Werk

Label: Article

Jahr: 1953

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0078|log79

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

ČÁST II.

Několik příkladů z afinní geometrie křivek v E_2

Uvedené příklady jsou jednoduchou aplikací theorie probrané v I. části práce na křivky v dvojrozměrném afinoeukleidovském prostoru. Jde většinou o známé výsledky, které je možno odvodit jednoduchými jinými výpočty. Příklady jsou voleny jednoduché proto, aby na nich právě byla evidentní úloha afinního oblouku v geometrii.

Afinní prostor dvojrozměrný A_2 o koeficientech konexe $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \equiv 0$ se nazývá dvojrozměrným afinním eukleidovským prostorem a je zvykem označovat jej E_2.

Jako velmi jednoduché příklady pro aplikaci theorie rozvedené v I. části práce uvedeme příklady z afinní geometrie křivek v E_2.

Poznamenejme ještě, že geodetickými čarami v afinním eukleidovském prostoru E_n ($n \geqq 2$) jsou přímky. Křivka p-té třídy v E_n, $1 < p < n$, je křivkou ležící v p-dimensionální rovinné subvarietě E_p, která leží v E_n. To snadno nahlédneme z definice třídy regulární křivky v A_n, podané v I. části práce. Stačí se tedy omezit při studiu křivek v E_n na studium křivek n-té třídy v E_n.

Příklad 1. *Rodina parabol v E_2.* Definujeme funkci $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ takto:

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} \equiv 0\,. \tag{1,1}$$

V tomto případě se diferenciální rovnice (27) redukují na tvar

$$\frac{d^3\xi^\alpha}{ds^3} = 0\,, \qquad \alpha = 1, 2\,. \tag{1,2}$$

Řešení těchto rovnic jest

$$\xi^\alpha = A^\alpha s^2 + B^\alpha s + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,, \tag{1,3a}$$

kde A^α, B^α, C^α, $\alpha = 1,2$ jsou zcela libovolné konstanty. Podmínka, že hledaná křivka má být druhé třídy v E_2 vede na podmínku

$$A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0\,. \tag{1,3b}$$

Rovnice (1,3a) spolu s podmínkou (1,3b) vyjadřují, jak se snadno přesvědčíme, rodinu všech parabol v kartézské rovině.

Jestliže předepíšeme počáteční hodnoty ve smyslu existenční věty 8, pak dostaneme jedinou zcela určitou parabolu jakožto partikulární řešení rovnic (1,2).

Všimněme si ještě toho, že směr $\underset{2}{i^\alpha} \equiv \dfrac{d^2\xi^\alpha}{ds^2}$ je konstantní a v důsledku (1,3b) nenulový. Nazveme-li $\underset{2}{i^\alpha}$ *sdruženým směrem* ke směru $\underset{1}{i^\alpha} \equiv \dfrac{d\xi^\alpha}{ds}$, potom v každém bodě paraboly je vektoru $\underset{1}{i^\alpha}$ přiřazen jeden a týž směr sdružený.

Příklad 2. *Rodina elips v E_2.* Hledejme rodinu křivek druhé třídy v E_2, kde funkce $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ je takto definována

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) \equiv -1 . \tag{2,1}$$

V tomto případě se diferenciální rovnice (27) redukují na tvar

$$\frac{d^3\xi^\alpha}{ds^3} + \frac{d\xi^\alpha}{ds} = 0 , \qquad \alpha = 1, 2 . \tag{2,2}$$

Snadno zjistíme, že řešením systému rovnic (2,2) jsou křivky

$$\xi^\alpha = A^\alpha \sin s + B^\alpha \cos s + C^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2 , \tag{2,3a}$$

kde A^α, B^α, C^α ($\alpha = 1, 2$) jsou libovolné konstanty vázané pouze podmínkou

$$A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0 , \tag{2,3b}$$

což je opět podmínka pro to, aby integrální křivka rovnic (2,2) byla druhé třídy v E_2.

Rovnice (2,3a) spolu s podmínkou (2,3b) popisují, jak se snadno přesvědčíme, rodinu všech elips v kartézské rovině.

Příklad 3. *Rodina hyperbol v E_2.* Definujeme-li

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) \equiv 1 , \tag{3,1}$$

potom se rovnice (27) redukují na tvar

$$\frac{d^3\xi^\alpha}{ds^3} - \frac{d\xi^\alpha}{ds} = 0 , \qquad \alpha = 1, 2 , \tag{3,2}$$

jejichž řešením jsou křivky

$$\xi^\alpha = A^\alpha e^s + B^\alpha e^{-s} + C^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2 ,$$

které můžeme též přepsat na tvar

$$\xi^\alpha = a^\alpha \sinh s + b^\alpha \cosh s + c^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2 , \tag{3,3a}$$

kde a^α, b^α, c^α ($\alpha = 1, 2$) jsou libovolné konstanty vázané podmínkou

$$a^1b^2 - a^2b^1 \neq 0 , \tag{3,3b}$$

kterážto podmínka vyjadřuje, že křivka (3,3a) je druhé třídy v E_2. Snadno se přesvědčíme, že parametrickými rovnicemi (3,3a) spolu s podmínkou (3,3b) je podchycena třída hyperbol v kartézské rovině.

