ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

4

78

NAKLADATELSTVÍ ČSAV

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 78 • Č. 4 • STR. 297—376 • PRAHA 18. XII. 1953

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky")

SVAZEK 78 (1953)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Obsah:

Články:

Recense článků a knih:

Referáty:

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV

SVAZEK 78 * PRAHA, 18. XII. 1953 * ČÍSLO 4

ČLÁNKY

KE ~~140~~ 410. VÝROČÍ SMRTI MIKULÁŠE KOPERNÍKA

OTAKAR ZICH, Praha.

(Došlo dne 10. června 1953.)

Dějiny těch odvětví vědy, v nichž se formuloval názor lidstva na postavení Země ve vesmíru, tvoří určitě jednu z nejdramatičtějších kapitol v dějinách myšlenkového vývoje lidstva vůbec.

Pochopení Země ve světovém universu souvisí v každé době tak těsně s povahou společenských ideí, že můžeme přímo ukázat, jaké prvky to byly, jež své doby působily povzbudivě na rozvoj vědeckého pojetí této otázky, či zase jaké prvky to byly, jež působily brzdivě, neblaze. Při tom ovšem působení idejí, o nichž mluvíme, je zákonitě spjato s etapou řádu společenského, v němž se ony ideje formují, takže jedině hodnocení celku může tu dát jasný obraz o povaze dramatických fází celého naznačeného procesu.

Jaké byly převažující, avšak již stárnoucí názory a vlivy ideologické, když mladý KOPERNÍK počíná v osmnácti letech studovat na slavné Jagellonské akademii v Krakově? Všechno myšlení bylo ve vleku idejí, jejichž základ byl vysloven biblí a Novým zákonem. Tak tomu bylo alespoň na převážné části evropského kontinentu. Z tohoto základu, doplněného církevními otci, vzniká systém, tuhá soustava, odkud bylo dovoleno cestou formální logiky vyvozovat důsledky. Proto nemohly být ovšem ve sporu se základy učení samého, se základy, jimiž otřást nebylo dovoleno. Bůh teprve později stvořil Slunce a hvězdy: proto Země, na níž nakonec stvořil člověka k obrazu svému, musila mít zvláštní, zcela ojedinělé místo ve vesmíru, vždyť i hlubiny pekelné byly kdesi dole pod zemí.

Nastupující třída, třída obyvatelů měst, zahájila však již před dobou Koperníkova mládí mohutný útok, který otřásá ztuhlou kostrou feudální: města se zmocňují posic hospodářských, města vysílají plavce, obchodníky, cestovatele, kteří přinášejí obdivující zprávy o cizích městech, vzdálených obyvatelích, zvířatech a rostlinách. Formuje se docela nový vztah k přírodě, k životu a tento vztah, který pomáhá dobýt měšťanům všechny závažné posice, odráží se také v novém názoru na celý svět. Útok měšťanstva proti feudálním vládcům, proti církevnímu a světskému feudálnímu pánovi, byl nutně veden i na poli vědeckém. Scholastika se svým deformovaným ARISTOTELEM je podrobována zničující kritice.

Odkud mohla však nová věda čerpat posilu k novým vědeckým výkonům? Je jisto, že určujícím momentem byly potřeby výrobní praxe, ale i tu bylo třeba se opřít o vzory, které již mnoho mohly poskytnout, a to často v dokonalém řešení. Studuje se antika celá, nejen deformovaný Aristoteles, studují se velikáni řecké kultury, vědy a filosofie a toto studium ukazuje novému, renesančnímu člověku, že lidé nebyli vždy vedeni v zájmu jedné třídy k askesi, k odvrácení od věčné knihy přírody.

Řecká antická přírodověda se rozvíjela pod mohutnými impulsy počátků otrokářského řádu. Pomáhá jeho zřízení, jeho upevnění, pomáhá pokroku výroby, plavby i obchodu: proto i filosofie prvních přírodovědců od slavné školy milétské přes pozdější atomisty, jimiž vrcholí, nemůže být jiná než spontánně materialistická. O materiální jednotě světa není nejmenší pochyby, ať je vyjadřována již obrazy jakýmikoli.

Ovšem tehdy, když se již posice otrokářů upevňuje, když není již třeba nových objevů, jako byla kotva, šrouby, kovářské měchy a jiné, tehdy, kdy sám veliký Aristoteles nevidí už potřebu vynálezů nových, neboť „vše potřebné k zjemnění života již bylo vynalezeno", kdy otroci opatřují svým pánům luxusní život, tehdy se též zákonitě upevňuje idealistická nadstavba řeckého otrokářského státu. A její velmi podstatnou složkou jsou názory, vtělené v systém státního náboženství. Pozdější filosofie řeckých otrokářů zcela přirozeně není nakloněna zkoumání změny, hmoty vůbec; na místo toho již ve škole eleatské požaduje nehybnost, klid. Neboť není radno měnit poměry, jež jsou. A filosof, jenž slouží upevněné posici otrokářů, dovede obdivuhodně hypnotisovat myšlenkou trvalosti a neměnnosti všeho.

