Časopis pro pěstování matematiky, roč. 79 (1954)

POZNÁMKA K JEDNOMU ŘEŠENÍ BIHARMONICKÉHO PROBLÉMU

IVO BABUŠKA, Praha.

(Došlo dne 19. května 1953.) DT: 517.946

G. A. Grinberg upozornil v [1] a společně s *N. N. Lebeděvem* a *Ja. S. Ufljandem* v [2] na jednu methodu řešení biharmonického problému v rovině pomocí orthonormálních řad. V této poznámce bude učiněno několik připomínek k této methodě a bude ukázána jedna modifikace Grinbergova postupu.

1. Řešení rovinného biharmonického problému orthonormálními řadami podle G. A. Grinberga.

V tomto odstavci vyložím stručně hlavní myšlenku Grinbergova postupu. Ukáži ji pouze pro řešení homogenního biharmonického problému $\Delta\Delta u = 0$. Při řešení nehomogenního problému je základní myšlenka stejná.

Problém formulujme takto: Buď Ω rovinná jednoduše souvislá oblast, ohraničená jednoduchou dostatečně hladkou křivkou C. Jest nalézti řešení rovnice $\Delta\Delta u = 0$, když na C nabývají funkce u a $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ (ν je vnější normála) předepsaných hodnot.

Předpokládejme, že řešení existuje a že

$$\iint_{\Omega} (\Delta u)^2 \, d\Omega < \infty \, .$$

Hlavní myšlenkou Grinbergovou jest rozvinutí funkce Δu pomocí orthonormálních funkcí.

Buď u_n ($n = 1, 2, \ldots$) uzavřený orthonormální systém harmonických funkcí. Podle předpokladu jest funkce Δu integrovatelná s kvadrátem na Ω. Lze ji tedy vyjádřit řadou

$$\Delta u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \, ,$$

kde

$$\alpha_n = \iint_{\Omega} (\Delta u) \, u_n \, d\Omega \, .$$

Koeficienty α_n můžeme vyjádřit pomocí u a $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ na C. Skutečně z Greenovy věty plyne relace

$$\int\int_{\Omega} (\Delta u)\, u_n \,\mathrm{d}\Omega = \int\int_{\Omega} u(\Delta u_n)\,\mathrm{d}\Omega + \int_C \left(u_n \frac{\partial u}{\partial \nu} - u\,\frac{\partial u_n}{\partial \nu}\right) \mathrm{d}s\,.$$

Poněvadž u_n je podle předpokladu harmonická funkce, je prvý integrál na pravé straně roven nule, takže platí

$$\alpha_n = \int_C \left(u_n \frac{\partial u}{\partial \nu} - u\,\frac{\partial u_n}{\partial \nu}\right) \mathrm{d}s.$$

Na C známe u a $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ jako okrajové podmínky. Můžeme tedy určit všechny koeficienty α_n a tím i funkci Δu.

Známe-li funkci Δu, určíme podle Grinberga hledanou funkci u jako řešení Dirichletova nebo Neumannova problému.

K methodě, jak ji navrhl G. A. Grinberg, váže se řada otázek. Jde především o problém uzavřenosti (úplnosti) systémů harmonických funkcí a o některé otázky konvergenční. Při numerickém počítání je dále nevýhodné, že je ve druhé fázi nutno provádět řešení Dirichletova neb Neumannova problému. Naznačené obtíže lze však překonati, jak bude ukázáno v této poznámce, alespoň pro oblasti s dostatečně hladkou hranicí.

K oblastem s hranicí po částech hladkou, které jsou v aplikacích nejdůležitější, se vrátím někdy později.

Poznámka. Biharmonický rovinný problém má velkou důležitost v aplikacích. Tak řešení rovinného problému pružnosti jest vlastně řešení biharmonického problému. Na biharmonický problém se také snadno převede řešení napjatosti v deskách.

2. Některé pomocné věty.

Definice 1. *Buď C jednoduchá orientovaná hladká křivka. Buď $\vartheta(s)$ úhel kladného směru tečny s osou x, kde s je délka oblouku. Nechť $\vartheta(s)$ jest totálně spojitá a $\frac{\mathrm{d}\vartheta(s)}{\mathrm{d}s} \in L_p$, $p > 1$, t. j. nechť $\int_C \left|\frac{\mathrm{d}\vartheta(s)}{\mathrm{d}s}\right|^p \mathrm{d}s < \infty$. Potom budeme říkat, že křivka C jest dostatečně hladká. Orientaci předpokládejme tak, že vnitřek je po levé straně.*

Věta 1. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď $\omega(\zeta)$ holomorfní funkce, která konformně zobrazuje jednotkový kruh $\Gamma = E[\zeta, |\zeta| < 1]$ na Ω. Potom funkce $\omega'(\zeta)$ jest v uzavřeném jednotkovém kruhu $\overline{\Gamma} = E[\zeta, |\zeta| \leq 1]$ spojitá* *a totálně spojitá na hranici $\gamma = E[\zeta, |\zeta| = 1]$. Při tom $|\omega'(\zeta)|$ má kladné minimum.*[1])

Důkaz: Viz [3], str. 322, Satz 1.

Definice 2. *Buď Ω omezená oblast. Budeme značit $L_2^{*\Omega}$ lineární prostor všech harmonických funkcí definovaných na Ω a integrovatelných s kvadrátem. Při tom budeme v $L_2^{*\Omega}$ předpokládat běžný skalární součin a metriku.*

Věta 2. *Prostor $L_2^{*\Omega}$ jest úplný. Mimo to platí: Jestliže $f_n \in L_2^{*\Omega}$ a $f_n \to f$ v prostoru $L_2^{*\Omega}$, potom f_n konverguje bodově skoro stejnoměrně, t. j. stejnoměrně na každé uzavřené množině $F \subset \Omega$.*[2])

Důkaz: Buď $f_n \in L_2^{*\Omega}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ cauchyovská posloupnost. Dokažme nejprve, že tato posloupnost konverguje bodově skoro stejnoměrně na Ω, t. j. že konverguje stejnoměrně na každé uzavřené množině $F \subset \Omega$. Buď $C\Omega$ komplement množiny Ω a nechť $\varrho(F, C\Omega) > 3\eta$ $(\eta > 0)$. Poněvadž F je kompaktní, existuje konečné pokrytí množiny F sférickými okolími $S(z_K, \eta)$ o středech $z_K \in F$ a poloměru η.

Poněvadž $f_n \in L_2^{*\Omega}$, jest f_n harmonická funkce a tedy platí

$$f_n(z_k + re^{i\Theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n(z_k + Re^{i\varphi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\Theta - \varphi)}\, d\varphi\,,$$

pokud $r < R < 3\eta$.

Budiž nyní $r \leqq \eta$. Vynásobme obě strany veličinou R a integrujme podle R od 2η do 3η. Dostaneme

$$f_n(z_k + re^{i\Theta})\, \tfrac{5}{2}\eta^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\eta}^{3\eta}\int_0^{2\pi} f_n(z_k + Re^{i\varphi}) \frac{(R^2 - r^2)\, R\, dR\, d\varphi}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\Theta - \varphi)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\int_{E_k} f_n(z)\, K(r, \Theta, z)\, d\Omega\,,$$

kde

$$E_k = E[z, 2\eta \leqq |z - z_k| \leqq 3\eta]\,.$$

Jestliže je $r \leqq \eta$, jest $K(r, \Theta, z)$ omezená spojitá funkce.

Poněvadž posloupnost f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ jest cauchyovská, jest $f_n(z_k + re^{i\Theta})$ při pevném z_k, r, Θ cauchyovská číselná posloupnost. Existuje tedy funkce f, že $f_n \to f$ bodově stejnoměrně na $S(z_k, \eta)$. Poněvadž pokrytí jest konečné, je konvergence skoro stejnoměrná na Ω.

Dokažme nyní, že f je harmonická funkce.

---

[1]) Mluvíme-li o funkci $\omega'(\zeta)$ na hranici, míníme tím její spojité prodloužení z Γ.