Poznámka 1. Snadno se přesvědčíme, že volba $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = -k$, $k > 0$ je konstanta, vede ke křivkám druhé třídy v E_2 s parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = A^\alpha \sin \sqrt{k}s + B^\alpha \cos \sqrt{k}s + C^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2 ,$$

kde A^α, B^α, C^α ($\alpha = 1, 2$) jsou libovolné konstanty vázané podmínkou $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$. Položíme-li $^*s = \sqrt{k}s$, potom předchozí parametrické rovnice přejdou v rovnici elips v E_2 tvaru (2,3a) a příslušná charakteristická funkce $*\underset{1}{\lambda}$ je pak, podle transformačního vztahu (30b), rovna

$$*\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = \frac{1}{(\sqrt{k})^2}\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = -1 \,.$$

Tedy číslo -1 charakterisuje skutečně všechny elipsy v E_2. Zcela obdobně si ověříme, že číslo $+1$ charakterisuje všechny hyperboly (větve hyperbol) v E_2. To, že číslo 0 charakterisuje všechny paraboly v rovině, bylo ukázáno v příkladě 1.

Příklad 4. *Definice středu elipsy a hyperboly a středu křivosti.*

Budiž parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(s), \quad \alpha = 1, 2, \quad s \in J \quad (J \text{ — otevřený interval}) \tag{4,1}$$

dána v E_2 křivka druhé třídy v J, při čemž s nechť je její afinní oblouk. Předpokládejme dále, že této křivce příslušná charakteristická funkce $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ je spojitá v J. Budiž $\underset{\circ}{s} \in J$ té vlastnosti, že

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{\circ}{s}) \neq 0 \,. \tag{4,2}$$

Z (4,2) a z předpokladu spojitosti funkce $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ v J (jak to vyžaduje existenční teorém 8) plyne, že je $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ různá od nuly v dostatečně malém okolí bodu $\underset{\circ}{s}$. Volme číslo h tak malé, aby bod $\underset{\circ}{s} + h$ byl rovněž z tohoto okolí (při čemž $\underset{\circ}{s} + h \in J$). V bodech $\underset{\circ}{s}$, $\underset{\circ}{s} + h$ křivky (4,2) sestrojme přímky ve směru vektorů $\underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s})$, $\underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s} + h)$. Parametrické rovnice těchto přímek jsou

$$\begin{aligned} x^\alpha(t) &= \xi^\alpha(\underset{\circ}{s}) + \underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s})\, t \,, \\ x^\alpha(t) &= \xi^\alpha(\underset{\circ}{s} + h) + \underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s} + h)\, t \,. \end{aligned} \tag{4,3}$$

Najděme tu hodnotu parametru t, která odpovídá průsečíku přímek (4,3). Pro tuto hodnotu t_h plynou z (4,3) tyto vztahy

$$t_h[\underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s} + h) - \underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s})] = -[\xi^\alpha(\underset{\circ}{s} + h) - \xi^\alpha(\underset{\circ}{s})] \,, \qquad \alpha = 1, 2 \,. \tag{4,4}$$

Uvažujme nyní dva podíly

$$\frac{\xi^\alpha(\underset{\circ}{s} + h) - \xi^\alpha(\underset{\circ}{s})}{\underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s} + h) - \underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s})}\,, \qquad \alpha = 1, 2 \,. \tag{4,5}$$

Ježto vektor $\underset{2}{i}^\alpha$ má v J derivaci $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\underset{2}{i}^\alpha = \overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}\underset{1}{i}^\alpha$ a ježto ve zmíněném dostatečně malém okolí bodu $\underset{\circ}{s}$ je $\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}(s) \neq 0$ a protože vektor $\underset{1}{i}^\alpha$ není v žádném bodě intervalu J vektorem nulovým, potom aspoň pro jeden podíl v (4,5) je jmenovatel různý od nuly a tedy příslušný podíl má smysl. Nechť α je onen pevný index, pro který podíl (4,5) má smysl. Potom jsou zřejmě splněny podmínky pro druhou větu o střední hodnotě, takže můžeme psát

$$\frac{\xi^\alpha(\underset{\circ}{s} + h) - \xi^\alpha(\underset{\circ}{s})}{\underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s} + h) - \underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s})} = \frac{\underset{1}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s} + \Theta h)}{\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}(\underset{\circ}{s} + \Theta h)\,\underset{1}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s} + \Theta h)}\,, \quad 0 < \Theta < 1\,.$$

Odsud a z (4,4) plyne

$$t_h = -\frac{1}{\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}(\underset{\circ}{s} + \Theta h)}\,, \quad 0 < \Theta < 1\,. \tag{4,6}$$

Dosazením z (4,6) do první z rovnic (4,3) dostaneme pro souřadnice hledaného průsečíku

$$x^\alpha(t_h) = \xi^\alpha(\underset{\circ}{s}) - \{\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}(\underset{\circ}{s} + \Theta h)\}^{-1}\,\underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s})\,, \qquad \alpha = 1, 2\,. \tag{4,7}$$

Necháme-li nyní bod $\underset{\circ}{s} + h$ konvergovat k bodu $\underset{\circ}{s}$, potom přechodem k limitě
$\to 0$) dostaneme

$$x^\alpha(\underset{\circ}{s}) = \lim_{h\to 0} x^\alpha(t_h) = \xi^\alpha(\underset{\circ}{s}) - \{\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}(\underset{\circ}{s})\}^{-1}\,\underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s})\,, \qquad \alpha = 1, 2\,.$$

Výsledek můžeme stručně vysloviti takto:

1°. *Ke každému bodu křivky* (4,1) *lze přiřadit za předpokladů shora vyslovených, bod o souřadnicích*

$$x^\alpha(s) = \xi^\alpha(s) - \{\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}\}^{-1}\,\underset{2}{i}^\alpha(s)\,, \qquad \alpha = 1, 2\,. \tag{4,8}$$

Toto přiřazení je jednoznačné a nezávislé na volbě parametru křivky.

Nezávislost bodu $x^\alpha(s)$ na volbě parametru plyne ihned z transformačních vztahů (30b), (31).

Bod $x^\alpha(s)$, definovaný v (4,8), nazýváme ***středem křivosti křivky*** příslušným k bodu s.

