## Werk

**Label:** Article

**Jahr:** 1953

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0078|log77

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 78 (1953)

# KŘIVKA V AFINNÍM PROSTORU A JEJÍ AFINNÍ OBLOUK

FRANT. NOŽIČKA, Praha.

(Došlo 4. února 1952.) DT: 513.771

## ČÁST I.

V tomto článku jsou shrnuty nejzákladnější poznatky o křivce v obecném $n$-rozměrném prostoru afinním $A_n$ v přehledný celek a to tak, aby, za předpokladů obvyklých v diferenciální geometrii, měly postavené věty a definice „obecnou platnost“ v tom smyslu, aby zahrnovaly všechny křivky v $A_n$, které přicházejí při lokálním studiu s hlediska diferenciální geometrie v úvahu.

Jde především o základní afinní klasifikaci křivek v $A_n$, o níž pojednává věta 1 a definice 1, dále pak o definici privilegovaného parametru křivky, tak zvaného afinního oblouku. Dále jsou zavedeny určité charakteristické skalární funkce, jichž důležitost v obecné afinní geometrii vyzdvihuje existenční věta 8.

Článek je přínosem k theorii křivek v $A_n$ pouze v tom smyslu, že a) zobecňuje dosavadní skrovné poznatky a shrnuje je v jednotnou theorii, b) upozorňuje na veličiny základního významu pro křivku v $A_n$, které nejsou afinními invarianty v obvyklém smyslu.

Nechť v $n$-rozměrném afinním prostoru $A_n(n > 1)$ o souřadnicích $\xi^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ se symetrickou konexí o koeficientech $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ $(\xi^\alpha)$ je definována křivka $C$ parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(t), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots n, \tag{1}$$

při čemž předpokládáme, že

a) funkce $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ jsou reálnými funkcemi reálných proměnných $\xi^\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots$ $\ldots n$, které mají v určité oblasti $D$ spojité parciální derivace nejméně $2(p-1)$-ho řádu, kde $p$ je přirozené číslo $1 \leqq p \leqq n$;

b) funkce $\xi^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots n$, jsou reálnými funkcemi[1]) v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, jež mají v tomto intervalu spojité derivace řádu nejméně $2p$, při čemž pro všechny hodnoty $t \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ leží body $\xi^\alpha(t)$ v oblasti $D$. V žádném bodě intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ nechť nejsou všechny derivace $\frac{d\xi^\alpha}{dt}$ současně rovny nule;

[1]) Reálné proměnné $t$.

c) vektory $\underset{i}{u^\nu}$, $i = 1, 2, \dots p$, takto definované

$$\underset{1}{u^\nu} = \frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}t}, \quad \underset{i}{u^\nu} = \nabla_t \underset{i-1}{u^\nu}, \qquad i = 2, \dots p,$$

kde $\nabla_t$ je symbol absolutní derivace, jsou v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ lineárně nezávislé, vektor

$$\underset{p+1}{u^\nu} = \nabla_t \underset{p}{u^\nu} \tag{2b}$$

nechť je v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ jejich lineární kombinací.

Poznámka 1. V případě $p = n$ je vektor $\underset{p+1}{u^\nu} \equiv \underset{n+1}{u^\nu}$ vždy lineární kombinací vektorů $\underset{1}{u^\nu}, \underset{2}{u^\nu}, \dots \underset{n}{u^\nu}$.

Poznámka 2. Odůvodnění předpokladů a), b), c) bude patrné z vět, které v dalším budou odvozeny.

**Definice I.** *Za platnosti předpokladů* a), b), c) *budeme říkat, že rovnicemi* (1) *je v intervalu* $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ *parametricky definována regulární křivka* $p$*-té třídy* $(1 \leqq p \leqq n)$ *v afinním prostoru* $A_n$.

Poznámka 3. Z předpokladů a), b), c) a z definice I je zřejmé, že jde o lokální definici. Tedy též tvrzení, která budou v dalším uvedena, mají lokální charakter.

Budiž $C$ křivka $p$-té třídy, $1 \leqq p \leqq n$ (ve smyslu definice I) s definičním oborem $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Potom, podle předpokladu c), jsou vektory $\underset{i}{u^\nu}$, $i = 1, 2, \dots p$ lineárně nezávislé v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, vektor $\underset{p+1}{u^\nu} \equiv \nabla_t \underset{p}{u^\nu}$ jest v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ jejich lineární kombinací. Existují tedy v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ skaláry $\underset{p-i}{l^{(p)}}(t)$, $i = 1, 2, \dots p$ tak, že platí v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$

$$\nabla_t \underset{p}{u^\nu} \equiv \underset{p+1}{u^\nu} = \sum_{i=1}^{p} \underset{p-i}{l^{(p)}} \underset{i}{u^\nu}. \tag{3}$$

Budiž dále $\tau = \varphi(t)$ funkce definovaná v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ taková, že existuje spojitá derivace $\frac{\mathrm{d}^{p+1}}{\mathrm{d}t^{p+1}} \varphi(t)$ v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, při čemž všude v uvažovaném intervalu je $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \neq 0$. Za těchto okolností je vztahem

$$\tau = \varphi(t), \qquad t \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t}) \tag{4a}$$

definována transformace parametru křivky $C$, regulární v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Vztah (4a) lze též přepsat na tvar

$$t = \psi(\tau), \tag{4b}$$

kde $\psi$ je inversní funkcí k funkci $\varphi$ v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$.

Vztáhněme křivku (1), jež dle předpokladu je $p$-té třídy v $A_n$ $(1 \leqq p \leqq n)$, k novému parametru $\tau$, zavedenému v (4a) resp. (4b). Zaveďme dále označení

$$\underset{1}{*u^\nu} = \frac{d\xi^\nu}{d\tau}, \quad \underset{i}{*u^\nu} = \nabla_\tau \underset{i-1}{*u^\nu}, \qquad i = 1, 2, \dots p + 1. \tag{5}$$

Pak platí tyto věty:

**Pomocná věta I.** *V intervalu* $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ *jsou vektory* $\underset{i}{u^\alpha}$, $\underset{i}{*u^\alpha}$, $i = 1, 2, \dots p + 1$, *vázány vztahy*

$$\underset{j}{*u^\nu} = \sum_{i=1}^{j} A_{j,i} \underset{i}{u^\nu}, \qquad j = 1, 2, \dots p + 1, \tag{6}$$

*kde veličiny* $A_{j,i}$ *závisí pouze na tvaru funkce* $\varphi$ $(t)$, *uvažované v* (4a), *a jejích derivacích (resp. na tvaru funkce* $\psi(t)$ *v* (4b) *a jejích derivacích).*

Důkaz lze podat stručně methodou úplné indukce. Při každém $n > 1$ a každém $p$, $1 \leqq p \leqq n$ jest, jak plyne z (2), (4)a, (5), pro $j = 1$

$$\underset{1}{*u^\nu} = \frac{dt}{d\tau} \underset{1}{u^\nu}, \tag{7}$$

tedy $A_{1,1} = \frac{dt}{d\tau}$. Pro $j = 2$ dostaneme ihned z (7)

$$\underset{2}{*u^\nu} = \nabla_\tau \underset{1}{*u^\nu} = \frac{d}{d\tau} \underset{1}{*u^\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \underset{1}{*u^\alpha} \underset{1}{*u^\beta} =$$

$$= \frac{d^2t}{d\tau^2} \underset{1}{u^\nu} + \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{d}{dt} \underset{1}{u^\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \underset{1}{u^\alpha} \underset{1}{u^\beta}\right),$$

tedy

$$\underset{2}{*u^\nu} = \frac{d^2t}{d\tau^2} \underset{1}{u^\nu} + \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \underset{2}{u^\nu}. \tag{8}$$

Zde je $A_{2,1} = \frac{d^2t}{d\tau^2}$, $A_{2,2} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$. Tvrzení věty je tedy správné při každém $n > 1$, $1 \leqq p \leqq n$, pro $j = 1, 2$. Úplnou indukcí dá se snadno dokázat, že věta platí v tom rozsahu, v němž byla vyslovena[2]).