[2]) Ve větě stačí předpokládat, že $f_n \to f$ v L_1. Poněvadž však dále se budeme zabývat jen prostory L_2, vyslovujeme větu ve výše uvedené formulaci.

Skutečně

$$f_n(z_k + re^{i\Theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n(z_k + Re^{i\varphi})\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\Theta - \varphi)\,d\varphi}\,.$$

Poněvadž f_n konverguje stejnoměrně bodově k f, platí

$$f(z_k + re^{i\Theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_k + Re^{i\varphi})\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\Theta - \varphi)}\,d\varphi\,. \qquad (1)$$

Z toho však plyne, že f je harmonická funkce, neboť (1) je Poissonův integrál.

Definice 3. *Buď Ω omezená oblast. Budeme značit $L_2^{**\Omega}$ lineární prostor všech holomorfních funkcí definovaných na Ω s integrovatelným kvadrátem absolutní hodnoty. Při tom budeme v $L_2^{**\Omega}$ předpokládat běžnou kvadratickou metriku.*

Věta 3. *Jestliže jest $\varphi \in L_2^{**\Omega}$, potom platí, že* $\operatorname{Re}\varphi \in L_2^{*\Omega}$ *a* $\operatorname{Im}\varphi \in L_2^{*\Omega}$.

Důkaz: Platí $|\varphi|^2 = (\operatorname{Re}\varphi)^2 + (\operatorname{Im}\varphi)^2$.

Věta 4. *Buď C dostatečně hladká křivka, Ω její vnitřek. Buď φ holomorfní funkce definovaná na Ω taková, že* $\operatorname{Re}\varphi \in L_2^{*\Omega}$. *Potom jest $\varphi\Gamma \in L_2^{**\Omega}$. Dále buď $z_0 \in \Omega$. Jestliže v $L_2^{*\Omega}$ jest* $\|\operatorname{Re}\varphi\| \leqq 1$ *a jestliže* $\operatorname{Im}\varphi(z_0) = 0$, *potom v $L_2^{**\Omega}$ platí $\|\varphi\| \leqq A$, kde A závisí jen na C a na z_0 (nikoliv na φ).*

Důkaz: Buď $\omega(\zeta)$ konformní zobrazení jednotkového kruhu $\Gamma = E[\zeta, |\zeta| < 1]$ na Ω takové, že $\omega(0) = z_0$. Buď $\chi(\zeta) = \varphi(\omega(\zeta))$. Označme dále $u = \operatorname{Re}\varphi$ a $u^*(\zeta) = u(\omega(\zeta))$. Zřejmě jest $\operatorname{Re}\chi = u^*$. Poněvadž jest $\operatorname{Im}\varphi(z_0) = 0$, platí, že $\operatorname{Im}\chi(0) = 0$.

Snadno se dále nahlédne, že

$$\iint_\Omega u^2\,d\Omega = \iint_\Gamma u^{*2}|\omega'|^2\,d\Gamma\,,$$

pokud jen integrál na jedné straně má smysl. Poněvadž podle předpokladu jest $u \in L_2^{*\Omega}$, jest také $u^* \in L_2^{*\Gamma}$, neboť podle věty 1 má $|\omega'(\zeta)|$ kladné minimum.

Funkci $\chi(\zeta)$ rozviňme v Taylorovu řadu. Je pak

$$\chi(re^{i\varphi}) = \sum_0^\infty \alpha_k r_k e^{ik\varphi}\,.$$

Tato řada konverguje absolutně a stejnoměrně pro $r \leqq r_0 < 1$. Tedy platí

$$\operatorname{Re}\chi(re^{i\varphi}) = u^*(re^{i\varphi}) = \sum_0^\infty a_k r^k \cos k\varphi + \sum_1^\infty b_k r^k \sin k\varphi\,, \qquad (1)$$

kde

$$\alpha_k = a_k - ib_k\,.$$

Obě řady konvergují absolutně a stejnoměrně pro $r \leqq r_0 < 1$.

Dokážeme, že řada 1 konverguje v prostoru $L_2^{*\Gamma}$. Skutečně platí pro každé $r_0 < 1$

$$\iint\limits_{|\zeta|<r_0} u^{*2}\,\mathrm{d}\Gamma \leqq \iint\limits_{\Gamma} u^{*2}\,\mathrm{d}\Gamma = D < \infty\,.$$

Tedy

$$\iint\limits_{|\zeta|<r_0} u^{*2}\,\mathrm{d}\Gamma = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r_0}(\sum_0^{\infty} a_k r^k \cos k\varphi) + \sum_1^{\infty} b_k r^k \sin k\varphi)^2\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\sum_1^{\infty} a_k^2 \frac{r_0^{2k+2}}{k+1} + \sum_1^{\infty} b_k^2 \frac{r_0^{2k+2}}{k+1} + 2a_0^2 r_0^2\right]. \tag{2}$$

Poněvadž relace (2) platí pro každé $r_0 < 1$, je zřejmo, že řady

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_k^2}{k+1} \quad \text{a} \quad \sum_1^{\infty} \frac{b_k^2}{k+1} \tag{3}$$

konvergují. Z toho již snadno plyne, že řada (1) konverguje v prostoru $L_2^{*\Gamma}$.

Imaginární část funkce $\chi(\zeta)$ lze rozepsat ve tvaru

$$\operatorname{Im}\chi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = \sum_1^{\infty}(-\,b_k \cos k\varphi + a_k \sin k\varphi)\,r^k\,. \tag{4}$$

Tato řada konverguje absolutně a stejnoměrně pro $r \leqq r_0 < 1$. Vzhledem ke konvergenci řad (3) je zřejmo, že řada (4) konverguje i v prostoru $L_2^{*\Gamma}$. Odtud plyne, že jest $\chi \in L_2^{**\Gamma}$ a že

$$\iint\limits_{\Gamma} |\chi|^2\,\mathrm{d}\Gamma \leqq 2\iint\limits_{\Gamma} u^{*2}\,\mathrm{d}\Gamma\,.$$

Podle věty 1 jest funkce $\omega'(\zeta)$ spojitá na uzavřeném kruhu $\overline{\Gamma}$ a tedy jest omezená. Při tom její maximum záleží jen na C a poloze bodu z_0.

Poněvadž jest

$$\iint\limits_{\Omega} |\varphi|^2\,\mathrm{d}\Omega = \iint\limits_{\Gamma} |\chi|^2\,|\omega'|^2\,\mathrm{d}\Gamma\,,$$

jest naše tvrzení dokázáno.

Definice 4. *Buď u harmonická funkce v jednotkovém kruhu $\Gamma = E[\zeta, |\zeta| < 1]$. Budeme říkat, že funkce u je typu H, jestliže*

$$\sup_{r<1} \int\limits_0^{2\pi} (u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}))^2\,\mathrm{d}\varphi < \infty\,.$$

Poznámka. Lze ukázat, že pro každou harmonickou funkci u platí

$$1 > r_1 > r_2 \Rightarrow \int\limits_0^{2\pi} (u(r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}))^2\mathrm{d}\varphi \geqq \int\limits_0^{2\pi} (u(r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}))^2\,\mathrm{d}\varphi$$

a proto místo suprema bychom mohli uvažovat limitu.

Definice 5. *Buď ψ holomorfní funkce v jednotkovém kruhu Γ. Budeme říkat, že funkce ψ je typu H_2, jestliže*

$$\sup_{r<1} \int_0^{2\pi} |\psi(re^{i\varphi})|^2 \, d\varphi < \infty .$$

Poznámka. Opět bychom místo suprema mohli uvažovat limitu.

Definice 6. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď u harmonická funkce definovaná na Ω. Budeme říkat, že funkce u je typu E, jestliže existuje konformní zobrazení $\omega(\zeta)$ jednotkového kruhu Γ na Ω takové, že $u(\omega(\zeta))$ je typu H.*

Poznámka. Konformní zobrazení Γ na Ω není zřejmě jediné. Lze však ukázat, že vlastnost „býti typu H" je nezávislá na tom, které konformní zobrazení Γ na Ω uvažujeme. Tak jestliže jsou $\omega_1(\zeta)$ a $\omega_2(\zeta)$ dvě různá konformní zobrazení jednotkového kruhu na oblast Ω, potom z toho, že $u(\omega_1(\zeta))$ je typu H, plyne, že i $u(\omega_2(\zeta))$ je typu H. Nám však bude stačit definice v uvedeném tvaru a proto nebudeme musit dokazovat tuto nezávislost.