Podle takových zásad je pak třeba řešit i problémy kosmologické, a je to zejména PLATON, který obrací mnoho úsilí své idealistické dialektiky, aby ztotožnil planety s bohy, věčnými a nezměnitelnými. Ve škole Platonově se pak najde znamenitý matematik EUDOXOS, jenž dovede udat řešení planetárních pohybů tak, aby věční bohové se pohybovali po dokonalých křivkách, kružnicích, a to rovnoměrně, neboť bohu jiný pohyb nemůže příslušet. Řešení Eudoxovo bylo základem celého pozdějšího astronomického systému. Jeho základní myšlenka byla pak taková: planeta se pohybuje po kružnici rovnoměrně, avšak střed této kružnice se pohybuje sám po kružnici jiné, zpravidla větší. Středem této druhé kružnice byla původně Země. Později dostala Země polohu jinou, byla umístěna excentricky, aby bylo možno vyhovět pozorované nerovnoměrnosti oběhu planet v průběhu roku. Je patrno z jednoduché geometrické úvahy, že tímto způsobem lze deskriptivně vyhovět známým „kličkám", jež astronomie dávno již zjistila na pohybech některých planet. Dokonalého vypracování došla Eudoxova myšlenka v alexandrijské soustavě HIPPARCHOVĚ-PTOLEMAIOVĚ, soustavě značně složité.

Není sporu o tom, že ústřední postavení, které měla v této soustavě Země, bylo zcela v souhlase jak s náboženskými soustavami antickými, tak i s náboženstvím křesťanským, jež je z větší části jejich derivátem.

Obrovský vliv otrokářské nadstavby způsobil, že zcela v zapomenutí upadla řešení jiná, než bylo oficiální náboženské řešení Platonovo. Již ve škole pythagorejské se objevuje myšlenka ústředního ohně, okolo něhož obíhají planety i Slunce. Je tu však zejména geniální nápad HERAKLEIDA Z PONTU (388—310), jenž z faktu, že Merkur a Venuše nemají příliš velkou úhlovou vzdálenost od Slunce, usoudil, že se musí otáčet okolo Slunce. Konečně sám poznamenal, že i denní pohyb oblohy by bylo možno vysvětlit rotací Země kol osy. Herakleidovy myšlenky rozvinul důsledně ARISTARCHOS ZE SAMU, jeden z největších astronomů světových dějin vůbec. Jeho myšlenka je v podstatě již zcela koperníkovská a byla ve své době tak pozoruhodná, že ARCHIMEDES považoval za nutné se o ní zmínit ve svém díle matematickém (*O počtu zrnek písku*). Konečně, historická spravedlnost nám ukládá, abychom i to zaznamenali, že Platon nebyl zcela důsledný ve svých požadavcích náboženských, neboť nadhodil myšlenku vyložit pohyb nebeských těles rotací Země kol osy.

Aristarchos nepovažoval planety a Slunce za bohy, což je nejlépe vidět z jeho mladšího pojednání, v němž navrhl měřit vzdálenost Země od Měsíce a Slunce. Dílo jeho, jakož i dílo Herakleida z Pontu bylo skvělým vyvrcholením materialistické astronomie. Ovšem, tak vykládat běh nebeských těles nebylo bez osobního risika. Víme dobře, že zástupce stoické školy, Aristarchův současník, KLEANTHES, chtěl Aristarcha obvinit z bezbožnosti. Takové obvinění mělo právě tak nebezpečné následky jako ve středověku a později. Nepodivíme se tedy, když tyto skvělé blesky řeckých myšlenek byly zahaleny hustou tmou reakce.

Velkolepý rozvoj výroby a obchodu, dlouhé pouti námořní, netušené objevy a sebevědomí mladého měšťanstva probouzí k životu přírodní vědy v renesanci a přinutí je, aby opět lidstvu sloužily a provázely je na jeho pouti.