**Pomocná věta II.** *Pro veličiny* $A_{j,1}$, $A_{j,j-1}$, $A_{j,j}$ *ze vztahů* (6) *platí*

$$A_{j,1} = \frac{d^jt}{d\tau^j} \qquad \text{pro } j = 1, 2, \dots p + 1; \tag{9a}$$

$$A_{j,j-1} = \frac{j(j-1)}{2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{j-2} \frac{d^2t}{d\tau^2} \qquad \text{pro } j = 2, \dots p + 1; \tag{9b}$$

$$A_{j,j} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^j \qquad \text{pro } j = 1, 2, \dots p + 1 \tag{9c}$$

*při každém* $n > 1$ *a každém* $p$, $1 \leqq p \leqq n$.

[2]) Methoda důkazu je obdobná jako pro výpočet $j$-té derivace funkce složené. Zde jde však o absolutní derivaci vektorů.

**Důkaz** se provede opět úplnou indukcí. Z (7), (8) plyne ihned, že věta je správná při každém $n > 1$, $1 \leqq p \leqq n$ pro $j = 1, 2$. Předpokládáme-li platnost vztahů (9) pro $n \geqq 3$, $3 \leqq p \leqq n$, $3 \leqq j \leqq p + 1$ (neboť případy $n = 2$, $1 \leqq p \leqq 2$, $j = 1, 2$ jsou zřejmě v (7), (8) obsaženy), potom lze podle (6), (9) psát

$$\underset{j}{*u^\nu} = \sum_{i=1}^{j-2} A_{j,i} \underset{i}{u^\nu} + \frac{j(j-1)}{2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{j-2} \frac{d^2t}{d\tau^2} \underset{j-1}{u^\nu} + \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^j \underset{j}{u^\nu},$$

kde $A_{j,1} = \dfrac{d^jt}{d\tau^j}$. Odtud plyne pak po delším výpočtu a úpravě, přihlédneme-li k definičním vztahům (2),

$$\underset{j+1}{*u^\nu} = \frac{d^{j+1}}{d\tau^{j+1}} \underset{1}{u^\nu} + \sum_{i=2}^{j-1} A_{j+1,i} \underset{i}{\mu^\nu} + \frac{(j+1)j}{2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{j-1} \frac{d^2t}{d\tau^2} \underset{j}{u^\nu} + \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{j+1} \underset{j+1}{u^\nu},$$

při čemž vyjdeme od identity

$$\underset{j+1}{*u^\nu} \equiv \frac{d}{d\tau} \underset{j}{*u^\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \underset{j}{*u^\alpha} \underset{1}{*u^\beta}.$$

Je tedy

$$A_{j+1,1} \equiv \frac{d^{j+1}t}{d\tau^{j+1}}, \quad A_{j+1,j} \equiv \frac{j(j+1)}{2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{j-1} \left(\frac{d^2t}{d\tau^2}\right), \quad A_{j+1,j+1} \equiv \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{j+1}$$

v souhlase s (9). Tím je věta úplnou indukcí dokázána.

Na základně předchozích dvou vět dokážeme snadno tuto důležitou větu:

**Věta 1.** *Třída regulární křivky $C$ v $A_n$ je afinní invariant, t. j. třída křivky $C$ v $A_n$ nezávisí na volbě souřadnic v $A_n$ a na volbě parametru, k němuž křivku vztáhneme.*

**Důkaz:** Nejdříve dokážeme, že třída křivky je invariantní při transformaci souřadnic v $A_n$. Budiž tedy $p$, $1 \leqq p \leqq n$ třída křivky v $A_n$. Jsou tedy vektory $\underset{1}{u^\nu}, \underset{2}{u^\nu}, \dots \underset{p}{u^\nu}$ (podle předpokladu c) na str. 2) lineárně nezávislé v definičním oboru křivky $C$, t. j. matice

$$\begin{bmatrix} \underset{1}{u^1}\underset{1}{u^2} \dots \underset{1}{u^n} \\ \underset{2}{u^1}\underset{2}{u^2} \dots \underset{2}{u^n} \\ \dots\dots\dots \\ \underset{p}{u^1}\underset{p}{u^2} \dots \underset{p}{u^n} \end{bmatrix}$$

má v uvažovaném oboru hodnost $p$. Potom v nějakém bodě $t$ z definičního oboru křivky má $p$-vektor z vektorů $\underset{1}{u^\alpha}, \underset{2}{u^\alpha}, \dots \underset{p}{u^\alpha}$ aspoň jednu složku od nuly různou, t. j.

$$\underset{[1}{u^{\alpha_1}}\underset{2}{u^{\alpha_2}} \dots \underset{p]}{u^{\alpha_p}} \neq 0 \quad \text{pro } t \in (\underset{1}{t_1}, \underset{2}{t}), \tag{11}$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p \in 1, 2, \dots n$ jsou pevná vzájemně různá čísla při pevně zvoleném $t \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$.

Je-li $\xi^{\bar{\alpha}} = \xi^{\bar{\alpha}}(\xi^{\beta})$ libovolná transformace souřadnic v $A_n$, regulární v určitém okolí uvažovaného bodu $t$ a označíme-li

$$A_{\bar{\alpha}}^{\alpha} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \xi^{\bar{\alpha}}}, \quad A_{\alpha}^{\bar{\alpha}} = \frac{\partial \xi^{\bar{\alpha}}}{\partial \xi^{\alpha}},$$

potom, označíme-li pruhem nad symbolem transformované složky vektorů $\underset{i}{u}$, platí

$$\underset{i}{u}^{\alpha} = A_{\bar{\alpha}}^{\alpha} \underset{i}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}}, \quad \underset{i}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}} = A_{\alpha}^{\bar{\alpha}} \underset{i}{u}^{\alpha}, \quad i = 1, 2, \dots p. \tag{12}$$

Pro složku $\underset{[1}{u}^{\alpha_1} \underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p]}{u}^{\alpha_p}$, uvažovanou v (11), platí (podle (12)) při uvažované transformaci v souřadnic $A_n$ v uvažovaném bodě $t$

$$\underset{[1}{u}^{\alpha_1} \underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p]}{u}^{\alpha_p} = A_{\bar{\alpha}_1}^{\alpha_1} A_{\bar{\alpha}_2}^{\alpha_2} \dots A_{\bar{\alpha}_p}^{\alpha_p} \underset{[1}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}_1} \underset{2}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}_2} \dots \underset{p]}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}_p}. \tag{13}$$

Kdyby vektory $\underset{1}{\bar{u}}^{\alpha}, \underset{2}{\bar{u}}^{\alpha} \dots \underset{p}{\bar{u}}^{\alpha}$ byly v uvažovaném bodě lineárně závislé, potom všechny složky $\underset{[1}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}_1} \underset{2}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}_2} \dots \underset{p]}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}_p}$ $p$-vektoru z vektorů $\underset{1}{\bar{u}}^{\alpha}, \underset{2}{\bar{u}}^{\alpha}, \dots \underset{p}{\bar{u}}^{\alpha}$ by byly rovny nule (při uvažované transformaci souřadnic v $A_n$), což by, podle (13), mělo za následek, že by též v uvažovaném bodě bylo $\underset{[1}{u}^{\alpha_1} \underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p]}{u}^{\alpha_p} = 0$, což je ve sporu s předpokladem (11). Ježto bod $t$ byl libovolným bodem z definičního intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ křivky $C$, plyne z předchozího, že vektory $\underset{1}{\bar{u}}^{\alpha}, \underset{2}{\bar{u}}^{\alpha}, \dots \underset{p}{\bar{u}}^{\alpha}$ jsou lineárně nezávislé v každém bodě uvažovaného oboru.