Definice 7. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď φ holomorfní funkce definovaná na Ω. Budeme říkat, že funkce φ je typu E_2, jestliže existuje konformní zobrazení $\omega(\zeta)$ jednotkového kruhu Γ na Ω takové, že $\varphi(\omega(\zeta))$ je typu H_2.*

Věta 5. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď φ holomorfní funkce na Ω taková, že $\operatorname{Re} \varphi$ je typu E. Potom je φ typu E_2.*

Důkaz: Označme $\operatorname{Re} \varphi = u$. Podle předpokladu existuje konformní zobrazení $\omega(\zeta)$ jednotkového kruhu Γ na Ω takové, že $u^*(\zeta) = u(\omega(\zeta))$ jest typu H. Položme dále $\chi(\zeta) = \varphi(\omega(\zeta))$. Zřejmě jest $u^* = \operatorname{Re} \chi$.

Rozviňme funkci χ v Taylorovu řadu. Jest

$$\chi(re^{i\Theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k r^k e^{ik\Theta}$$

a tedy

$$\operatorname{Re} \chi(re^{i\Theta}) = u^*(re^{i\Theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \cos k\Theta + \sum_{k=1}^{\infty} b_k r^k \sin k\Theta ,$$

kde

$$\alpha_k = a_k - ib_k .$$

Podle předpokladu jest u^* typu H. Tedy jest

$$\int_0^{2\pi} (u^*(re^{i\Theta}))^2 \, d\Theta = \int_0^{2\pi} (\sum_0^{\infty} a_k r^k \cos k\Theta + \sum_1^{\infty} b_k r^k \sin k\Theta)^2 \, d\Theta =$$

$$= \pi(2a_0^2 + \sum_1^{\infty} a_k^2 r^{2k} + \sum_1^{\infty} b_k^2 r^{2k}) < D < \infty$$

pro každé $r < 1$.

Z toho však plyne, že řady

$$\sum_1^\infty a_k^2, \qquad \sum_1^\infty b_k^2 \tag{1}$$

jsou konvergentní.

Dále však, jak se snadno nahlédne, platí

$$\int_0^{2\pi} |\chi(re^{i\Theta})|^2 \, d\Theta = 2\pi \sum_0^\infty |\alpha_k|^2 r^{2k} .$$

Poněvadž řady (1) jsou konvergentní, jest $\chi(\zeta)$ typu H_2. Podle definice jest tedy φ typu E_2.

Věta 6. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď ψ holomorfní funkce definovaná na Ω a nechť ψ je typu E_2. Potom funkce* $\operatorname{Re} \psi$ *a* $\operatorname{Im} \psi$ *jsou typu E.*

Důkaz: Zřejmé.

Věta 7. *Buď ψ holomorfní funkce definovaná na jednotkovém kruhu $\Gamma = E[\zeta, |\zeta| < 1]$ a nechť je ψ typu H_2. Potom ψ jest skoro všude úhlově prodlužitelná na hranici $\gamma = E[\zeta, |\zeta| = 1]$.*

Důkaz: Viz [4], str. 82.

Věta 8. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď ψ holomorfní funkce definovaná na Ω a nechť ψ jest typu E_2. Potom ψ je skoro všude úhlově prodlužitelná na hranici C.*

Důkaz: Podle předpokladu jest ψ typu E_2. Existuje proto funkce $\omega(\zeta)$, která konformně zobrazuje jednotkový kruh Γ na Ω taková, že $\psi(\omega(\zeta))$ jest typu H_2. Podle předešlé věty jest $\psi(\omega(\zeta))$ skoro všude úhlově prodlužitelná na hranici. Poněvadž úhlové prodloužení na Γ zůstane úhlovým prodloužením i po konformním zobrazení na Ω, jest ψ úhlově prodlužitelná na hranici C.

Věta 9. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď ψ holomorfní funkce definovaná na Ω taková, že* $\operatorname{Re} \psi$ *jest typu E. Potom jsou funkce* $\operatorname{Re} \psi$ *a* $\operatorname{Im} \psi$ *skoro všude úhlově prodlužitelné na hranici.*

Důkaz: Tvrzení jest důsledkem vět 5 a 8.

Věta 10. *Buď ψ holomorfní funkce definovaná na jednotkovém kruhu Γ a nechť ψ je typu H_2. Jestliže $\psi(e^{i\varphi})$ jest úhlové prodloužení funkce ψ na hranici kruhu (to existuje pro skoro všechna $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (viz větu 7)), potom platí*

$$\lim_{\varphi \to 1-} \int_0^{2\pi} |\psi(\varrho e^{i\varphi}) - \psi(e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi = 0 .$$

Důkaz: Rozviňme funkci ψ v Taylorovu řadu. Bude

$$\psi(\zeta) = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k \zeta^k .$$

Pro $\varrho < 1$ platí Parsevalova rovnost

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi(\varrho e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 \varrho^{2k}.$$

Protože ψ je typu H_2, platí tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty .$$

Buď nyní $0 < \lambda < 1$. Dostáváme vztah

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi(\varrho e^{i\varphi}) - \psi(\lambda\varrho e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 \varrho^{2k}(1 - \lambda^k)^2 .$$

Přejdeme-li k limitě pro $\varrho \to 1$, plyne z Fatouovy nerovnosti

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi(e^{i\varphi}) - \psi(\lambda e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi \leqq \sum |\alpha_k|^2 (1 - \lambda^k)^2 ,$$

z čehož dále plyne naše tvrzení.

Věta 11. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď ψ holomorfní funkce definovaná na Ω taková, že $\mathrm{Re}\, \psi' \in L_2^{*\Omega}$. Potom jest ψ typu E_2. Dále budiž $z_0 \in \Omega$. Jestliže v $L_2^{*\Omega}$ jest $\|\mathrm{Re}\, \psi'\| \leqq 1$ a jestliže $\psi(z_0) = \mathrm{Im}\, \psi'(z_0) = 0$, potom platí $\int_C |\psi|^2 \, ds \leqq A$, kde A závisí pouze na C a z_0 (nikoliv na ψ).*

Důkaz: Buď $\omega(\zeta)$ konformní zobrazení jednotkového kruhu Γ na Ω. Nechť při tom jest $\omega(0) = z_0$. Položme $\chi(\zeta) = \psi'(\omega(\zeta))$. Podle předpokladu bude $\mathrm{Im}\, \chi(0) = 0$. Poněvadž podle věty 1 má $|\omega'(\zeta)|$ kladné minimum, platí

$$\iint_\Omega (\mathrm{Re}\, \psi')^2 \, d\Omega = \iint_\Gamma (\mathrm{Re}\, \chi)^2 \, |\omega'|^2 \, d\Gamma \geqq D \iint_\Gamma (\mathrm{Re}\, \chi)^2 \, d\Gamma .$$

Z věty 4 dále plyne, že

$$\iint_\Gamma |\chi|^2 \, d\Gamma \leqq D_1 \iint_\Gamma |\mathrm{Re}\, \chi|^2 \, d\Gamma \leqq D_2 \iint_\Omega (\mathrm{Re}\, \psi')^2 \, d\Omega .$$

Buď nyní $\varkappa(\zeta)$ holomorfní funkce na jednotkovém kruhu taková, že $\varkappa(0) = 0$ a $\varkappa'(\zeta) = \chi(\zeta)\, \omega'(\zeta)$. Platí

$$\iint_\Gamma |\varkappa'|^2 \, d\Gamma \leqq D_3 \iint_\Gamma |\chi|^2 \, d\Gamma \leqq D_4 \iint_\Gamma (\mathrm{Re}\, \psi')^2 \, d\Omega .$$