Z 1° a ze vztahů (30b), (31) plyne ihned:

2°. *Vektor*

$$n^\alpha(s) \equiv -\{\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}(s)\}^{-1}\,\underset{2}{i}^\alpha(s) \tag{4,9}$$

je nezávislý na transformaci parametru křivky.

Poznámka 2. Bod křivky druhé třídy v E_2, v němž je $\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}} = 0$, budeme nazývat bodem *parabolickým* na křivce. V takovém bodě není ovšem vektor n^α definován.

Vektor $\underset{2}{i}^\alpha(s)$ (s je afinní oblouk) budeme nazývat *směrem sdruženým* ke směru $\underset{1}{i}^\alpha$.

Z předcházejících definic a vztahů (4,8) odvodíme dvě tvrzení, týkající se rodin křivek z příkladů 2,3.

3°. *Všem bodům elipsy v E_2 odpovídá jediný společný střed křivosti, jímž procházejí všechny přímky*

$$x^\alpha(t) = \xi^\alpha(s) + n^\alpha(s)\, t\,, \qquad \alpha = 1, 2\,. \tag{4,10}$$

(t. j. přímky ve směru $\underset{2}{i}^\alpha(s)$ vedené bodem $\xi^\alpha(s)$). Stejné tvrzení platí pro hyperbolu.

Důkaz. Pro elipsu je podle (2,3a)

$$\xi^\alpha = A^\alpha \sin s + B^\alpha \cos s + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,, \tag{4,11}$$

při čemž $A^\alpha, B^\alpha, C^\alpha$ jsou libovolné konstanty vázané podmínkou $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$; s je afinní oblouk. Z (4,11) plyne ihned

$$\underset{2}{i}^\alpha = - A^\alpha \sin s - B^\alpha \cos s = - \xi^\alpha + C^\alpha\,. \tag{4,12}$$

Dosadíme-li z (4,11), (4,12) do (4,8) a uvážíme-li, že pro elipsu (4,11) je podle (2,1) $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} \equiv - 1$, dostaneme

$$x^\alpha(s) = C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,,$$

pro každou hodnotu s. Ježto bod $x^\alpha(s)$ leží na přímce jdoucí bodem $\xi^\alpha(s)$ mající, směr $\underset{2}{i}^\alpha(s)$, je zbývající část tvrzení 3° pro elipsu evidentní. Pro hyperbolu probíhá důkaz obdobně.

4°. *Nechť parametrickými rovnicemi*

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(s)\,, \qquad s \in (-\infty, \infty) \tag{4,13}$$

je definována v E_2 regulární křivka druhé třídy v celém svém definičním oboru. Nechť s je její afinní oblouk a $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ jí příslušná charakteristická funkce, o níž budeme předpokládat, že je v $(-\infty, \infty)$ derivace schopná. Potom nutná a postačující podmínka pro to, aby pro křivku (4,13) uvedených vlastností existoval jediný střed křivosti,[1]) jest: křivka je buď elipsa nebo hyperbola.

Důkaz: Postačitelnost podmínky věty je vyslovena tvrzením 3°. Nutnost podmínky věty si ověříme takto: uvažme nejdříve, že má-li mít křivka požadovanou vlastnost, potom v žádném bodě této křivky nemůže být $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}$ rovno nule (ježto v takovém případě by příslušný střed křivosti nebyl vůbec definován, jak

[1]) společný všem bodům křivky.

je vidět z (4,8)). Musí být tedy nutně $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} \neq 0$ v $(-\infty, \infty)$. Podle předpokladu věty je $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}$ spojitou funkcí parametru s v $(-\infty, \infty)$; má tedy $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}$ v $(-\infty, \infty)$ totéž znamení (tedy buď $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} > 0$ v $(-\infty, \infty)$ nebo $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} < 0$ v $(-\infty, \infty)$). Podmínka, že existuje jediný střed křivosti pro každé $s \in (-\infty, \infty)$, vede podle (4,8) k podmínce

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\xi^\alpha(s) - \frac{1}{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}}\underset{2}{i}^\alpha(s)\right\} \equiv 0 \qquad (s \in (-\infty, \infty))\,.$$

Provedeme-li naznačenou operaci, dospějeme (vzhledem k (27)) k podmínce

$$\underset{2}{i}^\alpha(s)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} \equiv 0\,, \qquad s \in (-\infty, \infty)\,.$$

Ježto předpokládáme, že křivka je druhé třídy v E_2, nemůže být v žádném bodě $\underset{2}{i}^\alpha$ vektorem nulovým. Poslední vztah se tedy redukuje na $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\overset{(2)}{\underset{(1)}{\lambda}} \equiv 0$, t. j. $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} =$ $=$ *konstanta* v $(-\infty, \infty)$. Z hořejších úvah je zřejmé, že tato konstanta nemůže být rovna nule. Je tedy buď větší než nula a křivka je pak hyperbola, nebo menší než nula a křivka je v tomto případě elipsou. To plyne z poznámky 1.

Poznámka 3. Do kategorie křivek s jediným středem křivosti mohli bychom zahrnout též parabolu, kdybychom připustili pojem nevlastního středu křivosti. Tento pojem však nezavádíme.

Poznámka 4. Tvrzení 4° ukazuje, že rodina elips a rodina hyperbol jsou jakési privilegované křivky v E_2. Jediný střed křivosti těchto křivek nazýváme prostě jejich středem.

Příklad 5. *Frenetovy formule pro křivku druhé třídy v E_2.*

Nechť parametrickými rovnicemi $\xi^\alpha = \xi^\alpha(s)$, $\alpha = 1, 2$, je dána křivka druhé třídy v E_2, při čemž s je její afinní oblouk, $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$ definiční interval. Předpokládejme, že na uvažované křivce neleží žádný parabolický bod. Dále předpokládejme, že křivce příslušná charakteristická funkce $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ má v intervalu $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$ spojitou derivaci. Pak je tedy v $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$ buď $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) > 0$ nebo $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) < 0$.