Složitý astronomický stroj Ptolemaiův počíná selhávat. Jak se má na př. srovnat s Ptolemaiem fakt, známý již z antiky, že planety nejsou v průběhu let stále stejně veliké, že se nám jeví někdy větší, někdy menší, což je možno pozorovat u samého Měsíce při slunečním zatmění? Jak srovnat s Ptolemaiem fakt, že Slunce vystupuje nad rovník 23°51′20″, když má vystoupit jenom 23°29′? Jde tu dále o přesné určení zeměpisných souřadnic, na nichž kdysi tolik nezáleželo, i když víme, že tu na příklad Arabové měli úspěchy značné. Teď, v renesanci, otázka mapování ve spojitosti s bezpečností námořních cest vystupuje do popředí ovšem velmi silně, neboť není lhostejné, zda koráb těžce naložený zlatem z Indií a vzácným kořením ztroskotá, či ne. A kdo může bezpečnost cest zaručit, když astronomická soustava selhává? Je tu konečně otázka měření času, obtíže s kalendářem. Lateránský koncil roku 1516 se obrátil k této otázce a chtěl právě využít výsledků Koperníkova měření času. Je třeba uvažovat o reformě kalendáře, který kulhá za skutečností. A je tu v neposlední řadě renesanční smysl pro živou realitu, který se nemůže smířit s vyumělkovanou a záplatovanou soustavou Ptolemaiovou, jejíž všechna zlepšování nemohla odstranit základní vadů a věc pouze komplikovala.

Tu přichází slovanský genius z Toruně, Mikuláš Koperník, jehož posláním je, aby přivodil jeden z největších převratů v myšlení lidstva. Slévá ve svém díle to nejušlechtilejší, co měla astronomie až do jeho doby, odhazuje bezcennou idealistickou strusku a vykovává z ušlechtilé slitiny nový pohled na vesmír, pohled převratné síly a významu.

Oč se mohl Koperník opřít? Renesanční ovzduší dýchlo na mladého Koperníka již v dobách jeho studia na Jagellonské akademii. Do počátků astronomie ho tam zaučoval slavný polský učenec Brudzewski. Též tento učenec nebyl zcela spokojen s Ptolemaiovým systémem a není vyloučeno, že prvé pochybnosti Koperníkovy o správnosti tohoto systému se datují již z Krakova. Avšak renesační ovzduší dýchlo tím více na mladého Koperníka v Italii, kam se odebírá studovat na radu a s podporou svého výtečného strýce Lukáše Watzenroda, biskupa varmijského. Renesanční pohled na přírodu je zcela nový, přírody se nebojí a hledí na ni tak, aby ji poznal. Koperníkovi jde o realitu dění, která je zasuta pískovou horou Ptolemaiovy soustavy. A v této soustavě jsou závažné logické nesrovnalosti.

Antická moudrost ovlivňuje hluboce mladého Koperníka zejména v italském období studia. Tak se ve studiu matematiky, fysiky i astronomie seznamuje s antickými myšlenkami, o nichž jsme mluvili. Aristarcha pak považuje za svého předchůdce. Má sice ve svém slavném díle „*De revolutionibus orbium coelestium*" jako své předchůdce pouze Herakleida z Pontu, Ekfanta a Nikéta, avšak na těch stránkách rukopisu, jež při konečné redakci textu nebyly pojaty do díla, jméno Aristarchovo napsáno jest. Můžeme dnes jen tušit důvody, které vedly Koperníka k tomu, že v tištěném textu Aristarchos vynechán byl. Koperník věděl dobře, jak revoluční je pojetí, které poslal do světa. Aristarchos pak byl z antiky velmi dobře znám jako neznaboh, a snad nechtěl jeho jménem provokovat hněv církve ihned.

Otázka relativnosti pohybu a polohy byla též zkoumána. Myšlení renesanční bylo proniknuto ideami velkého předchůdce renesance, Mikuláše z Cusy (naroz. 1401). Mikuláš z Cusy především nevidí Zemi ve středu vesmíru. Dokazuje výtečnými argumenty, že střed vesmíru je všude. Dále vyslovil tento znamenitý myslitel po prvé jasně problém relativity pohybu, který demonstruje na vztahu břehů řeky a člunu, plovoucího po ní.

V takovém myšlenkovém klimatu zraje Koperníkův systém. Genialita slovanského vědce nespočívá však v tom, že určitých myšlenek, jež se zákonitě v jeho době objevují, užil, nýbrž v tom, jak jich užil. Žádný z jeho předchůdců ani současníků neuvedl takové myšlenky v soustavu, žádný jim nedal onu logickou výzbroj, kterou se teprve systém stává theorií. Ideje antiky zůstaly ojedinělými blesky, Koperník však vyvolal převratnou bouři. A tu nemohl vyvolat jen geniální nápad, byla to dlouhá práce třiceti šesti let, jež ji přivodila.

Myšlenka relativnosti pohybu, která hraje tak velkou roli v Koperníkově soustavě, nebyla hned všemi pochopena. Svědectví o tom podává i dílo FRANCISE BACONA (*Novum Organon*), myslitele jistě vysoce pokrokového, slavného materialistického filosofa, který měl pochybnosti o soustavě Koperníkově ještě v 17. století. Proto bylo právem řečeno o Koperníkovi, že Slunce zastavil a Zemi uvedl v pohyb, kterýmižto slovy je zdoben jeho pomník v Toruni.