Budiž nyní $\underset{[1}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}_1} \underset{2}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}_2} \dots \underset{p+1]}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}_{p+1}}$ libovolná složka $p+1$-vektoru z vektorů $\underset{1}{\bar{u}}^{\alpha}, \underset{2}{\bar{u}}^{\alpha}, \dots \underset{p+1}{\bar{u}}^{\alpha}$. Potom při každé regulární transformaci souřadnic v $A_n$ platí

$$\underset{[1}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}_1} \underset{2}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}_2} \dots \underset{p+1]}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}_{p+1}} = A_{\alpha_1}^{\bar{\alpha}_1} A_{\alpha_2}^{\bar{\alpha}_2} \dots A_{\alpha_{p+1}}^{\bar{\alpha}_{p+1}} \underset{[1}{u}^{\alpha_1} \underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p+1]}{u}^{\alpha_{p+1}}. \tag{14}$$

Ježto podle předpokladu je křivka $C$ třídy $p$, je, vzhledem k definici třídy křivky, vektor $\underset{p+1}{u}^{\nu} = \nabla_t \underset{p}{u}^{\nu}$ lineární kombinací vektorů $\underset{1}{u}^{\nu}, \underset{2}{u}^{\nu}, \dots \underset{p}{u}^{\nu}$ a tedy všechny složky $\underset{[1}{u}^{\alpha_1} \underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p+1]}{u}^{\alpha_{p+1}}$ jsou v uvažovaném oboru rovny nule. Odtud a z (14) plyne pak, že všechny složky $\underset{[1}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}_1} \underset{2}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}_2} \dots \underset{p+1]}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}_{p+1}}$ jsou rovny nule. Ježto předtím jsme ukázali, že $\underset{1}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}_1}, \underset{2}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}_2}, \dots \underset{p}{\bar{u}}^{\bar{\alpha}_p}$ jsou lineárně nezávislé, plyne z předchozího ihned, že vektor $\underset{p+1}{\bar{u}}^{\alpha}$ je lineární kombinací vektorů $\underset{1}{\bar{u}}^{\alpha}, \underset{2}{\bar{u}}^{\alpha}, \dots \underset{p}{\bar{u}}^{\alpha}$.

**Tím jsme dokázali, že třída křivky je invariantní vůči transformaci souřadnic v $A_n$. Zbývá ještě ukázat, že třída křivky nezávisí na volbě parametru, k němuž křivku vztáhneme.**

Při transformaci parametru[3]) přejdou vektory $\underset{1}{u}^{\nu}, \underset{2}{u}^{\nu}, \dots \underset{p}{u}^{\nu}, \underset{p+1}{u}^{\nu}$ ve vektory

[3]) Tedy při transformaci (4).

$\underset{1}{{}^*u^\nu}, \underset{2}{{}^*u^\nu}, \dots \underset{p}{{}^*u^\nu}, \underset{p+1}{{}^*u^\nu}$, definované v (5), při čemž platí vztahy (6). Ježto dle předpokladu je daná křivka třídy $p$, existuje aspoň jedna složka $\underset{[1}{u^{\alpha_1}}\underset{2}{u^{\alpha_2}} \dots \underset{p]}{u^{\alpha_p}}$ $p$-vektoru z vektorů $\underset{1}{u^\alpha}, \underset{2}{u^\alpha}, \dots \underset{p}{u^\alpha}$, jež je ve zvoleném bodě $t$ z definičního oboru křivky $C$ různá od nuly. Z (6) plyne pak ihned

$$\underset{[1}{{}^*u^{\alpha_1}}\underset{2}{{}^*u^{\alpha_2}} \dots \underset{p]}{{}^*u^{\alpha_p}} = A_{1,1}, A_{2,2} \dots A_{p,p}\underset{[1}{u^{\alpha_1}}\underset{2}{u^{\alpha_2}} \dots \underset{p]}{u^{\alpha_p}},$$

což můžeme vzhledem k (9c) přepsat na tvar

$$\underset{[1}{{}^*u^{\alpha_1}}\underset{2}{{}^*u^{\alpha_2}} \dots \underset{p]}{{}^*u^{\alpha_p}} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{\frac{p(p+1)}{2}} \underset{[1}{u^{\alpha_1}}\underset{2}{u^{\alpha_2}} \dots \underset{p]}{u^{\alpha_p}}. \tag{15}$$

Ježto při transformaci (4) je v uvažovaném oboru $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \neq 0$ a ježto dle předpokladu je v uvažovaném bodě složka $\underset{[1}{u^{\alpha_1}}\underset{2}{u^{\alpha_2}} \dots \underset{p]}{u^{\alpha_p}}$ různá od nuly, plyne z (15) ihned

$$\underset{[1}{u^{\alpha_1}}\underset{2}{u^{\alpha_2}} \dots \underset{p]}{u^{\alpha_p}} \neq 0 \Rightarrow \underset{[1}{{}^*u^{\alpha_1}}\underset{2}{{}^*u^{\alpha_2}} \dots \underset{p]}{{}^*u^{\alpha_p}} \neq 0. \tag{16}$$

Ježto jsme uvažovali libovolný bod z definičního oboru křivky, plyne ze (16) ihned, že vektory $\underset{1}{{}^*u^\alpha}, \underset{2}{{}^*u^\alpha}, \dots \underset{p}{{}^*u^\alpha}$ jsou v tomto oboru lineárně nezávislé.

Z předpokladu, že daná křivka $C$ je třídy $p$, plyne ihned, že všechny složky $(p + 1)$-vektoru utvořeného z vektorů $\underset{1}{u^\alpha}, \underset{2}{u^\alpha} \dots \underset{p}{u^\alpha}, \underset{p+1}{u^\alpha}$ jsou v definičním oboru křivky rovny nule. Při transformaci (4) platí vztah

$$\underset{[1}{{}^*u^{\alpha_1}}\underset{2}{{}^*u^{\alpha_2}} \dots \underset{p+1]}{{}^*u^{\alpha_{p+1}}} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{\frac{(p+2)(p+1)}{2}} \underset{[1}{u^{\alpha_1}}\underset{2}{u^{\alpha_2}} \dots \underset{p+1]}{u^{\alpha_{p+1}}};$$

odtud plyne pak ihned, že

$$\underset{[1}{u^{\alpha_1}}\underset{2}{u^{\alpha_2}} \dots \underset{p+1]}{u^{\alpha_{p+1}}} \equiv 0 \Rightarrow \underset{[1}{{}^*u^{\alpha_1}}\underset{2}{{}^*u^{\alpha_2}} \dots \underset{p+1]}{{}^*u^{\alpha_{p+1}}} \equiv 0,$$

t. j. vektory $\underset{1}{{}^*u^{\alpha_1}}, \underset{2}{{}^*u^{\alpha_2}}, \dots \underset{p+1}{{}^*u^{\alpha_{p+1}}}$ jsou v uvažovaném oboru lineárně závislé. Ježto jsme předtím ukázali, že vektory $\underset{i}{{}^*u^\alpha}$, $i = 1, 2, \dots, p$, jsou v tomto oboru lineárně nezávislé, plyne odtud ihned, že vektor $\underset{p+1}{{}^*u^\nu}$ jest v definičním oboru křivky lineární kombinací vektorů $\underset{i}{{}^*u^\alpha}$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Tím jsme dokázali, že třída křivky nezávisí na volbě parametru křivky. Tím je důkaz věty 1. hotov.

Nyní se obrátíme k důsledkům předchozích vět. Nechť $C$ značí regulární křivku $p$-té třídy v $A_n$ s definičním oborem $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ s parametrickým vyjádřením (1). Buďtež $\underset{i}{u^\nu}$, $i = 1, 2, \dots p$ vektory definované v (2a). Ježto dle předpokladu je křivka $C$ třídy $p$-té, platí pro vektor $\underset{p+1}{u^\nu}$, definovaný v (2)b, vztah (3). Vztáhneme-li křivku $C$ k novému parametru $\tau$, zavedenému v (4a) resp. (4b) a mají-li vektory $\underset{1}{*u^\nu}, \underset{2}{*u^\nu}, \dots \underset{p}{*u^\nu}, \underset{p+1}{*u^\nu}$ tentýž význam jako v (5), potom, vzhledem k větě 1, existují skaláry $\underset{p-i}{*l^{(p)}}(\tau)$, $i = 1, 2, \dots, p$ (kde $\tau = \tau(t)$) tak, že v definičním oboru $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ křivky $C$ platí

$$\underset{p+1}{*u^\nu} \equiv \nabla_\tau \underset{p}{*u^\nu} = \sum_{i=1}^{p} \underset{p-i}{*l^{(p)}} \underset{i}{*u^\nu}. \tag{17}$$

Nám půjde nyní o to najít vztah mezi skaláry $\underset{p-i}{l^{(p)}}$, $\underset{p-i}{*l^{(p)}}$, $i = 1, 2, \dots, p$, kde skaláry označené hvězdičkou, odpovídají parametru $\tau$ (viz (17)), ty druhé pak původnímu parametru $t$ (viz (3)).