Označme

$$\varepsilon = \operatorname{signum} \overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)\,, \qquad s \in (\underset{1}{s}, \underset{2}{s})^{2)} \tag{5,1}$$

[2]) tedy $\varepsilon = 1$, je-li $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} > 0$, $\varepsilon = -1$, je-li $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} < 0$.

a zaveďme na dané křivce nový parametr

$$\sigma = \int_{s_0}^{s} \sqrt{|\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)|}\, \mathrm{d}s\,. \tag{5,2}$$

Označíme-li

$$t^\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} \tag{5,3}$$

a značí-li $\underset{1}{i}^\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s}$ (jako v předchozích příkladech), potom mezi vektory $\underset{1}{i}^\alpha$, t^α platí vztah

$$t^\alpha = |\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}|^{-\frac{1}{2}}\, \underset{1}{i}^\alpha\,. \tag{5,4}$$

Z (5,4) plyne pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} t^\alpha = -\tfrac{1}{2}\varepsilon|\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}|^{-2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}\right)\underset{1}{i}^\alpha + |\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}|^{-1}\,\underset{2}{i}^\alpha.$$

Zavedeme-li ještě označení (viz (4,9))

$$n^\alpha(s) = -\{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}\}^{-1}\,\underset{2}{i}^\alpha(s) = -\varepsilon|\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}|^{-1}\,\underset{2}{i}^\alpha(s)\,, \tag{5,5}$$

můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} t^\alpha = -\tfrac{1}{2}\varepsilon\, |\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}|^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}\right) t^\alpha - \varepsilon n^\alpha\,. \tag{5,6}$$

Z (5,5) plyne dále derivováním podle σ

$$\frac{d}{\mathrm{d}\sigma} n^\alpha = -t^\alpha + \varepsilon\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}{}'\, |\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}|^{-\frac{3}{2}}\, n^\alpha\,, \qquad \overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}{}' \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}\,. \tag{5,7}$$

Zavedeme-li pro stručnost označení

$$\varrho(s) = \varepsilon\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}\, |\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}|^{-\frac{3}{2}}\,, \tag{5,8}$$

můžeme (5,6), (5,7) psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} t^\alpha = -\tfrac{1}{2}\varrho t^\alpha - \varepsilon n^\alpha\,, \tag{5,9a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} n^\alpha = -t^\alpha + \varrho n^\alpha\,. \tag{5,9b}$$

Platí nyní tato věta:

5°. *Vektory t^α, n^α a skalární funkce ϱ jsou nezávislé na volbě parametru křivky shora uvažované.*

Důkaz této věty plyne bezprostředně z definičních vztahů (5,4), (5,5), (5,8) a z transformačních rovnic (30a, b), (31).

Jsme nyní oprávněni vyslovit tuto definici: *Vektory t^α, n^α nazýváme v tomto pořadí normalisovaným tečným, normalisovaným normálním vektorem křivky* *druhé třídy v jejím neparabolickém bodě. Skalár $\varrho(s)$ nazýváme křivostí křivky druhé třídy v E_2 v jejím neparabolickém bodě.* Vztahy (5,9a, b) nazveme *Frenetovými formulemi* pro křivku druhé třídy v E_2 v jejím neparabolickém bodě.

Poznámka 5. Pro elipsu mají Frenetovy formule tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} t^\alpha = n^\alpha, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} n^\alpha = -t^\alpha \qquad (\varrho = 0),$$

jak plyne ihned z (5,9a, b) a (2,1). Pro hyperbolu pak — podle (5,9a, b) a (2,1) — platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} t^\alpha = -n^\alpha, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} n^\alpha = -t^\alpha \qquad (\varrho = 0).$$

Příklad 6. *Afinní styk křivek.* Buďtež C_1, C_2 dvě křivky druhé třídy v E_2 popsané parametrickými rovnicemi

$$C_1\colon\ \xi^\alpha = \xi^\alpha(s), \qquad\qquad (6,1)$$
$$C_2\colon\ \bar{\xi}^\alpha = \bar{\xi}^\alpha(\bar{s}),$$

o nichž budeme předpokládat:

a) s je afinním obloukem křivky C_1, $\bar{s}$ je afinním obloukem křivky C_2;

b) křivky C_1, C_2 mají společný bod, odpovídající u křivky C_1 hodnotě parametru $s = 0$, pro křivku C_2 hodnotě parametru $\bar{s} = 0$;

c) funkce $\xi^\alpha(s)$, $\bar{\xi}^\alpha(\bar{s})$ jsou v dostatečně malém okolí bodu $s = \bar{s} = 0$ funkcemi analytickými;

d) charakteristické funkce $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$, $\overset{\overline{(2)}}{\underset{1}{\lambda}}(\bar{s})$, příslušné v tomto pořadí křivkám C_1, C_2, jsou ve společném bodě (odpovídajícím hodnotě $s = \bar{s} = 0$) různé od nuly.

Poznámka 6. Mají-li křivky C_1, C_2 společný bod a jsou-li vztaženy k libovolným parametrům (tedy ne nutně ke svým afinním obloukům), potom lze vždy zařídit, aby platily předpoklady a), b). To plyne z předpokladu, že křivky jsou druhé třídy v E_2 a z poznámky 5, rovnice (*) v prvé části práce.