I když Koperník viděl v myšlence relativnosti pohybu podstatné zjednodušení výkladu astronomických zjevů, nesmíme zapomínat, že to bylo pro něho pouze jedno potvrzení skutečného chodu reality. Koperník nepracoval naprosto pod vlivem nějakého ekonomického principu myšlení (v modernějším rouše hlásal tento princip na příklad AVENARIUS, ztotožňoval subjektivisticky požadavek ekonomického výkladu přírody s jeho pravdivostí), je však velmi příznačné, že tohoto principu nejjednoduššího výkladu vědomě užil Ptolemaios. Fakt, že matematické zpracování věci svědčilo pro novou soustavu, považoval Koperník za potvrzení shody své koncepce s realitou.

Nemalého významu je Koperníkovo tušení všeobecné gravitace, které odíval jeho velký pokračovatel KEPLER do roucha mnohdy mystického. Bylo však třeba tohoto impulsu Koperníkova, aby ISAAC NEWTON mohl myšlenkou gravitace završit moderní koncepci planetární soustavy. Je jasné, že bez Koperníkova systému, bez jeho výkladu precese jarního bodu, by nebylo nebeské mechaniky. A proto by nebyla ani klasická vyšší matematika, jak se jí potom říkalo.

Koperníkova koncepce není prosta všech přežitků Ptolemaiovy soustavy. I Koperník si vypomáhá myšlenkou eudoxovských epicyklů, též on vidí jen rovnoměrný pohyb po dráze kruhové. Avšak touto starou formou proniká zcela nový obsah. Tento obsah je již podstatným krokem vpřed v odrazu reality; tak bylo třeba jíti dál, nebylo však třeba principiálně nové cesty.

Rozsah a závažnost Koperníkova díla by naznačovaly, že bylo vytvořeno učencem, jenž mu věnoval veškeré síly svého života. Avšak zprávy, jež máme o jeho životě, nás poučí o něčem docela jiném. Koperník byl mužem renesance, o níž říká BEDŘICH ENGELS: „Byl to největší pokrokový převrat, který lidstvo dosud prožilo, doba, jež potřebovala a zrodila obry, obry silou mysli, vášnivostí a charakterem, všestranností a učeností. Lidé, kteří položili základ modernímu panství buržoasie, byli všechno, jen ne měšťácky omezení. Naopak, ovanul je více nebo méně dobrodružný duch doby. Stěží se tehdy našel člověk, který by nebyl mluvil čtyřmi nebo pěti jazyky a nevynikal v několika oborech." (*Dialektika přírody*, české vydání 1950, Svoboda, str. 24.) Koperník již za svých studií v Italii projevil neobyčejnou mnohostrannost. Ba lze se právem domnívati, že by i v jiném oboru kulturním byl vykonal dílo mohutné. V Italii studoval sice matematiku, fysiku a astronomii, ale málem by se tam byl změnil v malíře pod vlivem ohromného uměleckého kvasu té doby. Jeho nadání pro výtvarné umění bylo zřejmě veliké, když ho dovedlo strhnout na čas úplně pro sebe. Koperník byl však též hudebníkem, výborným právníkem, v Italii graduovaným doktorem práv, a byl též odborně vzdělaným lékařem. Jako lékař měl ovšem na starosti též osoby postavení výjimečného, jako byl jeho strýc biskup, ale jeho skutečný humanismus se nejkrásněji projevil v tom, že zdarma léčil mnohé a mnohé prosté občany celého rozlehlého biskupství. Právnický věhlas Koperníkův se osvědčil mnohokrát v nesnadných diplomatických jednáních, jež byla v dobách politického napětí zvláště závažná. Koperník, věrný syn Polsky, hájil práva biskupství varmijského, oddaně tíhnoucího k polské koruně, proti rozpínavosti řádu německých rytířů. Též organisační schopnosti osvědčil Koperník zcela výjimečné, a to nejen v dobách vzrušených, nýbrž dokonce válečných. Část varmijského biskupství, jíž spravoval, neváhal organisovat vojensky proti vpádu loupeživých německých rytířů. Centrum jeho správního okrsku, hrad Olštýn, přivítalo svými bombardami rytířské lupiče tak účinně, že odtáhli s nepořízenou. Bombardy pro hrad objednal Koperník, též o munici se dobře staral a dělostřeleckému ohni uměl velet.

Organisační starosti vedly Koperníka k úvahám o podstatě peněz. Jako vším, tedy i touto věcí se zabývá do hloubky, čte traktáty o povaze peněz a jejich reformě a výsledek svého přemýšlení ukládá ve spis. Tato práce bude vždy chloubou úrovně polského myšlení ekonomického.

Není divu, že osobnost tak ohromného významu se snažili v nedávné době nacisté přistřihnout po svém, a to při jeho výročí v roce 1943. Avšak humanismus Koperníkův nelze nacisticky skreslit, jeho vzor bude vždy ukazatelem cesty lidstva pokrokového.