Rozviňme funkci $\varkappa$ v Taylorovu řadu. Jest

$$\varkappa'(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^k .$$

Dále platí

$$\iint_\Gamma |\varkappa'|^2 \, d\Gamma = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{k+1} ,$$

z čehož plyne, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{k+1}$ je konvergentní a

$$\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{k+1} \leqq D_4 \iint_{\Omega} (\operatorname{Re} \psi')^2 \mathrm{d}\Omega .$$

Poněvadž jest

$$\varkappa(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k+1} \zeta^{k+1} ,$$

platí, že

$$\lim_{\lambda \to 1-} \int_0^{2\pi} \varkappa(\lambda e^{i\varphi}) \, \mathrm{d}\varphi = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{(k+1)^2} .$$

Poněvadž řada $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{k+1}$ je konvergentní, jest tím spíše konvergentní řada $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{(k+1)^2}$. Z toho plyne, že funkce $\varkappa$ je typu H_2. Dále pak podle věty 10 jest

$$\int_0^{2\pi} |\varkappa(e^{i\varphi})|^2 \, \mathrm{d}\varphi = \lim_{\lambda \to 1} \int_0^{2\pi} |\varkappa(\lambda e^{i\varphi})|^2 = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{(k+1)^2}$$

a tedy

$$\int_0^{2\pi} |\varkappa(e^{i\varphi})|^2 \, \mathrm{d}\varphi \leqq D_5 \iint_{\Omega} (\operatorname{Re} \psi')^2 \, \mathrm{d}\Omega .$$

Snadno se již nahlédne naše tvrzení, uvážíme-li jen, že $\varkappa(\zeta) = \psi(\omega(\zeta))$ a že podle věty 1 jest $|\omega'(\zeta)|$ omezené.

Definice 8. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Posloupnost harmonických funkcí $u_n \in L_2^{*\Omega}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nazveme uzavřenou v $L_2^{*\Omega}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a každou funkci $u \in L_2^{*\Omega}$ existují reálné koeficienty α_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ tak, že platí*

$$\iint_{\Omega} (u - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n)^2 \, \mathrm{d}\Omega < \varepsilon .$$

Definice 9. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Posloupnost holomorfních funkcí $\psi_n \in L_2^{**\Omega}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nazveme uzavřenou v $L_2^{**\Omega}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a každou funkci $\psi \in L_2^{**\Omega}$ existují koeficienty α_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ tak, že platí*

$$\iint_{\Omega} (\psi - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \psi_n)^2 \, \mathrm{d}\Omega < \varepsilon .$$

Věta 12. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď ψ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ uzavřená posloupnost holomorfních funkcí v $L_2^{**\Omega}$. Potom posloupnost harmonických funkcí $u_{2n} = \operatorname{Re} \psi_n$, $u_{2n-1} = \operatorname{I}_m \psi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ je uzavřená v $L_2^{*\Omega}$.*

Důkaz: Buď ψ holomorfní funkce definovaná na Ω a nechť $\operatorname{Re} \psi \in L_2^{*\Omega}$. Potom podle věty 4 jest $\psi \in L_2^{**\Omega}$. Tedy podle předpokladu pro každé $\varepsilon > 0$ existují koeficienty α_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$, že

$$\iint_{\Omega} |\psi - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \psi_n|^2 \, d\Omega < \varepsilon .$$

Z toho však plyne, že posloupnost funkcí u_k jest uzavřená.

Poznámka. Věta 12 umožňuje nám konstruovati uzavřené posloupnosti v $L_2^{*\Omega}$, neboť v $L_2^{**\Omega}$ se uzavřenost verifikuje snadněji než v $L_2^{*\Omega}$. Lze se na př. přesvědčit, že posloupnost z^n jest uzavřená. Srv. také [5], kap. V., § 4, zvláště pak str. 429.

3. Biharmonický problém.

Věta 13. *Buď Ω jednoduše souvislá oblast a g biharmonická funkce definovaná na Ω. Potom funkci g lze vyjádřit ve tvaru*

$$g = \mathrm{Re}\,[\bar{z}\varphi + \chi]$$

kde φ, χ jsou holomorfní funkce definované na Ω. Dále platí

$$\frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial g}{\partial y} = \varphi + z\overline{\varphi'} + \overline{\chi'}$$

a

$$\Delta g = 4\mathrm{Re}\,\varphi' .$$

Při tom φ' je určeno až na ryze imaginární konstantu.

Důkaz: Viz [6], str. 108.

Věta 14. *Buď C dostatečně hladká křivka, Ω její vnitřek; nechť $z_0 \in \Omega$. Buď ψ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ posloupnost celistvých[1]) funkcí splňující tyto předpoklady:*

1. *Posloupnost funkcí $v_n = \mathrm{Re}\,\psi_n$ je uzavřená v $L_2^{*\Omega}$.*
2. *Posloupnost funkcí $v_n = \mathrm{Re}\,\psi_n$ je orthonormalisovaná, t. j. platí*

$$\iint_{\Omega} v_n v_m \, d\Omega = \begin{cases} 1 \text{ pro } n = m , \\ 0 \text{ pro } n \neq m . \end{cases}$$

3. *Nechť platí* $\mathrm{Im}\,\psi_n(z_0) = 0$ *pro* $n = 1, 2, \ldots$ *Buď dále g biharmonická funkce na Ω mající tyto vlastnosti:*
4. *Obě prvé derivace funkce g jsou spojité na Ω.*
5. $$\Delta g \in L_2^{*\Omega} .$$

Potom je-li $g = \mathrm{Re}\,[\bar{z}\varphi + \chi]$,[2]) *platí*

$$\varphi' = \tfrac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n ;$$

---

[1]) Předpoklad, že funkce ψ_n jsou celistvé, není podstatný. Poněvadž však při skutečném výpočtu budou pravidelně funkce ψ_n celistvé, vyslovujeme větu 14 v uvedeném tvaru.

[2]) Označení je míněno jako ve větě 13.

tato řada konverguje v prostoru $L_2^{**\Omega}$ a tedy i bodově skoro stejnoměrně na Ω. Při tom

$$\alpha_n = \mathrm{Im} \int_C \overline{F} \, . \, \psi_n \, \mathrm{d}t \, ,$$

kde

$$F = \frac{\partial g}{\partial x} + \mathrm{i} \frac{\partial g}{\partial y} = \varphi + z\overline{\varphi'} + \overline{\chi}' \, .$$

Důkaz: Položme $v_n = \mathrm{Re}\, \psi_n, w_n = \mathrm{Im}\, \psi_n$. Podle předpokladu jest posloupnost funkcí v_n uzavřená v prostoru $L_2^{*\Omega}$. Poněvadž dále jest podle věty 2 prostor $L^{*\Omega}$ úplný, máme

$$\Delta g = u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n \, ,$$

kde

$$\alpha_n = \iint_\Omega v_n u \, \mathrm{d}\Omega \, .$$

Poněvadž podle věty 13 jest $\Delta g = 4\mathrm{Re}\, \varphi'$, platí

$$4\varphi' = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n \, ,$$

kde řada podle věty 4 konverguje v prostoru $L_2^{**\Omega}$.

Z Greenovy věty dále plyne

$$\alpha_n = \iint_\Omega v_n u \, \mathrm{d}\Omega = \iint_\Omega v_n \, \Delta g = \int_C \left(v_n \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial v_n}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}s \, ,$$

kde ν jest vnější normála.

Dále pak platí

$$\frac{\partial v_n}{\partial \nu} = \frac{\partial w_n}{\partial s} \, ,$$

jak se nahlédne z Cauchy-Riemannových podmínek.