**Věta 2.** *Skaláry* $\underset{p-i}{l^{(p)}}$, $\underset{p-i}{*l^{(p)}}$, $i = 1, 2, \dots, p$, *jsou při regulární transformaci* (4a) *resp.* (4b) *v* $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ *vázány vztahy*

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{p} A_{i,1} \underset{p-i}{*l^{(p)}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A_{p,1} + \underset{p-1}{l^{(p)}} A_{p,p} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \\ \sum_{i=j}^{p} A_{i,j} \underset{p-i}{*l^{(p)}} = A_{p,j-1} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A_{p,j} + A_{p,p} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \underset{p-j}{l^{(p)}},\ j = 2, \dots, p,\end{gathered} \tag{18}$$

*kde* $A_{i,j}$ *mají význam z vět pomocných I, II.*

Důkaz: Vyjdeme ze vztahu (6) pro $j = p$. Potom dostáváme, vzhledem k (7), (3),

$$\begin{aligned}\nabla_\tau \underset{p}{*u^\nu} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{p}{*u^\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \underset{p}{*u^\alpha} \underset{1}{*u^\beta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\sum_{i=1}^{p} A_{p,i} \underset{i}{u^\nu}\right) + \\ &+ \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\left(\sum_{i=1}^{p} A_{p,i} \underset{1}{u^\alpha}\right) A_{1,1} \underset{1}{u^\beta} = \\ &= \sum_{i=1}^{p} A_{p,i} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{i}{u^\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \underset{i}{u^\alpha} \underset{1}{u^\beta}\right) + \sum_{i=1}^{p} \underset{i}{u^\nu} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A_{p,i} = \\ &= \sum_{i=1}^{p} A_{p,i} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \underset{i+1}{u^\nu} + \sum_{i=1}^{p} \underset{i}{u^\nu} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A_{p,i} = \\ &= \underset{1}{u^\nu}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A_{p,1} + A_{p,p} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \underset{p-1}{l^{(p)}}\right) + \\ &+ \sum_{i=2}^{p} \underset{i}{u^\nu}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A_{p,i} + A_{p,i-1} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} + A_{p,p} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \underset{p-i}{l^{(p)}}\right).\end{aligned} \tag{19}$$

Na druhé straně dostaneme z (17), dosadíme-li tam za $\underset{i}{*u^\nu}$, $i = 1, 2, \dots, p$ ze vztahu (6),

$$\nabla_\tau \underset{p}{*u^\nu} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} A_{i,j} \underset{p-i}{*l^{(p)}} \underset{j}{u^\nu} = \sum_{j=1}^{p} \underset{j}{u^\nu} \sum_{i=j}^{p} A_{i,j} \underset{p-i}{*l^{(p)}}. \tag{20}$$

Píšeme-li v (19) místo sčítacího indexu $i$ index $j$, potom z (19), (20) plyne ihned

$$\underset{1}{u^\nu}\left(\sum_{i=1}^{p} A_{i,1}\,\underset{p-i}{{}^*l^{(p)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}A_{p,1} - A_{p,p}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\underset{p-1}{l^{(p)}}\right) +$$

$$+\sum_{j=2}^{p}\underset{j}{u^\nu}\left(\sum_{i=j}^{p} A_{i,j}\,\underset{p-i}{{}^*l^{(p)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}A_{p,j} - A_{p,j-1}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} - A_{p,p}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\underset{p-j}{l^{(p)}}\right) = 0.$$

Odtud plyne, vzhledem k tomu, že vektory $\underset{j}{u^\nu}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, jsou v uvažovaném oboru lineárně nezávislé (neboť dle předpokladu je křivka třídy $p$, $1 \leqq p \leqq n$), ihned systém vztahů (18).

Poznámka 4. Z věty 2 plyne ihned, že mezi skaláry $\underset{0}{{}^*l^{(p)}}$, $\underset{0}{l^{(p)}}$ platí transformační vztah

$$A_{p,p}\,\underset{0}{{}^*l^{(p)}} = A_{p,p-1}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}A_{p,p} + A_{p,p}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\underset{0}{l^{(p)}}.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu za $A_{p,p}$, $A_{p,p-1}$ z (9), dostaneme, přihlédneme-li k tomu, že v uvažovaném oboru je $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \neq 0$,

$$\underset{0}{{}^*l^{(p)}} = \frac{p(p-1)}{2}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} + \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2}\,p\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} + \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\underset{0}{l^{(p)}},$$

t. j.

$$\underset{0}{{}^*l^{(p)}} = \frac{p(p+1)}{2}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} + \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\underset{0}{l^{(p)}}. \tag{21}$$

Nyní si můžeme položit otázku, zda je možno najít funkci $\tau = \varphi(t)$, jež by měla v definičním oboru $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ křivky $C$ (jež je dle předpokladu třídy $p$ v $A_n$, $1 \leqq p \leqq n$) spojité derivace nejméně $(p+1)$-ho řádu, dále $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \neq 0$ v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ a pro niž by všude v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ bylo $\underset{0}{{}^*l^{(p)}} \equiv 0$. Odpověď nám dává tato věta:

**Věta 3.** *Budiž $C$ regulární křivka $p$-té třídy v $A_n$, daná parametrickými rovnicemi* (1) *s definičním oborem $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Potom existuje nekonečně mnoho funkcí $\tau = \varphi(t)$, definovaných v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, jež mají v tomto intervalu spojité derivace řádu alespoň $p+1$, při čemž $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \neq 0$ v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ a jež mají tu vlastnost, že vztáhneme-li křivku $C$ ke kterékoliv z těchto funkcí $\tau = \varphi(t)$ v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ jakožto novému parametru, potom*

$$\underset{0}{{}^*l^{(p)}} \equiv 0, \tag{22}$$

*při čemž význam symbolu $\underset{0}{{}^*l^{(p)}}$ je patrný ze* (17).

*Všechny tyto funkce mají tvar*

$$\tau = \varphi(t) = C \int e^{\frac{2}{p(p+1)} \int \underset{0}{l}^{(p)} \, \mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t + k, \; C \neq 0, \tag{23}$$

*kde $C \neq 0$, $k$ jsou libovolné konstanty.*

**Důkaz:** Nejdříve se přesvědčíme o tom, že všechny funkce tvaru (23) mají vlastnosti ve větě uvedené. Především je z (23) zřejmé, že $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \neq 0$ pro každé $t$ přicházející v úvahu. Použijeme-li formule pro derivaci funkce inversní, snadno se přesvědčíme, že funkce $\varphi(t)$, definované v (23), anulují pravou stranu ( (21), a tedy pro ně vyplývá tvrzení (22). Dokážeme o nich ještě, že mají spojité derivace řádu nejméně $p + 1$. Aby funkce $\varphi(t)$, definované v (23), měly spojité derivace alespoň $(p + 1)$-ho řádu, k tomu stačí, jak je patrno z (23), aby skalár $\underset{0}{l}^{(p)}$ měl spojité derivace alespoň $(p - 1)$-ho řádu vzhledem k $t$ v definičním oboru $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Že tomu tak skutečně je, to plyne již z předpokladu, že křivka $C$ je $p$-té třídy v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$[4]).