Volme nyní $\overset{\circ}{s} = \overset{\circ}{\bar{s}}$ tak malé, abychom zůstali v takovém okolí bodu $s = \bar{s} = 0$, kde platí předpoklad c). Definujme nyní:

Definice. *Křivky C_1, C_2 mají ve společném bodě $s = \bar{s} = 0$ afinní styk nejméně q-tého řádu, jestliže platí*

$$\lim_{\overset{\circ}{s}\to 0} \frac{\xi^\alpha(\overset{\circ}{s}) - \bar{\xi}^\alpha(\overset{\circ}{s})}{\overset{\circ}{s}{}^p} = 0 \quad \text{pro} \quad p = 1, \ldots, q. \qquad (6,2)$$

Z předchozí definice plyne věta:

6°. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby křivky* (6,1) *měly ve společném bodě $s = \bar{s} = 0$ afinní styk nejméně q-tého řádu ($q = 1, 2, 3, 4$), jest:*

pro

$$
\begin{aligned}
&1)\ q = 1:\ \underset{1}{i^\alpha}(0) = \underset{1}{\bar{i}^\alpha}(0)\,;\\
&2)\ q = 2:\ \underset{1}{i^\alpha}(0) = \underset{1}{\bar{i}^\alpha}(0),\ \underset{2}{i^\alpha}(0) = \underset{2}{\bar{i}^\alpha}(0);\\
&3)\ q = 3:\ t^\alpha(0) = \bar{t}^\alpha(0),\ n^\alpha(0) = \bar{n}^\alpha(0);\\
&4)\ q = 4:\ t^\alpha(0) = \bar{t}^\alpha(0),\ n^\alpha(0) = \bar{n}^\alpha(0),\ \varrho(0) = \bar{\varrho}(0).
\end{aligned}
\tag{6,3}
$$

Důkaz: Z předpokladu c) plyne

$$\underset{\circ}{\xi^\alpha}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{s^k}}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}^k\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^k}\right)_{s=0},$$

$$\underset{\circ}{\bar{\xi}^\alpha}(s) = \underset{\circ}{\bar{\xi}^\alpha}(\bar{s}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{s^k}}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}^k\bar{\xi}^\alpha}{\mathrm{d}\bar{s}^k}\right)_{\bar{s}=0}$$

a tedy

$$\underset{\circ}{\xi^\alpha}(s) - \underset{\circ}{\bar{\xi}^\alpha}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{s^k}}{k!}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}^k\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^k}\right)_{s=0} - \left(\frac{\mathrm{d}^k\bar{\xi}^\alpha}{\mathrm{d}\bar{s}^k}\right)_{\bar{s}=0}\right\}.$$

Podmínka (6,2) implikuje

$$\left(\frac{\mathrm{d}^k\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^k}\right)_{s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}^k\bar{\xi}^\alpha}{\mathrm{d}\bar{s}^k}\right)_{\bar{s}=0} \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, q \tag{6,4}$$

a též obráceně, t. j. (6,4) $\Rightarrow$ (6,2).

Případy $(6{,}3_1)$, $(6{,}3_2)$ plynou bezprostředně z definičních rovnic (26) a podmínek (6,4).

Pro $q = 3$ platí podle (26), (6,4), $(6{,}3_1)$, $(6{,}3_2)$

$$\underset{1}{i^\alpha}(0) = \underset{1}{\bar{i}^\alpha}(0)\,, \qquad \underset{2}{i^\alpha}(0) = \underset{2}{\bar{i}^\alpha}(0)\,, \qquad \underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}(0)\,\underset{1}{i^\alpha}(0) = \underset{1}{\overset{(\bar{2})}{\lambda}}(0)\,\underset{1}{\bar{i}^\alpha}(0)\,,$$

kteréžto podmínky můžeme přepsat na ekvivalentní systém podmínek

$$\underset{1}{i^\alpha}(0) = \underset{1}{\bar{i}^\alpha}(0)\,, \qquad \underset{2}{i^\alpha}(0) = \underset{2}{\bar{i}^\alpha}(0)\,, \qquad \underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}(0) = \underset{1}{\overset{(\bar{2})}{\lambda}}(0)\,, \tag{6,5}$$

který, vzhledem k definičním vztahům (5,3), (5,5) vede k podmínkám $(6{,}3_3)$.

Pro $q = 4$ platí jednak podmínky $(6{,}3_3)$, jednak, podle (6,4), podmínka

$$\left(\frac{\mathrm{d}^4\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^4}\right)_{s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}^4\bar{\xi}^\alpha}{\mathrm{d}\bar{s}^4}\right)_{\bar{s}=0},$$

kterou, jak se snadno přesvědčíme z (27), můžeme přepsat na tvar

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}\right)_{s=0}\underset{1}{i^\alpha}(0) + \underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}(0)\,\underset{2}{i^\alpha}(0) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{s}}\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}\right)_{\bar{s}=0}\underset{1}{\bar{i}^\alpha}(0) + \underset{1}{\overset{(\bar{2})}{\lambda}}(0)\,\underset{2}{\bar{i}^\alpha}(0)\,. \tag{6,6}$$

Z předpokladu lineární nezávislosti vektorů $\underset{1}{i^\alpha}, \underset{2}{i^\alpha}$ (neboť jde o křivku druhé třídy) a z platnosti vztahů (6,5), jež jsou ekvivalentní s $(6,3_3)$, plyne pak z (6,6) — vedle podmínek (6,5) — navíc podmínka

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{s}}\overset{(2)}{\underset{1}{\bar{\lambda}}}\right)_{\bar{s}=0} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}\right)_{s=0} . \tag{6,7}$$

Podmínky (6,5) jsou pak ekvivalentní podmínkám $(6,3_3)$, podmínka (6,7) spolu s podmínkou třetí v (6,5) vede — podle (5,8) — k podmínce

$$\varrho(0) = \bar{\varrho}(0) . \tag{6,8}$$

Zřejmě je podmínka (6,8) spolu s podmínkami $(6,3_3)$ ekvivalentní podmínkám (6,5), (6,7), jak snadno nahlédneme.