Poučný je i další osud Koperníkova hlavního díla, jeho práce v oblasti astronomické. Některé nedostatky jeho systému, na příklad otázka kruhových drah, vedly k přesnějšímu promyšlení jejich tvaru, to však základní koncepcí otřást nemohlo. Obtíže geocentrismu byly v podstatě překonány, takže nová soustava začala lidstvu opravdu sloužit. A to právě v úkolech, jež renesance s pozdějším rozvojem kapitalismu potřebovaly. Tu stačí připomenout jenom závažnost zjištění zeměpisných souřadnic a časomíru. Koperníkovo zjištění, že stálice musí být řádově mnohem vzdálenější než nejvzdálenější planety, provokuje přímo myšlenku nekonečného vesmíru, i když u Koperníka samého byl ještě formálně uzavřen sférou stálic. Ovšem taková myšlenka, jakož i jiná další, že je mnoho planetárních soustav, vede k těžkému sporu s katolickou církví. Proto hyne pokračovatel Koperníkův, Giordano Bruno, na hranici svaté inkvisice, že měl odvahu domýšlet Koperníkovy ideje. Církev katolická se probouzí až poněkud později, aby s nenávistí zavrhla dílo Koperníkovo, až zhruba po stu létech. Byla totiž ve svých nejdůležitějších představitelích také na čas ovanuta duchem renesance a nebezpečí si hned neuvědomila. Zato církev evangelická, dokonce v osobě samého LUTHERA i MELANCHTHONA se vypořádává okamžitě s Koperníkovým dílem surovým útokem.

Ovšem, pokrokovou myšlenku, pro niž hyne Bruno, není možno zastavit. Právě proto, že církevním hodnostářům byla známa pravdivost názorů Koperníkových, zakročili ostře proti GALILEOVI GALILEIMU. Neboť tento velikán renesance si položil přímo za úkol dalšími argumenty fysikálně podepřít učení Koperníkovo, původně jenom kinematické povahy. Galileo vyhrál svůj zápas s církevní reakcí. Jak byla však silná, vidíme i z toho, že RENÉ DESCARTES pálí svůj slavný traktát o světě jen proto, že obsahuje zobecnění Koperníkových a Galileových myšlenek, a to činí právě v době, kdy se dovídá, že Galileo musil odvolat své názory.

Buržoasie ovšem byla ještě v té době třídou pokrokovou a dovedla chápat, jaký význam pro ni má Koperníkova myšlenka, dále rozváděná jeho pokračovateli. Dovedla se proto též těchto mužů ujmout a neváhala hodit na váhu i pravdy vědecké, aby si zajistila vítězství.

V době, kdy buržoasie dožívá, kdy její filosofie svědčí o naprostém rozkladu myšlení, je sice Koperník zdánlivě uctíván, avšak podstata jeho učení je rafinovaně torpedována. Povšimněme si tu jen dvou ukázek. Myšlenka výjimečného postavení naší Země byla Koperníkem definitivně poražena. Taková myšlenka se však opakuje ve velkém s celou naší planetární soustavou. Anglický fysik a astronom JAMES JEANS se stal známý svou slapovou theorií, jež měla vyložit vznik planetární soustavy. Avšak to hlavní na jeho theorii, totiž vytvoření slapu na praslunci, je vázáno na zcela nepravděpodobnou, ojedinělou cestu hvězdy kolem našeho původního praslunce. Pásma života jsou pak podle původních Jeansových výpočtů tak mizivého objemu, že jsou krom našeho planetárního systému skoro nemožná. A tak faktum naší planetární soustavy je ojedinělým zjevem ve vesmíru, zázrak bezmála, jenž byl přiveden na svět bohem — matematikem. Jeansovy výpočty v této věci správné nejsou a jeho úvahy také ne. Sluncí a planetárních soustav je mnoho, dokonce nové vznikají, jak ani jinak není možné. To ukazují nejnovější výsledky sovětské vědy, v nichž jakoby ožívaly vznešené myšlenky Giordana Bruna.

Jiná myšlenka, směřující k naprostému podcenění Koperníkova úžasného výkonu, se falešně vyvozuje z EINSTEINOVY theorie relativity. Říká se asi tak: je to jedno, zda se vesmír točí kolem nás, či my se svojí planetou ve vesmíru, neboť na pohybu je vše relativní. Tito vulgarisátoři myšlenek obecné či speciální theorie relativity zapomínají na argumenty, jimiž Koperník sám a po něm Galileo Galilei podepřel fakt, že se naše Země otáčí. Ukazovali, že není možno, aby tak obrovské masy v tak obrovských rychlostech úměrných vzdálenostem rotovaly beztrestně. Zdánlivě „efektní“ důsledek z theorie relativity je pouze klamným závěrem, k němuž pomohly i některé, ne dosti uvážené výroky relativistů samých.