Abychom zjistili, že ve (23) jsou podchyceny všechny funkce s vlastnostmi ve větě uvedenými, stačí ukázat, že funkce (23) jsou obecným integrálem diferenciální rovnice

$$\frac{p(p+1)}{2} \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} + \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \underset{0}{l}^{(p)} = 0^{5)} \tag{24}$$

a jiných integrálů pro tuto rovnici v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ při $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \neq 0$ není. Rovnicí (24) můžeme psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} = \frac{2}{p(p+1)} \underset{0}{l}^{(p)}$$

kterou, vzhledem k tomu, že předpokládáme $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \neq 0$ v uvažovaném oboru, můžeme dále přepsat

---

[4]) To si ověříme takto: Je-li $t$ libovolný bod z intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, potom z předpokladu, že křivka $C$ je v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ $p$-té třídy, $(1 \leq p \leq n)$, plyne, že v uvažovaném bodě je aspoň jedna složka $p$-vektoru z vektorů $\underset{1}{u}^{\alpha}, \underset{2}{u}^{\alpha}, \dots \underset{p}{u}^{\alpha}$ různá od nuly. Budiž to složka $\underset{[1}{u}^{\alpha_1} \underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p]}{u}^{\alpha_p}$. Z (3) plyne pak

$$\underset{[1}{u}^{\alpha_1} \underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p-1}{u}^{\alpha_{p-1}} \nabla_t \underset{p]}{u}^{\alpha_p} = \nabla_t \underset{[1}{u}^{\alpha_1} \underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p]}{u}^{\alpha_p} = \underset{0}{l}^{(p)} \underset{[1}{u}^{\alpha_1} \underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p]}{u}^{\alpha_p},$$

odkud můžeme $\underset{0}{l}^{(p)}$ vyjádřit, neboť $\underset{[1}{u}^{\alpha_1} \dots \underset{p]}{u}^{\alpha_p}$ je v uvažovaném bodě různé od nuly. Především je odtud vidět, že $\underset{0}{l}^{(p)}$ je řádu $p + 1$ vzhledem k $t$. Odtud a z předpokladů a), b), c), za nichž byla postavena definice křivky $p$-té třídy, je ihned vidět, že $\underset{0}{l}^{(p)}$ má spojité derivace alespoň $(p - 1)$-ho řádu.

[5]) Viz (21).

$$\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log\left|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{2}{p(p+1)}\underset{0}{l^{(p)}}, \tag{24$^+$}$$

jejímž obecným integrálem jsou právě funkce definované v (23). Tím je důkaz věty proveden.

Poznámka 5. Z předchozí věty je zřejmé, že podmínkou $*\underset{0}{l^{(p)}} \equiv 0$ v uvažovaném oboru není příslušný parametr $\tau$ jednoznačně stanoven. Je dán až na afinní transformaci

$$\bar{\tau} = C\tau + k, \quad C \neq 0, \tag{+}$$

kde $C \neq 0$, $k$ jsou libovolné konstanty. Vhodnou volbou počátečních podmínek lze dosáhnout jednoznačnosti.

**Věta 4.** *Budiž $t \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, tedy z definičního oboru křivky $C$, jež je $p$-té třídy $(1 \leqq p \leqq n)$. Potom počátečními podmínkami*

$$s(\underset{0}{t}) = 0, \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)_{t=\underset{0}{t}} = 1, \tag{25}$$

*je v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ definována jednoznačně funkce $s = s(t)$ těchto vlastností:*

1. *$s(t)$ je rostoucí v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, $\underset{1}{t} < \underset{2}{t}$,*
2. *$s(t)$ je aditivní funkcí v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$,*
3. *$s(t)$ má v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ spojité derivace řádu nejméně $p + 1$.*
4. *Označíme-li*

$$\frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s} = \underset{1}{i^\alpha}, \ \nabla_s \underset{k}{i^\alpha} = \underset{k+1}{i^\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots p, \tag{26}$$

*potom platí*

$$\nabla_s \underset{p}{i^\alpha} = \sum_{k=1}^{p-1} \underset{p-k}{\lambda^{(p)}} \underset{k}{i^\alpha},^{6)} \tag{27}$$

*kde $\underset{p-k}{\lambda^{(p)}}$, $k = 1, \dots, p - 1$ jsou skaláry definované tak v bodech křivky $C$.*

5. *Funkci $s(t)$ lze psát ve tvaru*

$$e(t) = \int_{\underset{0}{t}}^{t} e^{\frac{2}{p(p+1)}\int_{\underset{0}{t}}^{t} \underset{0}{l^{(p)}}\,\mathrm{d}t} .\,\mathrm{d}t \tag{28}$$

Důkaz: Funkce $s(t)$, definovaná v (27), vyhovuje počátečním podmínkám (25), jak ihned nahlédneme. Dále je z (28) zřejmé, že $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{p(p+1)}\underset{0}{l^{(p)}}$, t. j. funkce $s(t)$ z (27) vyhovuje dif. rovnici (24)*[7]) a tedy ze systému funkcí

[6]) Je-li $p = 1$, pak je součet na pravé straně v (27) prázdný.

[7]) Tedy $\tau \equiv s(t)$ je řešením rovnice (24)* a tedy též (24).

tvaru (23). Podle věty 3 má tedy $s(t)$ spojité derivace řádu aspoň $p + 1$ v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Funkce $s(t)$ má tedy vlastnost 3. Vlastnosti 1., 2. jsou zřejmé z (28).

To, že funkce $s(t)$, definovaná v (28), je při počátečních podmínkách (25) jednoznačným řešením dif. rovnice (24)* resp. (24), plyne ihned z existenčního teorému Cauchyova. Ježto je $s(t)$ tvaru (23), je pak, podle věty 3, v celém definičním oboru $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ splněn vztah (22), což vzhledem k (17), vede ihned ke vztahům (27), při čemž místo dřívějších symbolů ${}^*\underset{p-k}{l}^{(p)}$ zavádíme symboly $\underset{p-k}{\lambda}^{(p)}$, neboť zde jde o speciální, privilegovaný parametr, pro který v celém uvažovaném definičním oboru křivky $C$ je splněn vztah (22). Tím je celé tvrzení věty dokázáno.

**Definice II.** *Funkci $s(t)$, definovanou v (28), nazýváme afinním obloukem regulární křivky $p$-té $(1 \leqq p \leqq n)$ v $n$-rozměrném afinním prostoru $A_n$, orientovaným od bodu $\underset{0}{t}$ k bodu $t$ $(t > \underset{0}{t})$.*

**Věta 5.** *Afinní oblouk $s(t)$ a skaláry $\underset{p-k}{\lambda}^{(p)}(s)$, $k = 1, 2, \ldots, p - 1$ se transformují při každé regulární transformaci parametru $t$ v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$*[8]

$$\bar t = \bar t(t) \tag{29}$$

*takto*

$$\bar s(\bar t) = \alpha s(t), \qquad \alpha = \left(\frac{d\bar t}{dt}\right)_{t=t_0} \tag{30a}$$

$$\underset{p-k}{\lambda}^{(\bar p)}(\bar t) = \alpha^{k-p-1}\, \underset{p-k}{\lambda}^{(p)}(t), \qquad \text{pro } 1 < p \leqq n,\ k = 1,\ 2, \ldots p - 1. \tag{30b}$$

Důkaz. Při regulární transformaci parametru $t$ v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, uvažované v (29) je $\frac{d\bar t}{dt} \neq 0$ v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Zavedeme-li označení $\underset{0}{\bar t} = \bar t(\underset{0}{t})$, potom dostaneme vzhledem k (21), (28)

$$\int_{\bar t_0}^{\bar t} \underset{0}{\bar l}^{(p)}\, d\bar t = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{p(p+1)}{2} \frac{d^2 t}{d\bar t^2} \left(\frac{dt}{d\bar t}\right)^{-1} + \frac{dt}{d\bar t}\, \underset{0}{l}^{(p)} \right\} \frac{d\bar t}{dt}\, dt =$$

$$= \frac{p(p+1)}{2} \left[ \log \left| \frac{dt}{d\bar t} \right| \right]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \underset{0}{l}^{(p)}\, dt$$

a tedy

$$\bar s(\bar t) = \int_{\bar t_0}^{\bar t} e^{\frac{2}{p(p+1)} \int_{\bar t_0}^{\bar t} \underset{0}{\bar l}^{(\bar p)}\, d\bar t}\, d\bar t = \alpha \int_{t_0}^{t} e^{\frac{2}{p(p+1)} \int_{t_0}^{t} \underset{0}{l}^{(p)}\, dt}\, dt,$$

[8]) Jde neustále o křivku $C$ $p$-té třídy v $A_n$ s definičním oborem $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, danou parametrickými rovnicemi (1).

tedy $\bar{s}(\bar{t}) = \alpha s(t)$, kde $\alpha = \left(\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_0}$, jak se snadno přesvědčíme. Tím je vztah (30a) dokázán.

