathrm{A}\left[\frac{1}{r_2^2} - \frac{2(r_1 + 2e\cos\vartheta_1)^2}{r_2^4}\right], \tag{13,1}$$

$$\widehat{\vartheta_1 \vartheta_1}_c = \frac{\mathrm{A}}{a^2} + \mathrm{A}\left[\frac{1}{r_2^2} - \frac{2(r_1 + 2e\cos\vartheta_1)^2}{r_2^4}\right], \tag{13,2}$$

$$\widehat{r_1 \vartheta_1}_c = -4\mathrm{A}\,\frac{e\sin\vartheta_1\,(r_1 + 2e\cos\vartheta_1)}{r_2^4} \,. \tag{13,3}$$

Speciálně pro střed čepu, kde $r_1 = 0$, $r_2 = 2e$

$$\begin{aligned} (\widehat{r_1 r_1}_c)_0 &= \frac{\mathrm{A}}{a^2} + \frac{\mathrm{A}}{4e^2}\cos 2\vartheta_1 \,, \\ (\widehat{\vartheta_1 \vartheta_1}_c)_0 &= \frac{\mathrm{A}}{a^2} - \frac{\mathrm{A}}{4e^2}\cos 2\vartheta_1 \,, \\ (\widehat{r_1 \vartheta_1}_c)_0 &= -\frac{\mathrm{A}}{4e^2}\sin 2\vartheta_1 \,. \end{aligned} \tag{14}$$

Napětí v desce v souřadnicích r, ϑ:

$$\Phi_d = \mathrm{A}\left(\log\frac{r_1}{a} + \log\frac{r_2}{a}\right).$$

Z obr. 1 je patrno, že

$$r_1^2 = r^2 + e^2 - 2er\cos\vartheta, \quad r_2^2 = r^2 + e^2 + 2er\cos\vartheta \,,$$

a tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial r} &= \frac{r - e\cos\vartheta}{r_1}\,, \quad \frac{\partial r_2}{\partial r} = \frac{r + e\cos\vartheta}{r_2}\,, \\ \frac{\partial r_1}{\partial \vartheta} &= \frac{er\sin\vartheta}{r_1}\,, \quad \frac{\partial r_2}{\partial \vartheta} = -\frac{er\sin\vartheta}{r_2}\,, \end{aligned} \tag{15}$$

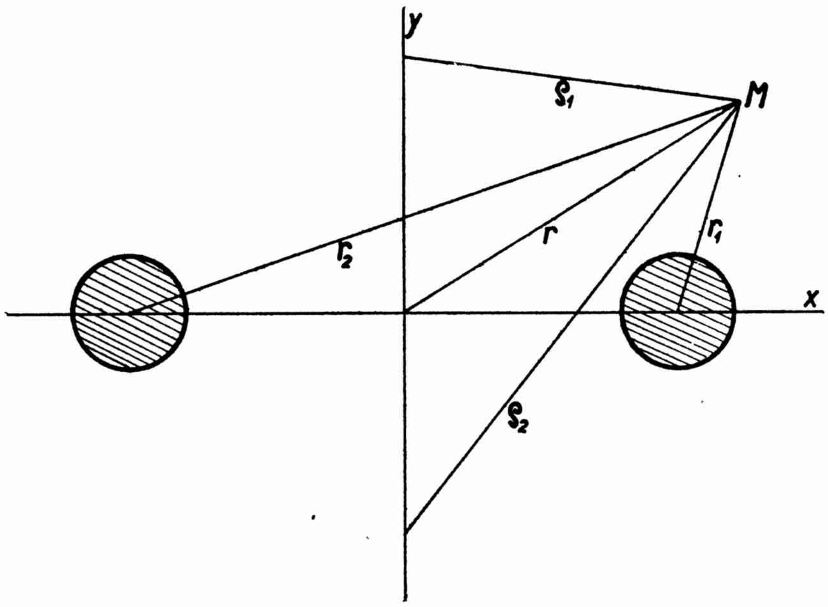
$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial \Phi_d}{\partial r} &= \frac{r - e\cos\vartheta}{r_1^2} + \frac{r + e\cos\vartheta}{r_2^2}\,, \\ \frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial^2 \Phi_d}{\partial r^2} &= \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{(2(r - e\cos\vartheta)^2}{r_1^4} - \frac{2(r + e\cos\vartheta)^2}{r_2^4}\,, \\ \frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial \Phi_d}{\partial \vartheta} &= \frac{er\sin\vartheta}{r_1^2} - \frac{er\sin\vartheta}{r_2^2}\,, \\ \frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial^2 \Phi_d}{\partial \vartheta^2} &= \frac{er\cos\vartheta}{r_1^2} - \frac{er\cos\vartheta}{r_2^2} - 2e^2r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Tedy