Uvažme nyní, kolikrát v dějinách byla velká myšlenka odrážející objektivní realitu napadána. Aristarchos byl zastřen platonovskými bohy — planetami, když vítězila otrokářská reakce. Koperníka napadá dožívající reakce feudální. A podstatu myšlenky Koperníkovy napadá dožívající reakce buržoasní.

Z Koperníkova díla máme to veliké poučení, že myšlenka odrážející objektivní realitu se umlčet nedá. Ovšem k tomu, aby prorazila, je třeba heroismu práce, nikoli pouhých slov. Bylo-li právem řečeno, že genius je práce, pak plným právem platí tato slova o Koperníkovi. Slavný polský mistr vědy není mužem chvilkových, byť i geniálních nápadů. Je hrdinou práce, která nás dosud osvobozuje od pověr. Avšak jen myšlence odrážející objektivní realitu lze přiřknout čestný titul koperníkánského převratu, jehož bylo už od dob Koperníkových tolikrát užito. Vzpomeňme tu jen, že i německý filosof Kant v posledním období své činnosti chtěl čestného titulu koperníkánského převratu použít pro svoji myšlenku, že duch vnáší do přírody řád. Tento idealistický požadavek, odporující vší zkušenosti, která ukazuje, že je to příroda a společnost, jež formují náš duševní život, nezaslouží onoho čestného titulu. Kant se v posledním období své činnosti neprávem dovolával slavného Poláka při záludném obratu své filosofie, a to díla, kterému ve svých mladších letech tak dobře rozuměl.

Koperníkův rukopis je v Praze. Patřil nějakou dobu též učiteli národů Janu Amosu Komenskému. I když Komenský nezastával učení Koperníkovo, je pro nás ten fakt významný, že o něm přemýšlel a že se tak setkali aspoň dílem dva velcí slovanští geniové. Rukopis je chloubou našeho rukopisného pokladu a je sám částí naší národní historie. Český národ, který hledí s obzvláštní úctou na monumentální dílo Koperníkovo, střeží s láskou ušlechtilé črty pera těch listů, které změnily myšlení světa.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 78 (1953)

POZNÁMKA O ÚHLECH MNOHOÚHELNÍKA

ALFRED RÉNYI, Budapest.

(Z dopisu *E. Čechovi* datovaného 2. 1. 1953.)

DT: 513.192

Úhly $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ rovinného n-úhelníka splňují nerovnosti

$$0 < \alpha_k < 2\pi \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

a rovnici

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = (n - 2)\, \pi\,. \tag{2}$$

E. Čech položil otázku, zda obráceně čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ($n \geqq 3$) splňující podmínky (1) a (2) jsou *v daném pořadí* úhly n-úhelníka. *Odpověď je kladná.*

Důkaz vedeme indukcí. Pro $n = 3$ je věta triviální, budiž tedy $n \geqq 4$ a pro $(n - 1)$-úhelníky budiž věta už dokázána. Položme $\alpha_j = \alpha_k$ pro $j \equiv k \pmod n$. Pro $n \geqq 4$ je

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_{i+1}) = \frac{(n-2)\,.\,2\pi}{n} \geqq \pi\,,$$

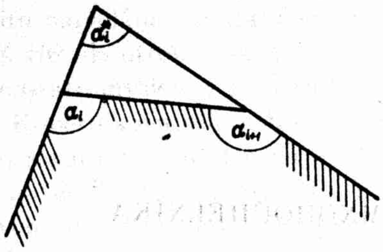
při čemž rovnost platí pouze pro $n = 4$. Je-li $\alpha_i + \alpha_{i+1} = \pi$ pro všechna n, je $n = 4$ a věta je správná (případ rovnoběžníka). Jinak musí existovat takový index i, že $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$, avšak $\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} \leqq \pi$; protože $\alpha_{i+2} > 0$, je $\alpha_{i+1} < \pi$ a tedy $\alpha_i + \alpha_{i+1} < 3\pi$, neboť $\alpha_i < 2\pi$. Položíme-li

$$\alpha_i^* = \alpha_i + \alpha_{i+1} - \pi\,,$$

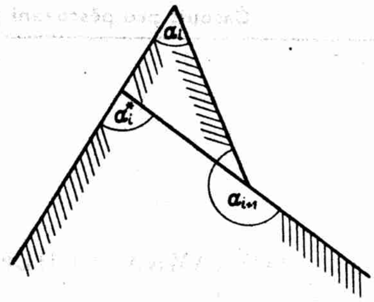
bude $0 < \alpha_i^* < 2\pi$ a součet $n - 1$ čísel

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i^*, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_n \tag{3}$$