Z dokázaného vztahu (30a) plyne ihned

$$\bar{\underset{1}{i}}{}^{\nu} = \frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}\bar{s}} = \frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\bar{s}} = \alpha^{-1}\underset{1}{i}{}^{\alpha}, \qquad \text{kde } \alpha = \left(\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_0}.$$

Methodou úplné indukce snadno dokážeme, že

$$\bar{\underset{k+1}{i}}{}^{\nu} \equiv \nabla_{\bar{s}}\bar{\underset{k}{i}}{}^{\nu} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\bar{s}}\nabla_s\frac{1}{\alpha^k}\underset{k}{i}{}^{\nu} = \alpha^{-k-1}\underset{k+1}{i}{}^{\nu}$$

pro $k = 1, 2, \ldots, p$. Pro $k = p > 1$ plyne pak z (31) a z věty 1, přihlédneme-li ke vztahům (27) a větě 3,

$$\bar{\underset{p+1}{i}}{}^{\nu} = \sum_{j=1}^{p-1}\bar{\underset{p-j}{\lambda}}{}^{(p)}\bar{\underset{j}{i}}{}^{\nu} = \alpha^{-p-1}\sum_{j=1}^{p-1}\underset{p-j}{\lambda}{}^{(p)}\underset{j}{i}{}^{\nu}, \tag{31}$$

t. j. podle (31)

$$\sum_{j=1}^{p-1}\bar{\underset{p-j}{\lambda}}{}^{(p)}\alpha^{-j}\underset{j}{i}{}^{\nu} = \alpha^{-p-1}\sum_{j=1}^{p-1}\underset{p-j}{\lambda}{}^{(p)}\underset{j}{i}{}^{\nu},$$

odkud plyne ihned

$$\bar{\underset{p-j}{\lambda}}{}^{(p)} = \alpha^{j-p-1}\underset{p-j}{\lambda}{}^{(p)} \qquad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, p-1,$$

což je vztah (30b).

Poznámka 6. Z věty 5 vyplývá, že jak afinní oblouk $s(t)$, tak skalární veličiny $\underset{p-k}{\lambda}{}^{(p)}$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$ (kteréžto jsou definovány jen při $p > 1$) *nejsou vnitřními veličinami křivky $C$*, jež je, dle předpokladu křivkou $p$-té třídy v uvažovaném oboru; citované veličiny nejsou afinními invarianty křivky $C$, neboť při každé regulární transformaci parametru nejsou invariantní, nýbrž podléhají jednoduchému transformačnímu zákonu (30a, b).

Jako doplněk k definici afinního oblouku uvedeme tuto větu:

**Věta 6.** *Budiž parametrickými rovnicemi* (1) *definována regulární křivka $C$ $n$-té třídy v $A_n$ s definičním oborem $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Nechť $\underset{0}{t}$ je nějaký bod z intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ Potom její afinní oblouk* (*ve smyslu definice* II) *lze uvést na tvar*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t}\left[\frac{[\underset{1}{u}{}^{\nu}\underset{2}{u}{}^{\nu}\ldots\underset{n}{u}{}^{\nu}]}{Ke^{-\int_{t_0}^{t}\Gamma^{\gamma}_{\gamma\beta}\underset{1}{u}{}^{\beta}\,\mathrm{d}t}}\right]^{\frac{2}{n(n+1)}}\mathrm{d}t,$$

*kde $[\underset{1}{u}{}^{\nu}\ldots\underset{n}{u}{}^{\nu}]$ je determinant z vektorů $\underset{i}{u}{}^{\nu}$, $i = 1, \ldots, n$, definovaných v* (2a) *a $K$ je konstanta různá od nuly, $K = [\underset{1}{u}{}^{\nu}\underset{2}{u}{}^{\nu}\ldots\underset{n}{u}{}^{\nu}]_{t=t_0}$.*

Důkaz: Podle formule pro absolutní derivaci multivektoru jest

$$\nabla_t[\underset{1}{u}{}^{\nu},\ldots\underset{n}{u}{}^{\nu}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\underset{1}{u}{}^{\nu},\ldots\underset{n}{u}{}^{\nu}] + [\underset{1}{u}{}^{\nu}\ldots\underset{n}{u}{}^{\nu}]\,\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}\underset{1}{u}{}^{\alpha}\,\mathrm{d}t. \tag{33}$$

Provedeme-li přímo operaci naznačenou na levé straně v (33), dostaneme vzhledem k (3) a vzhledem k tomu, že křivka $C$ je třídy $n$

$$\nabla_t[\underset{1}{u}^\nu \dots \underset{n}{u}^\nu] = \underset{0}{l}^{(n)} [\underset{1}{u}^\nu, \dots \underset{n}{u}^\nu]. \tag{34}$$

Z (33), (34) plyne ihned vztah

$$\underset{0}{l}^{(n)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log |[\underset{1}{u}^\nu \dots \underset{n}{u}^\nu]| + \Gamma^\beta_{\beta\alpha} \underset{1}{u}^\alpha \,\mathrm{d}t,$$

neboť, ježto je křivka $C$ třídy $n$, je v celém uvažovaném oboru $[\underset{1}{u}^\nu \dots \underset{n}{u}^\nu] \neq 0$. Integrací poslední rovnice v mezích od $\underset{0}{t}$ do $t$, kde $t, \underset{0}{t} \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ a ze vztahu (28) (položíme-li tam $p = n$) plyne pak snadno přepis (32) a tím i tvrzení věty.

V dalším budeme uvažovat afinní oblouk regulární křivky $C$ kterékoliv třídy v $A_n$ (tedy libovolné třídy $p$, $1 \leqq p \leqq n$).

**Věta 7.** *Budiž $C$ regulární křivka $p$-té třídy, $(1 \leqq p \leqq n)$, v $A_n$ $(n > 1)$ s definičním oborem $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, daná parametrickými rovnicemi $\xi^\nu = \xi^\nu(t)$, $\nu = 1, \dots n$. Nechť $a$, $b$, $c$ jsou tři pevně zvolená vzájemně různá čísla z intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Nechť $s(t)$ je afinní oblouk křivky $C$, definovaný v (28)[9]. Potom poměr*

$$d(a, b; c) = \frac{s(a) - s(c)}{s(b) - s(c)} \tag{35}$$

*je nezávislý na volbě parametru křivky $C$.*

Poznámka 7. Při pevných číslech $a$, $b$, $c$ vzájemně různých $(a, b, c \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t}))$ je tedy dělicí poměr $d(a, b; c)$ invariantní vůči každé regulární transformaci parametru $\bar{t} = \bar{t}(t)$ v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Zřejmě je $s(t)$ skalárem v $A_n$, definovaným v bodech dané křivky $C$. Je tedy $d(a, b; c)$ afinním invariantem křivky $C$.

Důkaz věty 7: Nechť $\underset{0}{t}$ je libovolným bodem z intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, jež je definičním oborem křivky $C$ (která je, dle předpokladu, $p$-té třídy v $A_n$). Potom afinní oblouk při této volbě počátečního bodu je dán předpisem (28). Vyjdeme-li od jiného počátečního bodu $*\underset{0}{t} \neq \underset{0}{t}$, $*\underset{0}{t} \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, potom mezi příslušnými afinními oblouky $s(t)$, $*s(t)$ při témže původním parametru platí zřejmě vztah

$$*s(t) - s(t) = \text{konst.}, \tag{36a}$$

kde konst. $= \displaystyle\int_{*t_0}^{t_0} e^{\frac{2}{p(p+1)}\int_{t_0}^{t} \underset{0}{l}^{(p)} \mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t.$

Jsou-li $a$, $c$ dva libovolné body z $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, potom podle (36a) a je

$$*s(a) - *s(c) = s(a) - s(c). \tag{36b}$$

---

[9]) Při libovolné volbě „počátečního bodu" $\underset{0}{t} \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$.