Tedy jest

$$\int_C g \frac{\partial v_n}{\partial \nu} \, \mathrm{d}s = \int_C g \frac{\partial w_n}{\partial s} \, \mathrm{d}s = -\int_C \frac{\partial g}{\partial s} w_n \, \mathrm{d}s \, .$$

Proto jest

$$\alpha_n = \int_C \left(v_n \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial v_n}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}s = \int_C \left(v_n \frac{\partial g}{\partial \nu} + w_n \frac{\partial g}{\partial s} \right) \mathrm{d}s \, .$$

Dále platí

$$\frac{\partial g}{\partial \nu} \, \mathrm{d}s = \frac{\partial g}{\partial x} \cos(x, \nu) \, \mathrm{d}s + \frac{\partial g}{\partial y} \sin(x, \nu) \, \mathrm{d}s = \frac{\partial g}{\partial x} \, \mathrm{d}y - \frac{\partial g}{\partial y} \, \mathrm{d}x \, ,$$

$$\frac{\partial g}{\partial s} \, \mathrm{d}s = \frac{\partial g}{\partial x} \, \mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y} \, \mathrm{d}y \, ,$$

takže

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \nu} v_n + \frac{\partial g}{\partial s} w_n\right) \mathrm{d}s = \left(\frac{\partial g}{\partial x} v_n + \frac{\partial g}{\partial y} w_n\right) \partial y + \left(- \frac{\partial g}{\partial y} v_n + \frac{\partial g}{\partial x} w_n\right) \mathrm{d}x \,.$$

Položme

$$F = \frac{\partial g}{\partial x} + \mathrm{i} \frac{\partial g}{\partial y} \,.$$

Jest

$$\frac{\partial g}{\partial x} v_n + \frac{\partial g}{\partial y} w_n = \mathrm{Re}\,(\bar{F}\psi_n)\,; \qquad \frac{\partial g}{\partial x} w_n - \frac{\partial g}{\partial y} v_n = \mathrm{Im}\,(\bar{F}\psi_n)\,.$$

Bude tedy

$$\alpha_n = \iint_{\Omega} v_n \Delta g \,\mathrm{d}\Omega = \int_C \mathrm{Re}\,(\bar{F}\psi_n)\,\mathrm{d}y + \mathrm{Im}\,(\bar{F}\psi_n)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im} \int_C \bar{F}\psi_n \,\mathrm{d}t \,,$$

kde

$$t = x + \mathrm{i}y \,.$$

Uvážíme-li tvrzení věty 2, jest naše věta úplně dokázána.

Známe-li nyní parciální derivace na hranici C, potom podle dokázané věty můžeme určit s libovolnou přesností funkci φ'. Ve větě je podstatný předpoklad existence biharmonické funkce. Postup pro určení funkce φ' by totiž měl formální význam i tehdy, kdyby biharmonická funkce neexistovala. Tedy jestliže chceme ze známých okrajových hodnot funkcí $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$ vyjádřit funkci φ', musí být zaručena existence biharmonické funkce. Pro křivku dostatečně hladkou ve smyslu tohoto článku jest existenční věta dokázána pomocí variačních principů; nelze však obecně zaručit, že parciální derivace jsou spojité na $\bar{\Omega}$, jak předpokládá naše věta. Ukážeme však, že předpoklad spojitosti funkcí $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$ na $\bar{\Omega}$ není podstatný a že jej lze nahradit předpokladem slabším, který již bude splněn.

Nejprve si však dokážeme pomocné věty.

Věta 15. *Buď Γ jednotkový kruh. Buď reálná f spojitá funkce na Γ taková, že obě parciální derivace jsou na Γ spojité a integrovatelné s kvadrátem. Potom*

1. *pro každé ϱ z intervalu $(\frac{1}{2}, 1)$ platí*

$$\int_0^{2\pi} f^2(\varrho e^{\mathrm{i}\varphi})\,\mathrm{d}\varphi \leqq D\left[\int_S\!\!\int f^2 \,\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma\!\!\int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega\right],$$

kde jest D konstanta nezávislá na f a kde

$$S = E[z, |z| < \tfrac{1}{4}]\,;$$

2. *existuje funkce* $f(e^{i\varphi})$, *že*

$$\lim_{\varrho\to 1-0}\int_0^{2\pi}(f(\varrho e^{i\varphi}) - f(e^{i\varphi}))^2\, d\varphi = 0\,.$$

Důkaz provedeme na základě myšlenky, které užil S. L. Sobolev (srv. [6]) při důkazu jedné obecné věty. Naše tvrzení jest sice důsledkem této věty, přesto však budeme hlavní myšlenku reprodukovat v našem speciálním případě.

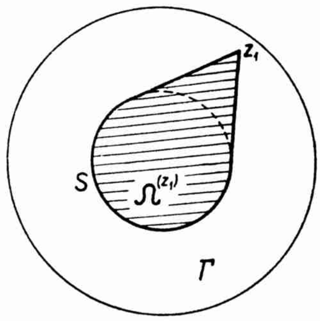
1. Dokážeme nejprve první část našeho tvrzení.

Buď

$$S = E[z, |z| \leqq \tfrac{1}{4}]$$

a položme

$$v(z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|z|^2-(\frac{1}{4})^2}} & \text{pro } |z| < \tfrac{1}{4}\,, \\ 0 & \text{pro } |z| \geqq \tfrac{1}{4}\,, \end{cases}$$



$$\tilde{v}(z_1, r, \Theta) = v(z_1 + re^{i\Theta})\,,$$

$$\tilde{f}(z_1, r, \Theta) = f(z_1 + re^{i\Theta})\,,$$

$$\tilde{\psi}(z_1, r, \Theta) = -\int_r^{\infty}\tilde{v}(z_1, \varrho, \Theta)\,\varrho\, d\varrho\,.$$

Pro $z_1 \neq z_2$ buď dále

$$\psi(z_1, z_2) = \psi(z_1, r, \Theta)\,,$$

kde

$$z_2 = z_1 + re^{i\Theta}\,,\qquad r > 0\,,\qquad 0 \leqq \Theta < 2\pi$$

a předpokládejme vždy dále, že $|z_1| > \frac{1}{4}$.

Snadno se nahlédne, že funkce $\psi(z_1, z_2)$ při pevném z_1 jest různá od nuly pouze na oblasti $\Omega^{(z_1)}$, která je ohraničena částí kruhu $|z| = \frac{1}{4}$ a tečnami k S z bodu Z_1 (viz obr.).

Definujme dále pomocnou funkci

$$V(z_1, r, \Theta) = \tilde{f}(z_1, r, \Theta)\,\tilde{\psi}(z_1, r, \Theta) = -\tilde{f}(z_1, r, \Theta)\,.\int_r^{\infty}\tilde{v}(z_1, \varrho, \Theta)\,\varrho\, d\varrho$$

pro

$$z_1 + re^{i\Theta} \in \Gamma\,,$$

$$V(z_1, r, \Theta) = 0$$

pro

$$z_1 + re^{i\Theta} \text{ non} \in \Gamma\,.$$

Položíme-li $r = 0$, bude

$$V(z, 0, \Theta) = \tilde{f}(z_1, 0, \Theta)\,.\,\tilde{\psi}(z_1, 0, \Theta) = -f(z_1)\int_0^{\infty}\tilde{v}(z_1, \varrho, \Theta)\,\varrho\, d\varrho$$

a dále

$$V(z_1, \infty, \Theta) = 0\,.$$

Derivujme funkci $V(z_1, r, \Theta)$ podle r. Dostaneme

$$\frac{\partial v}{\partial r}(z_1, r, \Theta) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(z_1, r, \Theta)\, \tilde{\psi}(z_1, r, \Theta) + \tilde{f}(z_1, r, \Theta)\, \tilde{v}(z_1, r, \Theta)\, r \tag{5}$$

pro

$$z_1 + re^{i\Theta} \in \Gamma\,,$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}(z_1, r, \Theta) = 0$$

pro

$$z_1 + re^{i\Theta} \text{ non} \in \Gamma\,.$$

Tuto funkci nyní integrujme podle r od 0 do ∞. Vzhledem k (3) a (4) bude platit

$$f(z_1) \int_0^\infty \tilde{v}(z_1, r, \Theta)\, r\, \mathrm{d}r = \int_0^\infty \tilde{f}(z_1, r, \Theta)\, r \tilde{v}(z_1, r, \Theta)\, \mathrm{d}r + \\ + \int_0^\infty \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(z_1, r, \Theta)\, \psi(z_1, r, \Theta)\, \mathrm{d}r\,. \tag{6}$$