Poznámka 7. Z $(6,3)_{3,4}$ je vidět, že v podmínkách afinního styku 3. a 4. řádu vystupují pouze veličiny nezávislé na volbě parametru křivky.

Příklad 7. V tomto příkladě uvedeme jednoduchou aplikaci theorie z příkladu 6.

Definice: *Kuželosečku, která má s danou křivkou styk (afinní) třetího řádu, budeme nazývat oskulační kuželosečkou křivky v uvažovaném bodě.*

Uvažujme nyní tři případy:

A) Nechť C_1 je křivka druhé třídy v E_2 s parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(s) , \qquad \alpha = 1, 2 , \tag{7,1a}$$

kde s je její afinní oblouk a která má za definiční obor nějaký interval $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$ obsahující bod $s = 0$. Nechť v bodě $s = 0$ platí

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} < 0 . \tag{7,1b}$$

Položme si za úkol stanovit elipsu, jež má v bodě $s = 0$ s danou křivkou afinní styk 3. řádu.

Pišme, podle (2,3a), parametrické rovnice příslušné elipsy ve tvaru

$$\bar{\xi}^\alpha(s) = A^\alpha \sin \bar{s} + B^\alpha \cos \bar{s} + C^\alpha .^{3)} \tag{7,2}$$

Pro elipsu (7,2) spočteme vektory $\bar{t}^\alpha$, $\bar{n}^\alpha$ v bodě $s = \bar{s} = 0$. Podle (2,3a), (2,1) a (7,2) dostaneme

$$\underset{1}{\bar{i}^\alpha}(\bar{s}) = A^\alpha \cos \bar{s} - B^\alpha \sin \bar{s} ,$$

$$\underset{2}{\bar{i}^\alpha}(\bar{s}) = - A^\alpha \sin \bar{s} - B^\alpha \cos \bar{s} , \qquad \overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} \equiv -1$$

a tedy

$$\underset{1}{\bar{i}^\alpha}(0) = A^\alpha , \qquad \underset{2}{\bar{i}^\alpha}(0) = - B^\alpha , \qquad \overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(0) = - 1 .$$

[3]) Bereme tedy pro elipsu parametr $\bar{s}$, jenž je jejím afinním obloukem.

Dosadíme-li odtud do definičních rovnic (5,4), (5,5), dostaneme

$$\bar{t}^\alpha(0) = A^\alpha\,, \qquad \bar{n}^\alpha(0) = -B^\alpha\,. \tag{7,3}$$

Tedy podmínka, aby elipsa (7,2) měla s křivkou (7,1a) v bodě $s = 0$ styk třetího řádu, vede na podmínky (podle (6,3$_3$))

$$\xi^\alpha(0) = B^\alpha + C^\alpha\,, \qquad t^\alpha(0) = A^\alpha\,, \qquad n^\alpha(0) = -B^\alpha\,.$$

Dosadíme-li odsud do (7,2), dostaneme rovnice hledané oskulační elipsy

$$\bar{\xi}^\alpha(s) = \xi^\alpha(0) + t^\alpha(0) \sin s - n^\alpha(0) (\cos s - 1)\,.$$

Je-li $\underset{0}{s}$ libovolným bodem křivky (7,1a), v němž $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{0}{s}) < 0$, dostaneme snadno pro hledanou elipsu parametrické vyjádření (píšeme-li místo $\bar{\xi}^\alpha(s)$ symbol $\xi^\alpha_e(s)$)

$$\xi^\alpha_e(s) = \xi^\alpha(\underset{0}{s}) + t^\alpha(\underset{0}{s}) \sin(s - \underset{0}{s}) + n^\alpha(\underset{0}{s})(1 - \cos(s - \underset{0}{s}))\,, \qquad \alpha = 1, 2\,. \tag{7,4}$$

Poznámka 8. A) Je-li daná křivka (7,1a) elipsou o rovnicích (7,2), potom, jak se snadno přesvědčíme, splývá oskulační elipsa v každém jejím bodě s danou elipsou (7,2), což samozřejmě očekáváme.

B) Nechť C_2 je křivka druhé třídy v E_2 s parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(s)\,, \qquad \alpha = 1, 2\,, \tag{7,5a}$$

kde s je její afinní oblouk a která má za definiční obor nějaký otevřený interval $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$, obsahující bod $s = 0$. Nechť v bodě $s = 0$ platí

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(0) > 0\,. \tag{7,5b}$$

Vytkněme si za úkol stanovit hyperbolu, která má v bodě $s = 0$ styk s křivkou (7,5a) třetího řádu. Pišme, podle (3,3a) rovnice příslušné hyperboly ve tvaru

$$\xi^\alpha_h = A^\alpha \sinh s + B^\alpha \cosh s + C^\alpha\,. \tag{7,6}$$

Pro hyperbolu (7,6) je podle (3,1)

$$\underset{1}{i}{}^\alpha_h(0) = A^\alpha\,, \qquad \underset{2}{i}{}^\alpha_h(0) = B^\alpha\,, \qquad \overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(0) = 1\,.$$

Dosadíme-li odsud do definičních rovnic (5,4), (5,5) dostaneme

$$t^\alpha_h(0) = A^\alpha\,, \qquad n^\alpha_h(0) = -B^\alpha\,. \tag{7,7}$$

Tedy podmínka, aby hyperbola (7,6) měla s danou křivkou v bodě $s = 0$ styk řádu třetího, vede — podle (6,3$_3$) — na podmínky

$$\xi^\alpha(0) = B^\alpha + C^\alpha\,, \qquad t^\alpha(0) = A^\alpha\,, \qquad n^\alpha(0) = -B^\alpha\,.$$