Přihlédneme-li nyní k větě (5) resp. k transformačnímu vztahu (30a), potom z (36b), (30a) plyne ihned tvrzení věty. Jmenovatel na pravé straně v (35) nemůže být pro žádnou dvojici $b \neq c$, $b, c \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, roven nule, ježto $s(t)$ je ryze monotonní v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$.

Poznámka 8. Z vět 3, 5, 7 plyne snadnou úvahou, že poměr $d(a, b; c)$ je nezávislý na tom, jakou funkci $\tau = \varphi(t)$ ze systému (23) vezmeme za parametr křivky $C$, tedy, kterou z těchto funkcí prohlásíme za afinní oblouk křivky $C$.

**Definice III.** *Číslo $d(a, b; c)$, definované v (35), nazýváme dělicím poměrem bodu $c$ vzhledem k základním bodům $a$, $b$ na křivce $C(a, b, c \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t}), a \neq b \neq c \neq a)$.*

Nyní se budeme zabývat skaláry $\underset{p-k}{\lambda^{(p)}}$, $k = 1, \dots p - 1$, vystupujících ve vztahu (27). Tyto skaláry nejsou afinními invarianty, jak vyplývá ze vztahu (30b). Avšak transformační zákon (30b) je tak jednoduchý, že se dá právem očekávat, že tyto skaláry jsou pro danou křivku $p$-té třídy v $A_n$ charakteristické. Jejich důležitost vysvitne z následující existenční věty.

**Věta 8.** *Budiž $A_n$ $n$-rozměrný afinní prostor v souřadnicích $\xi^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \dots n)$, opatřený symetrickou konexí o koeficientech $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}(\xi^\alpha)$. Budiž $\xi^\alpha_0$ bod tohoto prostoru takový, že v něm a v jeho určitém $n$-rozměrném okolí mají funkce $\Gamma^\nu_{\lambda\beta}$ spojité parciální derivace podle proměnných $\xi^\alpha$ nejméně $p$-tého řádu, kde $1 < p \leq n$. Budiž dále dáno $p - 1$ funkcí jedné proměnné $s$, $\varphi_i(s)$ $i = 1, \dots, p - 1$, spojitých v bodě $\underset{0}{s}$ a v určitém jeho okolí. Budiž dále dáno $p$ čísel $(\underset{k}{i^\alpha})_0$, $k = 1, \dots, p$; $\alpha = 1, \dots, n$, takových, že matice*

$$\begin{bmatrix} (\underset{1}{i^1})_0 (\underset{1}{i^2})_0 \dots (\underset{1}{i^n})_0 \\ (\underset{2}{i^1})_0 (\underset{2}{i^2})_0 \dots (\underset{2}{i^n})_0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ (\underset{p}{i^1})_0 (\underset{p}{i^2})_0 \dots (\underset{p}{i^n})_0 \end{bmatrix}$$

*má hodnost $p$.*

*Potom v dostatečně malém okolí bodu $\xi^\alpha_0$ existuje křivka $p$-té třídy v $A_n$ s parametrickými rovnicemi*

$$\xi^\nu = \xi^\nu(s), \quad \nu = 1, \dots n \tag{37}$$

*těchto vlastností:*

a) *pro $s = \underset{0}{s}$ je $\xi^\nu(\underset{0}{s}) = \xi^\nu_0$;*

b) *označíme-li*

$$\underset{1}{i^\alpha} = \frac{d\xi^\alpha}{ds}, \quad \underset{k}{i^\alpha} = \nabla_s \underset{k-1}{i^\alpha}, \quad k = 2, \dots, p,$$

*potom*

$$\underset{k}{i^\alpha}(\underset{0}{s}) = (\underset{k}{i^\alpha})_0, \quad k = 1, \dots, p;$$

c) *parametr $s$ je afinním obloukem této křivky;*

d) *pro křivku* (37) *skalární funkce* $\underset{p-k}{\lambda^{(p)}}(s)$, $k = 1, \ldots, p-1$, (*z věty* 4, *vztahů* (27)) *jsou rovny daným funkcím* $\varphi_k(s)$, *t. j.*

$$\underset{p-k}{\lambda^{(p)}}(s) \equiv \varphi_k(s), \quad k = 1, \ldots, p-1;$$

e) *ve zmíněném dostatečně malém okolí bodu* $\xi_0^\alpha$ (*a v něm samém*) *existuje křivka* (37) *s vlastnostmi* a), b), c), d) *jednoznačně.*

Poznámka 9. Věta předchozí říká, že skalární funkce $\underset{p-k}{\lambda^{(p)}}$ ze vztahů (27) tvoří tak zvaný úplný systém pro existenci křivky $p$-té třídy v $A_n$ (lokální existenci), t. j., jsou-li dány předem funkce $\underset{p-k}{\lambda^{(p)}}(s)$, $k = 1, \ldots, p = 1; 1 < p \leqq n$, a je-li dáno nějaké číslo $\underset{0}{s}$ z definičního oboru těchto funkcí, dále pak počáteční bod $\xi_0^\alpha$ v $A_n$ a v něm $p$ lineárně nezávislých vektorů, potom, za předpokladů ve větě vyslovených, je těmito podmínkami v dostatečně malém okolí bodu $\xi_0^\alpha$ jednoznačně definována křivka $p$-té třídy v $A_n$.

Důkaz věty 8: Při daném přirozeném $p$, $1 < p \leqq n$, uvažujme systém diferenciálních rovnic

$$\underset{p+1}{i^\alpha} \equiv \nabla_s \underset{p}{i^\alpha} = \sum_{k=1}^{p-1} \varphi_k(s) \underset{k}{i^\alpha} \text{ [10]}, \tag{38}$$

kde

$$\underset{1}{i^\alpha} \equiv \frac{d\xi^\alpha}{ds}, \underset{k}{i^\alpha} \equiv \nabla_s \underset{k-1}{i^\alpha} \quad \text{pro } k = 2, \ldots, p+1. \tag{39a}$$

Zaveďme označení

$$\frac{d\xi^\alpha}{ds} = \underset{1}{v^\alpha}, \quad \frac{d}{ds} \underset{k-1}{v^\alpha} = \underset{k}{v^\alpha}, \quad k = 2, \ldots, p+1. \tag{39b}$$

Vektory $\underset{k}{i^\alpha}$ v (39a) můžeme přepsat pomocí veličin $\underset{k}{v^\alpha}$ a koeficientů dané konexe v $A_n$, resp. jejich parciálních derivací podle $\xi^\alpha$. Tak dostaneme

$$\underset{1}{i^\alpha} = \underset{1}{v^\alpha}, \tag{40a}$$

$$\underset{2}{i^\alpha} = \underset{2}{v^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \underset{1}{v^\beta} \underset{1}{v^\gamma}, \tag{40b}$$

$$\underset{3}{i^\alpha} = \underset{3}{v^\alpha} + 3\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \underset{2}{v^\beta} \underset{1}{v^\gamma} + (\partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \Gamma^\beta_{\mu\nu}) \underset{1}{v^\mu} \underset{1}{v^\nu} \underset{1}{v^\gamma}. \tag{40c}$$

Snadno bychom nyní methodou úplné indukce dokázali toto tvrzení.

**Tvrzení I.** *Vektor* $\underset{k}{i^\alpha}$ *lze přepsat na tvar*

$$\underset{k}{i^\alpha} = \underset{k}{v^\alpha} + \underset{k}{P^\alpha}(\underset{1}{v^\nu}, \underset{2}{v^\nu}, \ldots \underset{k-1}{v^\nu}) \quad \text{pro } k = 2, \ldots, p+1, \tag{40}$$

[10]) Viz (27).

*kde $\underset{k}{P^\alpha}$ je celistvou racionální funkcí v proměnných $\underset{1}{v^\alpha}, \underset{2}{v^\alpha}, \dots, \underset{k-1}{v^\alpha}$, v jejichž koeficientech vystupují v součtech a součinech pouze konstanty, koeficienty konexe a jejich parciální derivace nejvýše ($k$ — 2)-ho řádu*[11].