Integrujme nyní rovnici (6) v mezích od 0 do 2π podle Θ. Dostaneme

$$f(z_1) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\Theta \int_0^\infty \tilde{v}(z_1, r, \Theta)\, r\, \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\Theta \int_0^\infty \tilde{f}(z_1, r, \Theta)\, \tilde{v}(z_1, r, \Theta)\, r\, \mathrm{d}r + \\ + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\Theta \int_0^\infty \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(z_1, r, \Theta)\, \frac{1}{r}\, \tilde{\psi}(z_1, r, \Theta)\, r\, \mathrm{d}r\,.$$

Tuto rovnici můžeme napsat ještě ve tvaru

$$f(z_1) \int\!\!\int_E v(z_2)\, \mathrm{d}\Omega_{z_2} = \int\!\!\int_E f(z_2)\, v(z_2)\, \mathrm{d}\Omega_{z_2} + \\ + \int\!\!\int_E \frac{\partial f(z_2)}{\partial v_{z_1, z_2}}\, \psi(z_1, z_2) \frac{1}{\varrho(z_1, z_2)}\, \mathrm{d}\Omega_{z_2}, \tag{6'}$$

kde $\frac{\partial f}{\partial v_{z_1, z_2}}$ značí derivaci funkce f ve směru spojnice bodů $\overrightarrow{z_1 z_2}$ v bodě z_2 a $\varrho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ značí vzdálenost bodů. Dále píšeme $\mathrm{d}\Omega_{z_2}$ abychom vyjádřili, že při integraci je proměnný pouze bod z_2 zatím co bod z_1 jest pevný. Všechny integrály v (6') jsou míněny po celé rovině E, ale ve skutečnosti jde ovšem pouze o integrály na $\Omega^{(z_1)}$.

Označme dále

$$\int\!\!\int_E v(z_2)\, \mathrm{d}\Omega_{z_2} = \int\!\!\int_S v(z_2)\, \mathrm{d}\Omega_{z_2} = \varkappa\,,$$

takže potom bude

$$f(z_1) = \frac{1}{\varkappa}\int_E\int f(z_2)\, v(z_2)\, d\Omega_{z_2} + \frac{1}{\varkappa}\int_E\int \frac{\partial f(z_2)}{\partial \nu_{z_1,z_2}}\, \psi(z_1, z_2)\, \frac{1}{\varrho(z_1, z_2)}\, d\Omega_{z_2}. \quad (7)$$

Odhadneme každý sčítanec zvláště. Jest

$$[\iint_\Omega f(z_2)\, v(z_2)\, d\Omega_{z_2}]^2 \leqq \iint_S f^2(z_2)\, d\Omega_{z_2} \iint_S v^2(z_2)\, d\Omega_{z_2} \leqq C_1 \iint f^2(z_2)\, d\Omega_{z_2}\,.$$

Abychom odhadli také druhý integrál na pravé straně (7), uvažme, že platí

$$\frac{\partial f(z_2)}{\partial \nu_{z_1,z_2}} = \frac{\partial \tilde{f}(z_1, r, \Theta)}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\Theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\Theta\,.$$

Máme tedy

$$\frac{\partial f(z_2)}{\partial \nu_{z_1,z_2}}\, \psi(z_1, z_2)\, \frac{1}{\varrho(z_1, z_2)} = \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_2 + iy_2)\cos\Theta\, \frac{\psi(z_1 z_2)}{\varrho(z_1, z_2)} +$$

$$+ \frac{\partial f(x_2 + iy_2)}{\partial y}\sin\Theta\, \frac{\psi(z_1, z_2)}{\varrho(z_1, z_2)}\,.$$

Jest však

$$\left[\int_\Omega\int \frac{\partial f}{\partial x}\cos\Theta\, \frac{1}{\varrho}\, \psi\, d\Omega_{z_2}\right]^2 = \left[\int_\Omega\int \frac{\partial f}{\partial x}\cos\Theta\, \frac{1}{\varrho^{\frac{1}{4}}}\, \psi\, \frac{1}{\varrho^{\frac{3}{4}}}\, d\Omega_{z_2}\right]^2 \leqq$$

$$\leqq C_2 \int_\Omega\int \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{\varrho^{\frac{1}{2}}}\, d\Omega_{z_2} \int_\Omega\int \frac{1}{\varrho^{\frac{3}{2}}}\, d\Omega_{z_2} \leqq C_3 \int_\Omega\int \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{\varrho^{\frac{1}{2}}}\, d\Omega_{z_2}\,;$$

podobný vztah dostaneme také pro druhý sčítanec. Platí tudíž

$$\int_0^{2\pi} [\iint_\Omega f(z_2)\, v(z_2)\, d\Omega_{z_2}]^2\, d\varphi \leqq C_4 \iint_\Omega f^2\, d\Omega\,,$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_\Omega\int \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cos\Theta\, \frac{\psi}{\varrho}\, d\Omega_{z_2}\right]^2 d\varphi \leqq C_5 \int_\Omega\int \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\Omega\,,$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_\Omega\int \frac{\partial f}{\partial y}\sin\Theta\, \frac{\psi}{\varrho}\, d\Omega_{z_2}\right]^2 d\varphi \leqq C_6 \int_\Omega\int \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 d\Omega\,,$$

při tom

$$z_1 = Re^{i\varphi}\,, \qquad R < 1\,,$$

neboť je

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\varrho^{\frac{1}{2}}(Re^{i\varphi}, z_2)}\, d\varphi$$

omezená funkce.

Z toho však již snadno plyne prvá část našeho tvrzení, užijeme-li jen Cauchyovy nerovnosti a uvážíme-li, že platí pro každá reálná čísla relace

$$\frac{a^2 + b^2}{2} > ab .$$

2. Dokážeme nyní druhou část. Položme

$$F(\lambda) = \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial f(z)}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda z) \right)^2 \mathrm{d}\Omega .$$

Snadno se ukáže, že $F(\lambda)$ je spojitá funkce reálného argumentu $0 < \lambda \leqq 1$. Mimo to $F(1) = 0$. Totéž platí pro $\frac{\partial f}{\partial y}$ a f na s. Dále platí podle první části tvrzení

$$\int_0^{2\pi} (f(\varrho e^{i\varphi}) - f(\lambda \varrho e^{i\varphi}))^2 \,\mathrm{d}\varphi \leqq D \left[\iint_S (f(z) - f(\lambda z))^2 \,\mathrm{d}\Omega + \right.$$

$$\left. + \iint_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial f(z)}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda z) \right)^2 + \left(\frac{\partial f(z)}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda z) \right)^2 \right] \mathrm{d}\Omega \right] .$$

Vzhledem k tomu, co jsme řekli o F, jest pravá strana předešlé rovnice libovolně malá, jen když λ jest dostatečně blízké 1. Položíme-li nyní $\varrho_n = 1 - \frac{1}{n}$, potom funkce $f(\varrho_n e^{i\varphi})$ tvoří cauchyovskou posloupnost v prostoru všech funkcí s integrovatelným kvadrátem na intervalu $0, 2\pi$. Poněvadž tento prostor je úplný, platí

$$f(\varrho_n e^{i\varphi}) \to f(e^{i\varphi}) .$$

Snadno se nyní také nahlédne, že $f(\varrho_n e^{i\varphi}) \to f(e^{i\varphi})$ pro každou posloupnost $\varrho_n \to 1$. Tím jest naše tvrzení úplně dokázáno.

Definice 10. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď f spojitá funkce na Ω. Budeme říkat, že f je typu E^*, jestliže existuje funkce $f(t)$ ($t \in C$) taková, že pro každé konformní zobrazení $\omega(\zeta)$ jednotkového kruhu Γ na Ω platí*

$$\lim_{\varrho \to 1-0} \int^{2\pi} (f(\omega(\varrho e^{i\varphi})) - f(\omega(e^{i\varphi})))^2 \,\mathrm{d}\varphi = 0 .^{1)}$$

Funkci $f(t)$, pro $t \in C$ budeme říkat prodloužení funkce $f(z)$, $z \in \Omega$ na hranici C.