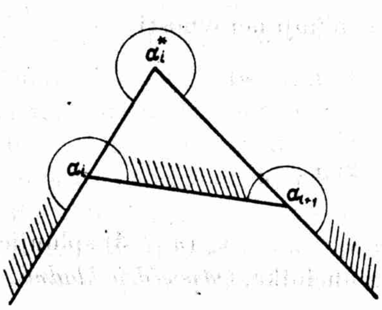
bude roven $(n - 3)\,\pi$, takže podle induktivního předpokladu jsou čísla (3) v daném pořadí úhly $(n - 1)$-úhelníka P. Mimo to je patrné, že při induktivním důkaze můžeme předpokládat $\alpha_i \neq \pi$, $\alpha_{i+1} \neq \pi$. Jsou nyní tři možnosti: (a) $\alpha_i^* < \pi$, (b) $\pi < \alpha_i^* < 2\pi$, (c) $\alpha_i^* = \pi$. V případě (a) je $\alpha_i + \alpha_{i+1} < 2\pi$ a tedy aspoň jeden z obou úhlů, třeba α_i, je menší než π. Je-li také $\alpha_{i+1} < \pi$, ubereme (obr. a_1) od P malý trojúhelník s úhly $\pi - \alpha_i$, $\pi - \alpha_{i+1}$, α_i^*; je-li $\alpha_{i+1} > \pi$, připojíme (obr. a_2) k P malý trojúhelník s úhly α_i, $\alpha_{i+1} - \pi$, $\pi - \alpha_i^*$.



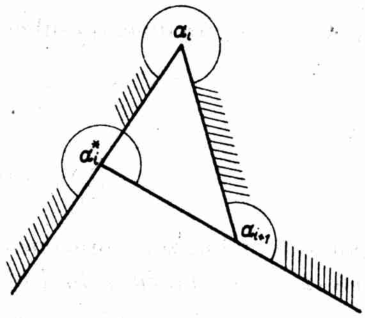
Obr. a$_1$.



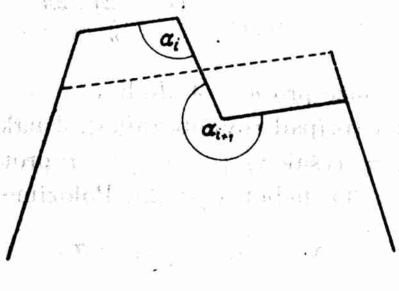
Obr. a$_2$.



Obr. b$_1$.



Obr. b$_2$.



Obr. c.

V případě (b) je $\alpha_i + \alpha_{i+1} > 2\pi$ a tedy aspoň jeden z obou úhlů, třeba α_i, je větší než π. Je-li také $\alpha_{i+1} > \pi$, připojíme (obr. b$_1$) k P malý trojúhelník s úhly $\alpha_i - \pi$, $\alpha_{i+1} - \pi$, $2\pi - \alpha_i^*$; je-li $\alpha_{i+1} < \pi$, ubereme (obr. b$_2$) od P malý trojúhelník s úhly $2\pi - \alpha_i$, $\pi - \alpha_{i+1}$, $\alpha_i^* - \pi$. Posléze v případě (c) pozměníme P podle obr. c. Věta je dokázána.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 78 (1953)

KŘIVKA V AFINNÍM PROSTORU A JEJÍ AFINNÍ OBLOUK

FRANT. NOŽIČKA, Praha.

(Došlo 4. února 1952.) DT: 513.771

ČÁST I.

V tomto článku jsou shrnuty nejzákladnější poznatky o křivce v obecném n-rozměrném prostoru afinním A_n v přehledný celek a to tak, aby, za předpokladů obvyklých v diferenciální geometrii, měly postavené věty a definice „obecnou platnost" v tom smyslu, aby zahrnovaly všechny křivky v A_n, které přicházejí při lokálním studiu s hlediska diferenciální geometrie v úvahu.

Jde především o základní afinní klasifikaci křivek v A_n, o níž pojednává věta 1 a definice 1, dále pak o definici privilegovaného parametru křivky, tak zvaného afinního oblouku. Dále jsou zavedeny určité charakteristické skalární funkce, jichž důležitost v obecné afinní geometrii vyzdvihuje existenční věta 8.

Článek je přínosem k theorii křivek v A_n pouze v tom smyslu, že a) zobecňuje dosavadní skrovné poznatky a shrnuje je v jednotnou theorii, b) upozorňuje na veličiny základního významu pro křivku v A_n, které nejsou afinními invarianty v obvyklém smyslu.