$$\widehat{rr}_d = A\left[\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - 2e^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4}\right)\right] = -\widehat{\vartheta\vartheta}_d\,, \tag{17,1}$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta}_e = -\widehat{rr}_d\,,$$

$$\widehat{r\vartheta}_d = A\,.\,2e \sin \vartheta \left[\frac{r - e\cos\vartheta}{r_1^4} - \frac{r + e\cos\vartheta}{r_2^4}\right]. \tag{17,2}$$



Obr. 2.

Hlavní napětí v desce:

$$\sigma_{1,2} = \tfrac{1}{2}(\widehat{rr} + \widehat{\vartheta\vartheta}) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4(\widehat{r\vartheta})^2 + (\widehat{rr} - \widehat{\vartheta\vartheta})^2}\,,$$

$$\sigma_{1,2} = \pm\, 2A\,.\,\frac{\sqrt{(r^2 + e^2 - 2er\sin\vartheta)(r^2 + e^2 + 2er\sin\vartheta)}}{r_1^2 r_2^2}\,, \tag{18,1}$$

$$= \pm\, Ea^2\alpha\,\frac{\varrho_1\varrho_2}{r_1^2 r_2^2}\,, \tag{18,2}$$

kde

$$\begin{aligned}\varrho_1^2 &= r^2 + e^2 - 2er\sin\vartheta\,,\\ \varrho_2^2 &= r^2 + e^2 + 2er\sin\vartheta\,,\end{aligned} \tag{18,3}$$

(ϱ_{12} jsou vzdálenosti vyšetřovaného bodu od bodů na ose y ve vzdálenostech $\pm e$).

Napětí v těchto bodech je $= 0$.

Dá se tedy po úpravě psát:

$$\sigma_{12} = \pm \mathrm{E}a^2\alpha \frac{\sqrt{r^4 + e^4 + 2e^2r^2 \cos 2\vartheta}}{r^4 + e^4 - 2e^2r^2 \cos 2\vartheta} . \tag{18,4}$$

Napětí v desce:

1. Podél osy x:

tedy pro

$$\vartheta = 0, \; r_1 = r - e, \; r_2 = r + e$$

$$\widehat{rr}_x = -\widehat{\vartheta\vartheta}_x = -\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha \left[\frac{1}{(r-e)^2} + \frac{1}{(r+e)^2}\right], \widehat{r\vartheta}_x = 0 . \tag{19,1}$$

2. Podél osy y:

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}\pi, \; r_1^2 = r_2^2 = r^2 + e^2 ,$$

$$\widehat{rr}_y = -\widehat{\vartheta\vartheta}_y = -\mathrm{E}a^2\alpha \frac{r^2 - e^2}{(r^2 + e^2)^2} . \tag{19,2}$$

Napětí mezi čepem a deskou:

$$(\widehat{r_1r_{1c}})_{r_1=a} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha \left\{\frac{1}{a^2} + \frac{a^2 + 4ae\cos\vartheta_1 + 4e^2\cos 2\vartheta_1}{(a^2 + 4ae\cos\vartheta_1 + 4e^2)^2}\right\} . \tag{20,1}$$