Věta 16. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď f reálná funkce na Ω se spojitými druhými derivacemi taková, že*

---

[1]) $\omega(e^{i\varphi})$ jest spojité prodloužení funkce $\omega(\zeta)$ na hranici. Lze snadno ukázat, že $\omega(e^{i\varphi}) \in C$.

$$\iint_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right) \mathrm{d}\Omega < \infty\,.$$

Potom jsou funkce $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *a* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *typu* E^*.

Důkaz. Buď $\omega(\zeta)$ konformní zobrazení jednotkového kruhu Γ na Ω. Položme dále

$$g = \frac{\partial f}{\partial x}\,, \qquad \tilde{g}(\xi + \mathrm{i}\eta) = g(\omega(\xi + \mathrm{i}\eta))\,.$$

Poněvadž g má na Ω derivace integrovatelné s kvadrátem a poněvadž platí věta 1, má $\tilde{g}$ spojité prvé derivace, které jsou integrovatelné s kvadrátem na Γ. Podle věty 15 tedy existuje funkce $\tilde{g}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})$, která jest prodloužením funkce g na hranici. Nechť nyní jest $\omega_1(\zeta)$ konformní zobrazení jednotkového kruhu Γ na sebe. Ukážeme, že platí

$$\lim_{\substack{\varrho\to 1-\\ \varrho\to 1-}} \int_0^{2\pi} (\tilde{g}(\omega_1(\varrho_1 e^{\mathrm{i}\varphi})) - \tilde{g}(\omega_1(\varrho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})))^2 \,\mathrm{d}\varphi = 0\,. \tag{1}$$

Skutečně

$$\sqrt{\int_0^{2\pi} (\tilde{g}(\omega_1(\varrho_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})) - \tilde{g}(\omega_1(\varrho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})))^2 \,\mathrm{d}\varphi} \leqq \sqrt{\int_0^{2\pi} (\tilde{g}(\omega_1(\varrho_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})) - \tilde{g}(\lambda\omega_1(\varrho_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})))^2 \,\mathrm{d}\varphi} +$$
$$+ \sqrt{\int_0^{2\pi} (\tilde{g}(\omega_1(\varrho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})) - \tilde{g}(\lambda\omega_1(\varrho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})))^2 \,\mathrm{d}\varphi} + \sqrt{\int_0^{2\pi} (\tilde{g}(\lambda\omega_1(\varrho_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})) - \tilde{g}(\lambda\omega_1(\varrho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})))^2 \,\mathrm{d}\varphi}. \tag{2}$$

Poněvadž dále platí

$$\lim_{\lambda\to 1-} \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \xi}(\zeta) - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \xi}(\lambda\zeta)\right)^2 \mathrm{d}\Gamma = 0\,; \quad \lim_{\lambda\to 1-} \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \eta}(\zeta) - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \eta}(\lambda\zeta)\right)^2 \mathrm{d}\Gamma = 0\,,$$

nahlédne se snadno z věty 1 a 15, že prvé dvě odmocniny na pravé straně (2) možno učinit libovolně malé, když bude λ dostatečně blízké 1. Poněvadž dále jest $\tilde{g}(\lambda z)$ omezená funkce, platí

$$\lim_{\substack{\varrho_1\to 1-\\ \varrho_2\to 1-}} \int_0^{2\pi} (\tilde{g}(\lambda\omega_1(\varrho_1 e^{\mathrm{i}\varphi})) - \tilde{g}(\lambda\omega_1(\varrho_2 e^{\mathrm{i}\varphi})))^2 \,\mathrm{d}\varphi = 0\,.$$

Z toho však již plyne relace (1). Proto také platí

$$\lim_{\varrho_1\to 1-} \int_0^{2\pi} (\tilde{g}(\omega_1(e^{\mathrm{i}\varphi})) - \tilde{g}(\omega_1(\varrho_1 e^{\mathrm{i}\varphi})))^2 \,\mathrm{d}\varphi = 0\,.$$

Položíme-li nyní pro $t \in C$

$$g(t) = \tilde{g}(\omega^{-1}(t))\,,$$

kde $\omega^{-1}(t)$ jest inversní zobrazení k $\omega(\zeta)$, snadno ukážeme, že

$$\lim_{\varrho \to 1-0} \int_0^{2\pi} (g(\omega^*(\varrho e^{i\varphi})) - g(\omega^*(e^{i\varphi})))^2 \,d\varphi = 0$$

pro každé konformní zobrazení $\omega^*(\zeta)$ jednotkového kruhu Γ na Ω. Skutečně je-li $\omega^*(\zeta)$ konformní zobrazení Γ na Ω, bude

$$g(z) = \tilde{g}\,(\omega^{-1}(z)) = \tilde{g}\,(\omega^{-1}(\omega^*(\varrho e^{i\varphi}))) .$$

Jest však $\omega^{-1}(\omega^*(\varrho e^{i\varphi}))$ konformní zobrazení jednotkového kruhu na sebe. Z toho nyní již plyne tvrzení naší věty pro $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Úplně stejně lze dokázat tvrzení pro funkci $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Věta 17. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buďte na C definovány funkce h, k takové, že*

$$\int_C h^2 \,ds < \infty \; ; \qquad \int_C k^2 \,ds < \infty$$

kde s je délka oblouku.

Nechť dále existuje spojitá na Ω funkce f se dvěma spojitými derivacemi taková, že

1. $$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right] d\Omega < \infty .$$

2. *prodloužení funkce $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ resp. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ na hranici C je rovno skoro všude h resp. k (prodloužení existuje, viz větu 16). Potom existuje biharmonická funkce g taková, že*

1. $$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right] d\Omega < \infty ,$$

2. *prodloužení funkcí $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ resp. $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ je na hranici skoro všude rovno h resp. k.*

Důkaz: Viz [6], § 14, str. 111 a další.

Poznámka. Existence funkce f při dostatečně hladkých funkcích h resp. k při splnění nutné Neumannovy podmínky (podmínky momentové)[1]) se snadno dokáže tím, že se tato funkce přímo sestrojí.

---

[1]) Neumannova podmínka pro biharmonický problém jest

$$\int_C \frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}\,dy = \int h\,dx + k\,dy = 0 .$$

Věta 18. *Věta 14 platí i v tom případě, že ve 4. předpokladu se místo spojitých derivací na $\overline{\Omega}$ žádá, aby*

$$\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega < \infty .$$

Při tom na hranici C uvažuje se prodloužení obou parciálních derivací.

Důkaz: Buď ω konformní zobrazení jednotkového kruhu Γ na Ω. Buď C_k obraz kružnice $\gamma_k = E\left[\zeta, |\zeta| = 1 - \frac{1}{k}\right]$ a Ω_k vnitřek C_k. Poněvadž funkce v_n je podle předpokladu celistvá, je tedy omezená a tudíž, poněvadž jest $\Delta g \in L_2^{*\Omega}$, platí

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{\Omega_k} v_n\, \Delta g\, \mathrm{d}\Omega = \iint\limits_{\Omega} v_n\, \Delta g\, \mathrm{d}\Omega .$$

Jest však

$$\iint\limits_{\Omega_k} v_n\, \Delta g\, \mathrm{d}\Omega = \mathrm{Im} \int\limits_{C_k} \overline{F} \psi_n\, \mathrm{d}t .$$

Dále platí

$$\int\limits_{C_k} \overline{F}\psi_n\, \mathrm{d}t = \int\limits_{\gamma_k} \left(\frac{\partial g}{\partial x}\,(\omega(\zeta)) - \mathrm{i}\,\frac{\partial g}{\partial y}\,(\omega(\zeta))\right) \psi_n(\omega(\zeta))\, \omega'(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta .$$

Poněvadž ψ_n jest celistvá, jest $\psi_n(\omega(\zeta))$ na Γ omezená. Podle věty 1 jest omezená i $|\omega'|$. Poněvadž podle věty 16 jsou funkce $\frac{\partial g}{\partial x}$ a $\frac{\partial g}{\partial y}$ typu E^*, platí

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{C_k} \overline{F}\psi_n\, \mathrm{d}t = \int\limits_{C} \overline{F}\psi_n\, \mathrm{d}t .$$

Z toho plyne již snadno tvrzení naší věty.