Odsud a z (7,6) plynou pak rovnice hledané hyperboly

$$\xi^\alpha_h(s) = \xi^\alpha(0) + t^\alpha(0) \sinh s + n^\alpha(0)(1 - \cosh s)\,.$$

Je-li $\underset{\circ}{s}$ libovolným bodem křivky (7,5a), kde $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{\circ}{s}) > 0$, dostaneme snadno pro hledanou hyperbolu z předchozího vyjádření

$$\xi_h^\alpha(s) = \xi^\alpha(\underset{\circ}{s}) + t^\alpha(\underset{\circ}{s}) \sinh(s - \underset{\circ}{s}) + n^\alpha(\underset{\circ}{s})(1 - \cosh(s - \underset{\circ}{s}))\,. \quad (7,8)$$

Hyperbola s parametrickými rovnicemi (7,8) je hledaná oskulační hyperbola křivky (7,5a) v bodě $\underset{\circ}{s}$.

Poznámka 9. Analogicky k poznámce 8 můžeme v případě, že daná křivka (7,5a) je hyperbolou, snadno se přesvědčit, že oskulační hyperbola v každém jejím bodě s ní splyne.

Poznámka 10. Předpoklad d) učiněný o křivkách C_1, C_2 na počátku příkladu 6 byl pro definici styku dvou křivek nepodstatný. Podstatné předpoklady jsou a), b), c).

Je-li na příklad C křivka druhé třídy v E_2 s parametrickými rovnicemi $\xi^\alpha = \xi^\alpha(s)$, $\alpha = 1, 2$, kde s je její afinní oblouk a která má za definiční obor nějaký interval $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$ a je-li $s = 0$ z intervalu $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$ takový, že $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(0) = 0$, potom je možno jednoznačně určit parabolu, která má s křivkou C v tomto bodě styk třetího řádu. Pro rovnice této, tak zvané oskulační paraboly, dostaneme snadno z podmínek (6,5)

$$\xi_p^\alpha(s) = \tfrac{1}{2}\underset{2}{i}^\alpha(0)\, s^2 + \underset{1}{i}^\alpha(0)\, s + \xi^\alpha(0)\,, \qquad \alpha = 1, 2\,.$$

Je-li $s = \underset{\circ}{s}$ libovolným bodem z intervalu $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$, v němž $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{\circ}{s}) = 0$, potom parametrické rovnice oskulační paraboly v $\underset{\circ}{s}$ jsou

$$\xi_p^\alpha(s) = \tfrac{1}{2}\underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s})(s - \underset{\circ}{s})^2 + \underset{1}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s})(s - \underset{\circ}{s}) + \xi^\alpha(\underset{\circ}{s})\,, \quad (7,9)$$

jak se snadno přesvědčíme.

Kdyby daná křivka byla parabolou, pak v každém jejím bodě je oskulační parabola s danou parabolou identická.

Výsledky z příkladu 6 můžeme stručně shrnout takto:

7°. *Budiž C křivka druhé třídy v E_2. Potom v každém jejím bodě je jednoznačně určena oskulační kuželosečka, a to:*

a) *elipsa, je-li $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} < 0$ v tomto bodě,*

b) *hyperbola, je-li $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} > 0$ v tomto bodě,*

c) *parabola, je-li $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = 0$ v tomto bodě.*

Tím je dána základní klasifikace bodů na regulární křivce druhé třídy v E_2. Body, v nichž $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} < 0$, nazýváme eliptickými, body, v nichž $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} > 0$ nazýváme hyperbolickými, body, v nichž $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = 0$ jsou pak parabolické body na dané křivce.

Příklad 8. V příkladě 5 byl definičním vztahem (5,8) zaveden pro neparabolické body křivky druhé třídy v E_2 invariant ϱ.

Položíme-li si nyní otázku najít v E_2 křivky druhé třídy, pro něž

$$\varrho = \text{konstanta}\,, \tag{8,1}$$

potom dojdeme k jednoduchým speciálním rovinám křivek druhé třídy v E_2.

Podrobný rozbor je poměrně snadný, avšak pracný. Ve výsledcích dojdeme k této klasifikaci:

A) Případ $\varrho \equiv 0$. Ježto předpokládáme $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} \neq 0$, vedou tyto podmínky k známému případu tříd hyperbol a elips v E_2, jak snadno vyplývá z (5,8) a příkladů 1, 2.

B) Případ $\varrho = k$ (konstanta) $\neq 0$, $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) > 0$. V tomto případě je třeba ještě rozeznávat:

a) $|k| \neq \sqrt{2}$ $(k \neq 0)$. V tomto případě dojdeme k rovině křivek druhé třídy v E_2, které se dají popsat parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha(t) = A^\alpha t^a + B^\alpha t + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,; \qquad t > 0\,, \tag{8,2a}$$

kde A^α, B^α, C^α, $\alpha = 1, 2$ jsou libovolné konstanty, $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$, při čemž

$$a \in (-\infty, -1) \text{ resp. } a \in (-1, 0), \text{ resp. } a \in (0, \tfrac{1}{2}), \text{ resp. } a \in (2, \infty)\,. \tag{8,2b}$$

b) $|k| = \sqrt{2}$. V tomto případě lze parametrické rovnice hledaných křivek uvést na jeden z těchto tvarů:

I.

$$\xi^\alpha(s) = A^\alpha s^3 + B^\alpha \log s + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,, \qquad s > 0\,, \tag{8,4a}$$

kde A^α, B^α, C^α, $\alpha = 1, 2$ jsou konstanty vázané pouze podmínkou $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$.