Extrémní hodnoty budou v bodech, kde derivace závorky $= 0$: Je to

1. pro $\vartheta_1 = 0$, resp. π,

tam bude radiální napětí

$$(\widehat{r_1r_{1c}})_{r_1=a,\,\vartheta_1=0} = -\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+2e)^2}\right]\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha , \tag{20,2}$$

$$(\widehat{r_1r_{1c}})_{r_1=a,\,\vartheta_1=\pi} = -\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2e-a)^2}\right]\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha , \tag{20,3}$$

2. pro $\overline{\vartheta}_1$, pro něž

$$\cos\overline{\vartheta}_1 = \frac{a(a^2 - 12e^2)}{16e^3} . \tag{20,4}$$

Tam bude radiální napětí

$$(\widehat{r_1r_{1c}})_{r_1=a,\,\overline{\vartheta}_1} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha \frac{32e^4 - 24a^2e^2 + 3a^4}{2a^2(4e^2 - a^2)^2} . \tag{20,5}$$

Čitatel se dá psát také

$$8e^2(4e^2 - 3a^2) + 3a^4$$

a tedy pro $e > a$ je i čitatel stále > 0.

Tedy i radiální napětí v místě $\overline{\vartheta}_1$ je tlak a to nejmenší na celém obvodě čepu.

Rovnice křivek, podél nichž mají hlavní napětí konstantní hodnotu, zní:

$$\frac{\varrho_1\varrho_2}{r_1^2r_2^2} = \frac{c}{e^2} , \tag{21}$$

kde c je bezrozměrný konstantní faktor, který vyjadřuje poměr hlavního napětí σ v uvažovaném bodě k hlavnímu napětí v počátku σ_0 tedy $c = \frac{\sigma}{\sigma_0}$.

Užijeme-li vztahů pro ϱ_1, ϱ_2, r_1, r_2, dostaneme:

$$\varrho_1^2\varrho_2^2 = r^4 + e^4 + 2e^2r^2 \cos 2\vartheta ,$$

$$r_1^2r_2^2 = r^4 + e^4 - 2e^2r^2 \cos 2\vartheta .$$

Po dosazení do (21) a úpravě, bude rovnice hledané čáry konstantního hlavního napětí:

$$\cos 2\vartheta = \frac{2c^2(u^4 + 1) + 1 - \sqrt{8c^2(u^4 + 1) + 1}}{4c^2u^2} , \tag{21,1}$$

kde $u = \frac{r}{e}$.

U odmocniny nutno bráti znaménko záporné, aby vyšel $\cos 2\vartheta < 1$. Křivka protíná osu $x(\vartheta = 0)$ obecně ve čtyřech bodech s úsečkami $\pm x_{1,2}$, pro které platí:

$$x_{12}^2 = \frac{2c + 1 \pm \sqrt{8c + 1}}{2c}, \text{ resp. } x_2^2 = \frac{3 - x_1^2}{1 + x_1^2} . \tag{21,2}$$

Pokud je $c < 1$, jsou jen 2 průsečíky reálné, pro $c = 1$ má křivka tvar ležaté „osmičky" s dvojným bodem v počátku, pro $c > 1$ protíná osu ve čtyřech reálných bodech a rozpadá se na dva ovály symetricky položené k ose y a ležící uvnitř smyček křivky $c = 1$.

Průsečíky s osou y dostaneme dosazením $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$.