Všimněme si, že ze vztahů (40a, b, c) a z tvrzení I plyne ihned tento poznatek: Jsou-li dány veličiny $\underset{k}{v^\alpha}$, $k = 1, \dots, p$ a bod $\xi^\alpha$ pevně[12]), pak jsou též vektory $\underset{k}{i^\alpha}$, $k = 1, \dots, p$ pevně jednoznačně stanoveny. Snadno nahlédneme (rovněž z (40a, b, c) a z tvrzení I), že, jsou-li dány pevně vektory $\underset{k}{i^\alpha}$ a bod $\xi^\alpha$, jsou pak jednoznačně a pevně stanoveny vektory $\underset{k}{v^\alpha}$.

Učiňme nyní tento krok: pevně daným číslům $\xi^\alpha_0$ a $(\underset{k}{i^\alpha})_0$, $k = 1, \dots, p$, (v předpokladu věty), přiřaďme čísla $(\underset{k}{v^\alpha})_0$ ve smyslu předchozích úvah. Jsou tedy počátečními podmínkami $\xi^\alpha_0$, $(\underset{k}{i^\alpha})_0$, $k = 1, \dots, p$, ve smyslu hořeního přiřazení jednoznačně stanovena čísla $(\underset{k}{v^\alpha})$, $k = 1, \dots, p$.

Vyslovme nyní další, pro důkaz věty důležité tvrzení:

**Tvrzení II.** *V dostatečně malé uzavřené oblasti $n(p + 1)$ rozměrné, obsahující uvnitř bod $[\underset{0}{\xi^1}, \dots \underset{0}{\xi^n}, \underset{1}{(v^1)_0}, \dots \underset{1}{(v^n)_0}, \underset{2}{(v^1)_0}, \dots \underset{p}{(v^n)_0}]$, mají funkce $\underset{k}{i^\alpha}(\xi^\nu, \underset{1}{v^\nu}, \dots \underset{k}{v^\nu})$ spojité parciální derivace podle svých argumentů ($k = 1, 2, \dots p$).*

D ů k a z tohoto tvrzení plyne ihned z tvrzení I a z předpokladu věty.

Vraťme se nyní k systému rovnic (38). Tento systém lze, vzhledem k (39b), (40) přepsat na tvar

$$\underset{p+1}{v^\alpha} = - \underset{p+1}{P^\alpha}(\underset{1}{v^\nu}, \dots \underset{p}{v^\nu}) + \sum_{k=1}^{p-1} \varphi_k(s)(\underset{k}{v^\alpha} + \underset{k}{P^\alpha}(\underset{1}{v^\nu}, \dots \underset{k-1}{v^\nu})). \tag{41}$$

Uvažujme nyní systém $n(p + 1)$ rovnic pro $n(p + 1)$ neznámých funkcí $\xi^\alpha, \underset{1}{v^\alpha}, \dots \underset{p}{v^\alpha}$ s nezávisle proměnnou $s$

$$\frac{d\xi^\alpha}{ds} = \underset{1}{v^\alpha}, \quad \frac{d}{ds} \underset{k-1}{v^\alpha} = \underset{k}{v^\alpha}, \qquad k = 2, \dots p, \tag{42a}$$

$$\frac{d}{ds} \underset{p}{v^\alpha} = f^\alpha(s, \xi^\nu, \underset{1}{v^\nu}, \underset{2}{v^\nu}, \dots \underset{p}{v^\nu}), \tag{42b}$$

kde

$$f^\alpha \equiv - \underset{p+1}{P^\alpha}(\underset{1}{v^\nu}, \dots \underset{p}{v^\nu}) + \sum_{k=1}^{p-1} \varphi_k(s)(\underset{k}{v^\alpha} + \underset{k}{P^\alpha}(\underset{1}{v^\nu}, \dots \underset{k-1}{v^\nu}))^{13}). \tag{43}$$

**Tvrzení III.** *Omezíme-li se na dostatečně malou uzavřenou oblast $n(p + 1) + 1$ rozměrnou, obsahující uvnitř bod*

$$[\underset{0}{s}, \underset{0}{\xi^1}, \dots \xi^n_0, \underset{1}{(v^1)_0}, \dots \underset{1}{(v^n)_0}, \dots \underset{p}{(v^n)_0}],$$

[11]) Snadný důkaz tohoto tvrzení methodou úplné indukce zde nepodávám.

[12]) $\xi^\alpha$ z oboru, v němž podle předpokladu věty mají funkce $\Gamma^{\alpha\beta}_\gamma$ spojité parciální derivace aspoň $p$-tého řádu.

*potom funkce* $f^\alpha$, *definované v* (43), *jsou v této uzavřené oblasti spojitými funkcemi svých argumentů* $s, \xi^\alpha, \underset{1}{v}^\alpha, \dots \underset{p}{v}^\alpha$ *a mají v této uzavřené oblasti spojité parciální derivace podle* $n(p+1)$ *proměnných* $\xi^\alpha, \underset{1}{v}^\alpha, \dots \underset{p}{v}^\alpha$.

Důkaz tohoto tvrzení plyne bezprostředně z tvrzení II a z předpokladu věty, že totiž funkce $\varphi_k(s)$ jsou spojité v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{s}$.

Tvrzení III nám však říká, že funkce $f^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, n$ vyhovují v dostatečně malé uzavřené oblasti, obsahující uvnitř bod $[s_0, \underset{0}{\xi}^1, \dots \underset{0}{\xi}, (\underset{1}{v}^1)_0, \dots (\underset{1}{v}^n)_0, (\underset{2}{v}^1)_0, \dots (\underset{p}{v}^n)_0]$, Lipschitzově podmínce vzhledem k $\xi^\alpha_1, \underset{1}{v}^\alpha, \dots \underset{p}{v}^\alpha$[14]). Platí tedy pro soustavu diferenciálních rovnic (42a, b) existenční teorém Cauchyův (lokálně). Tedy platí tento existenční teorém též pro soustavu ekvivalentní soustavě (42a, b), t. j. pro soustavu (38).

Podle tohoto existenčního teorému existuje tedy (lokálně) křivka $C$ s parametrickými rovnicemi (37), jež prochází předem daným bodem $\xi^\alpha_0 = \xi^\alpha(\underset{0}{s})$ a pro kterou platí v bodě $\underset{0}{s}$

$$(\underset{k}{v}^\alpha)_0 = \underset{k}{v}^\alpha(\underset{0}{s}), \qquad k = 1, \dots, p. \tag{44}$$

Vztahy (44) implikují (podle toho, jak jsme čísla $(\underset{k}{v}^\alpha)_0$ a veličiny $\underset{k}{v}^\alpha$ dříve definovali) následující relace

$$(\underset{k}{i}^\alpha)_0 = \underset{k}{i}^\alpha(\underset{0}{s}), \qquad k = 1, 2, \dots, p. \tag{45}$$

Tím je dokázáno tvrzení a), b) naší věty. Z rovnic (38) je zřejmé, že tato integrální křivka je v uvažovaném dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{s}$ nejvýše $p$-té třídy v $A_n$. Ježto vektory $\underset{1}{i}^\alpha, \dots \underset{p}{i}^\alpha$ jsou pak v tomto dostatečně malém okolí spojitými funkcemi proměnné $s$ (jsou totiž, jak plyne z (38), diferencovatelné podle $s$), je hodnost matice z vektorů $\underset{1}{i}^\alpha, \dots \underset{p}{i}^\alpha$ rovna $p$ též v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{s}$.

Tvrzení c) věty, totiž, že $s$ je afinním obloukem této křivky, plyne ihned z rovnic (38), věty 4 a z poznámky 5 na str. 14. Tvrzení d), jež je jádrem věty, plyne ihned z rovnic (38), z věty 4, vztahů (37). Tvrzení e) je pak z předchozího evidentní. Tím je věta 8 dokázána.

Poznámka 10. Předchozí existenční věta neobsahuje případ křivky prvé třídy v $A_n$. V tomto případě jde o řešení systému diferenciálních rovnic

$$\nabla_s \underset{1}{i}^\nu = 0,$$

[13]) Viz pravou stranu v (41).

[14]) Viz na př. *V. V. Stepanov*: Kurs diferenciálních rovnic (český překlad od *E. Čecha*), Praha 1950, str. 157 shora.