II.

$$\xi^\alpha(t) = {}^*A^\alpha t + {}^*B^\alpha \log_a t + {}^*C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,, \qquad t > 0\,, \tag{8,4b}$$

kde a je nějaké nezáporné číslo, $a \neq 1$ a ${}^*A^\alpha$, ${}^*B^\alpha$, ${}^*C^\alpha$ jsou libovolné konstanty ${}^*A^1\,{}^*B^2 - {}^*A^2\,{}^*B^1 \neq 0$.

III.

$$\xi^\alpha(t) = \bar{A}^\alpha e^\tau + \bar{B}^\alpha \tau + \bar{C}^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,; \qquad \tau \in (-\infty, \infty)\,, \tag{8,4c}$$

při čemž $\bar{A}^\alpha$, $\bar{B}^\alpha$, $\bar{C}^\alpha$, $\alpha = 1, 2$ jsou opět libovolné konstanty, $\bar{A}^2\bar{B}^1 - \bar{A}^1\bar{B}^2 \neq 0$.

Připomeňme ještě, že v případech (8,2a), (8,4b), (8,4c) nejsou parametry afinními oblouky.

C) **Případ** $\varrho = k$ **(konstanta)** $\neq 0$, $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) < 0$. V tomto případě je třeba rozeznávat tři možnosti:

a) $|k| > 4$. Rovnice hledané roviny křivek druhé třídy v E_2 lze psát zde ve tvaru

$$\xi^\alpha(t) = A^\alpha t^a + B^\alpha t + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,; \qquad t > 0, \tag{8,5a}$$

kde A^α, B^α, C^α, $\alpha = 1, 2$, jsou libovolné konstanty, $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$ a dále

$$a \in (1, 2) \quad \text{resp.} \quad a \in (\tfrac{1}{2}, 1)\,. \tag{8,5b}$$

b) $|k| < 4$. Parametrickým rovnicím hledaných křivek je možno dát tvar

$$\xi^\alpha(t) = A^\alpha e^{kt} \sin t + B^\alpha e^{kt} \cos t + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,; \tag{8,6a}$$
$$t \in (-\infty, \infty)\,,$$

kde A^α, B^α, C^α, $\alpha = 1, 2$ jsou libovolné konstanty, $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$, při čemž

$$k \in (0, \infty)\,. \tag{8,6b}$$

c) $|k| = 4$. Zde je možno hledané křivky popsat parametrickým vyjádřením

$$\xi^\alpha(t) = A^\alpha t + B^\alpha (\log t)\, t + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,; \qquad t > 0\,, \tag{8,7}$$

kde A^α, B^α, C^α, $\alpha = 1, 2$ jsou opět libovolné konstanty vázané podmínkou $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$. Případy A), B), C) řeší náš problém, kladený podmínkou (8,1), úplně. Poznamenejme ještě, že v případech (8,5a), (8,6) a (8,7) není parametr t afinním obloukem.

Poznámka 11. Všimněme si, že vztahy (8,2a, b) spolu se vztahy (8,5a, b) dávají křivky s parametrickým popisem

$$\xi^\alpha(t) = A^\alpha t^a + B^\alpha t + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,; \qquad t > 0\,, \tag{8,8}$$

kde a může nabývat všech možných reálných hodnot s výjimkou čísel -1, 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2. Snadno nahlédneme, že pro $a = 0$ bychom dostali přímku a nikoliv křivku druhé třídy v E_2. Pro $a = 2$ a $a = \frac{1}{2}$ by předchozí rovnice (8,8) vyjadřovaly parabolu (tedy křivku, pro níž není invariant definován). Případ $a = 1$ vede opět na přímku v E_2, konečně případ $a = -1$ vede na hyperbolu, pro níž $\varrho = 0$.

Pro volbu $A^1 = 0$, $A^2 = 1$, $B^1 = 1$, $B^2 = 0$, $C^\alpha = 0$ dostaneme speciální křivku systému (8,8) v explicitním vyjádření (položíme-li $x = t$)

$$y = x^a\,, \qquad a \in (-\infty, \infty)\,, \qquad a \neq 1, 0, \tfrac{1}{2}, 1, 2\,.$$

Odůvodněně můžeme nyní systém křivek (8,8) nazvat *třídou obecných mocninných křivek v E_2*. Ty jsou podle předchozích výsledků dvojího typu:

1. mocninné křivky s body vesměs hyperbolickými s konstantní afinní křivostí ϱ, $\varrho \neq 0$, $|\varrho| \neq \sqrt{2}$;

2. mocninné křivky s body vesměs eliptickými s konstantní afinní křivostí ϱ, $|\varrho| > 4$.

Vedle uvedené třídy obecných mocnin v E_2 existují další třídy křivek druhé třídy v E_2 s konstantní afinní křivostí. Je to třída křivek (8,4c), do níž patří též křivka

$$x = t\,, \qquad y = e^t\,.$$

Můžeme tedy třídu křivek (8,4c) nazvat *třídou exponenciálních křivek v E_2*.

Křivky s parametrickým vyjádřením (8,6a) obsahují křivku

$$x = e^{kt}\sin t\,, \qquad y = e^{kt}\cos t\,, \qquad k > 0\,,$$

což je v kartézském systému spirála.

Příklad 9. Pro křivku druhé třídy v E_2 danou v explicitním tvaru

$$y = f(x)\,,$$

dostaneme, jak se snadným výpočtem přesvědčíme

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = k^2\{\tfrac{5}{9}y''^{-\frac{8}{3}}(y''')^2 - \tfrac{1}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y^{(\mathrm{IV})}\}\,,$$

kde k je konstanta různá od nuly. Tento vztah lze též přepsat na tvar

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = \frac{k^2}{2}\,(y''^{-\frac{2}{3}})''\,.$$

Jako speciální případ plyne z předchozího a z příkladů 1, 2, 3 diferenciální rovnice pro všechny kuželosečky v rovině

$$(y''^{-\frac{2}{3}})''' = 0\,.$$