Pro jejich pořadnice platí:

$$y_1^2 = \frac{-2c - 1 + \sqrt{8c + 1}}{2c} ; \tag{21,3}$$

(platí jen kladné znaménko u odmocniny a hodnota y_1 je reálná pouze pro $c \leqq 1$);

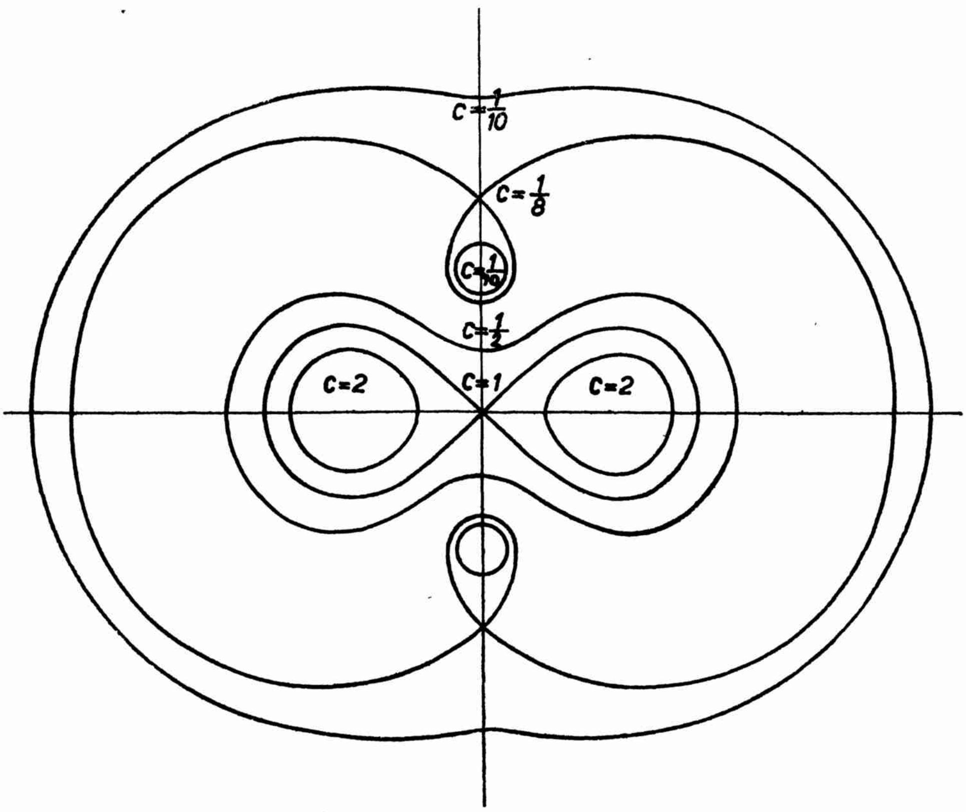
resp. $$y_{23}^2 = \frac{-2c + 1 \pm \sqrt{1 - 8c}}{2c}, \text{ takže } y_3^2 = \frac{y_2^2 + 3}{y_2^2 - 1} . \tag{21,4}$$

Je vidět, že pro $c < \frac{1}{8}$ protíná křivka osu y celkem ve třech párech (k ose x symetricky položených) bodů: $\pm y_1$, $\pm y_2$, $\pm y_3$, a pro $c < \frac{1}{8}$ pouze v jednom páru bodů $\pm y_1$.

Označíme-li σ_0 hlavní napětí v počátku $= \frac{Ea^2\alpha}{e^2}$, σ absolutní hodnotu hlavního napětí v obecném bodě, značí konstantní faktor $c = \frac{\sigma}{\sigma_0}$. V obr. 3 byly zakresleny křivky konstantních hlavních napětí pro různé hodnoty c.

Průsečíky s osami jsou uvedeny v tabulce.

c	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$
x_1	0,488	0	2,05	3,26	3,565	4,77
x_2	1,51	$\sqrt{3} = 1{,}732$	imag	imag	imag	imag
y_1	imag	0	0,486	0,8105	0,842	0,913
y_2	imag	imag	imag	$\sqrt{3} = 1{,}732$	1,328	1,12
y_3	imag	imag	imag	$\sqrt{3} = 1{,}732$	2,497	4,10



Obr. 3.