Věta 19. *Buď C dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď ψ_n posloupnost funkcí podle věty 14. Buď $g = \mathrm{Re}\,[\bar{z}\varphi + \chi]$ biharmonická funkce splňující předpoklady věty 14 neb 18. Buď dále*

$$F = \frac{\partial g}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial g}{\partial y} = \varphi + z\overline{\varphi'} + \overline{\chi'} , \quad \text{a} \quad \varphi(z_0) = \mathrm{Im}\,\varphi'(z_0) = 0 .$$

Nechť dále jest

$$\varphi_N' = \tfrac{1}{4}\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \psi_n ; \qquad \varphi_N = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \Psi_n ; \qquad \Psi_n' = \psi_n , \qquad \Psi_n(z_0) = 0 ;$$

$$\alpha_n = \mathrm{Im} \int\limits_C \overline{F}\psi_n\, \mathrm{d}t , \qquad \chi_N'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \frac{\overline{F(t)} - \overline{\varphi_N(t)} - \bar{t}\,\varphi_N'(t)}{t - z}\, \mathrm{d}t .$$

Potom

1. $\varphi_N' \to \varphi'$ v $L_2^{**\Omega}$;
2. $\chi_N' \to \chi'$ *skoro stejnoměrně bodově na* Ω.

Důkaz: Buď $\omega(\zeta)$ konformní zobrazení jednotkového kruhu Γ na Ω. Buď C_k konformní obraz kružnice $\gamma_k = E\left[\zeta, |\zeta| = 1 - \frac{1}{k}\right]$ a nechť Ω_k jest vnitřek C_k. Potom zřejmě platí pro $z \in \Omega_k$

$$\chi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} \frac{\overline{F(t)} - \overline{\varphi(t)} - \overline{t}\,\overline{\varphi'(t)}}{t - z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} \frac{\overline{F(t)}}{t - z}\,dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} \frac{\overline{\varphi(t)}}{t - z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} \frac{\overline{\varphi(t)}\,\overline{t}\,dt}{(t - z)^2} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} \frac{\overline{\varphi(t)}\,d\overline{t}}{t - z}\,.$$

Užili jsme relace

$$\int\limits_{C_k} \frac{\overline{t}\,\overline{\varphi'(t)}}{t - z} = + \int\limits_{C_k} \frac{\overline{\varphi(t)}\,\overline{t}\,dt}{(t - z)^2} - \int\limits_{C_k} \frac{\overline{\varphi(t)}\,d\overline{t}}{t - z},$$

kterou snadno získáme z věty o integraci per partes.

Avšak

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} \frac{\overline{F(t)}\,dt}{t - z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{\overline{F(t)}\,dt}{t - z},$$

neboť $\frac{\partial g}{\partial x}$ a $\frac{\partial g}{\partial y}$ jsou typu E_a^* a $F = \frac{\partial g}{\partial x} + i\,\frac{\partial g}{\partial y}$.

Podle předpokladu a věty 13 jest $\Delta g = \operatorname{Re} \varphi' \in L_2^{*\Omega}$. Proto podle věty 11 jest φ typu E_2. Platí proto

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} \frac{\overline{\varphi(t)}\,dt}{t - z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{\overline{\varphi(t)}\,dt}{t - z}; \quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} \frac{\overline{\varphi(t)}\,\overline{t}\,dt}{(t - z)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{\overline{\varphi(t)}\,\overline{t}\,dt}{(t - z)^2};$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} \frac{\overline{\varphi(t)}\,d\overline{t}}{t - z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{\overline{\varphi(t)}\,d\overline{t}}{t - z}\,.$$

Tedy

$$\chi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{\overline{F(t)} - \overline{\varphi(t)}}{t - z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{\overline{\varphi(t)}\,\overline{t}\,dt}{(t - z)^2} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{\overline{\varphi(t)}\,d\overline{t}}{t - z}\,.$$

Z věty 14 (resp. 18) dále však plyne, že $\operatorname{Re} \varphi_N' = \operatorname{Re} \varphi'$. Proto podle věty 11 φ_N konverguje na C v průměru. Protože jest $\operatorname{Re} \varphi_N' \to \operatorname{Re} \varphi'$ v $L_2^{*\Omega}$, je podle věty 11 $\int\limits_C (\varphi_N - \varphi)^2\,ds \to 0$, tedy též $\int\limits_C |\varphi_N - \varphi|\,ds \to 0$. Odtud plyne, že $\chi_N' \to \chi'$. Tím je dokázána naše věta, neboť prvá její část je věta 18.

3. Závěr.

Věty odstavce 2 a 3 vysvětlují řadu otázek spojených s postupem, jak jej navrhl G. A. Grinberg.

Při výpočtu zvolíme nejprve uzavřenou posloupnost harmonických funkcí. Nejlépe je volíme podle věty 12. Tento uzavřený systém orthonormalisujeme na př. známou Gramm-Schmidtovou methodou. Při numerickém řešení proces orthonormalisace různým způsobem modifikujeme, aby byl co nejméně pracný výpočet. Tato část výpočtu jest totiž většinou nejpracnější. Jde v podstatě o vhodné uspořádání řešení soustavy lineárních rovnic.

Orthonormalisací získáme basi prostoru $L_2^{*\Omega}$. Tyto prvky volíme tak, aby se k nim snadno určili příslušné holomorfní funkce a jejich funkce primitivní. Volíme-li na př. ve větě 12 posloupnost funkcí z^n, splníme tím všechny uvedené požadavky. Při volbě těchto funkcí musíme dále dbáti na to, aby byl snadný numerický výpočet skalárních součinů v $L_2^{*\Omega}$. Tyto součiny totiž musíme před orthonormalisací vypočítat. Určujeme tím prvky Grammovy matice. Je-li nyní dána na hranici C biharmonická funkce a její normální derivace určíme snadno na C i obě parciální derivace $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$. Budeme tím znát na C hodnoty funkce F. Nyní můžeme podle věty 14 resp. 18 určiti již funkci φ' resp. φ pomocí nekonečné řady. Aproximativní výsledek dostaneme, když vezmeme pouze konečný počet členů řady. Abychom mohli užít věty 18 musí řešení existovat. O existenci se pak přesvědčíme pomocí věty 17. Podle věty 19 pak určíme aproximativní funkci χ' resp. χ. Věta 19 podstatně zjednodušuje Grinbergův postup. Tím bude problém aproximativně řešen.

Přesnost aproximace závisí na rychlosti konvergence řady $\Sigma \alpha_n \psi_n$. Je proto třeba voliti funce ψ_n tak, aby konvergence byla pokud možno nejrychlejší. Ve většině případů se počítá speciální případ s určitými okrajovými podmínkami. Jest vhodné, abychom odhadli nějakým způsobem charakter řešení biharmonického problému a uvážili jej při volbě uzavřeného systému harmonických funkcí.

Biharmonický problém má důležitý význam v aplikacích, zejména pak v theorii rovinné pružnosti. Při tom jest důležité znáti charakter hraničního chování funkcí φ a χ. Věta 11 jej do jisté míry určuje. V některých případech toho lze dobře využíti.

Naše úvahy se týkaly pouze oblastí jednoduše souvislých s dostatečně hladkou hranicí. Celkem bez velkých obtíží lze provést stejné úvahy pro oblasti konečné, vícenásobně souvislé, s dostatečně hladkou hranicí. V praxi jsou však nejdůležitější případy, kdy hranice má úhlové body. V jednom z příštích čísel ukáži, že postup zůstane skoro stejný i v tomto případě, i když na př. tvrzení věty 11 nebude správné. V některém z příštích čísel také ukáži konkretní numerické řešení pro případ, že oblast jest pravoúhlý trojúhelník.

Tento článek řešil některé theoretické otázky. Řada jich však zůstává otevřená. Zmíním se zde o některých, které se bezprostředně týkají otázek souvisících s tímto článkem.

1. Vzniká otázka, zda lze říci něco speciálnějšího o chování funkcí φ_n, χ_n