Nechť v n-rozměrném afinním prostoru $A_n (n > 1)$ o souřadnicích ξ^α ($\alpha = 1, 2, \ldots, n$) se symetrickou konexí o koeficientech $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ (ξ^α) je definována křivka C parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(t), \quad \alpha = 1, 2, \ldots n, \tag{1}$$

při čemž předpokládáme, že

a) funkce $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ jsou reálnými funkcemi reálných proměnných ξ^α, $\alpha = 1, 2, \ldots$ $\ldots n$, které mají v určité oblasti D spojité parciální derivace nejméně $2(p-1)$-ho řádu, kde p je přirozené číslo $1 \leqq p \leqq n$;

b) funkce $\xi^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots n$, jsou reálnými funkcemi[1]) v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, jež mají v tomto intervalu spojité derivace řádu nejméně $2p$, při čemž pro všechny hodnoty $t \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ leží body $\xi^\alpha(t)$ v oblasti D. V žádném bodě intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ nechť nejsou všechny derivace $\frac{d\xi^\alpha}{dt}$ současně rovny nule;

[1]) Reálné proměnné t.

c) vektory $\underset{i}{u}^\nu$, $i = 1, 2, \dots p$, takto definované

$$\underset{1}{u}^\nu = \frac{d\xi^\nu}{dt}, \quad \underset{i}{u}^\nu = \nabla_t \underset{i-1}{u}^\nu, \qquad i = 2, \dots p,$$

kde ∇_t je symbol absolutní derivace, jsou v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ lineárně nezávislé, vektor

$$\underset{p+1}{u}^\nu = \nabla_t \underset{p}{u}^\nu \tag{2b}$$

nechť je v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ jejich lineární kombinací.

Poznámka 1. V případě $p = n$ je vektor $\underset{p+1}{u}^\nu \equiv \underset{n+1}{u}^\nu$ vždy lineární kombinací vektorů $\underset{1}{u}^\nu, \underset{2}{u}^\nu, \dots \underset{n}{u}^\nu$.

Poznámka 2. Odůvodnění předpokladů a), b), c) bude patrné z vět, které v dalším budou odvozeny.

Definice I. *Za platnosti předpokladů* a), b), c) *budeme říkat, že rovnicemi* (1) *je v intervalu* $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ *parametricky definována regulární křivka p-té třídy* ($1 \leq p \leq$ $\leq n$) *v afinním prostoru* A_n.

Poznámka 3. Z předpokladů a), b), c) a z definice I je zřejmé, že jde o lokální definici. Tedy též tvrzení, která budou v dalším uvedena, mají lokální charakter.

Budiž C křivka p-té třídy, $1 \leq p \leq n$ (ve smyslu definice I) s definičním oborem $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Potom, podle předpokladu c), jsou vektory $\underset{i}{u}^\nu$, $i = 1, 2, \dots p$ lineárně nezávislé v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, vektor $\underset{p+1}{u}^\nu \equiv \nabla_t \underset{p}{u}^\nu$ jest v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ jejich lineární kombinací. Existují tedy v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ skaláry $\underset{p-i}{l}^{(p)}(t)$, $i = 1, 2, \dots p$ tak, že platí v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$

$$\nabla_t \underset{p}{u}^\nu \equiv \underset{p+1}{u}^\nu = \sum_{i=1}^{p} \underset{p-i}{l}^{(p)} \underset{i}{u}^\nu. \tag{3}$$

Budiž dále $\tau = \varphi(t)$ funkce definovaná v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ taková, že existuje spojitá derivace $\frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}} \varphi(t)$ v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, při čemž všude v uvažovaném intervalu je $\frac{d\varphi}{dt} \neq 0$. Za těchto okolností je vztahem

$$\tau = \varphi(t), \qquad t \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t}) \tag{4a}$$

definována transformace parametru křivky C, regulární v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Vztah (4a) lze též přepsat na tvar

$$t = \psi(\tau), \tag{4b}$$

kde ψ je inversní funkcí k funkci φ v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$.

Vztáhněme křivku (1), jež dle předpokladu je p-té třídy v A_n $(1 \leqq p \leqq n)$, k novému parametru τ, zavedenému v (4a) resp. (4b). Zaveďme dále označení

$$\overset{*}{\underset{1}{u}}{}^{\nu} = \frac{\mathrm{d}\xi^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}, \quad \overset{*}{\underset{i}{u}}{}^{\nu} = \nabla_{\tau} \overset{*}{\underset{i-1}{u}}{}^{\nu}, \qquad i = 1, 2, \dots p + 1. \tag{5}$$

Pak platí tyto věty:

Pomocná věta I. *V intervalu* $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ *jsou vektory* $\underset{i}{u}{}^{\alpha}, \overset{*}{\underset{i}{u}}{}^{\alpha}$, $i = 1, 2, \dots p + 1$, *vázány vztahy*

$$\overset{*}{\underset{j}{u}}{}^{\nu} = \sum_{i=1}^{j} A_{j,i} \underset{i}{u}{}^{\nu}, \qquad j = 1, 2, \dots p + 1, \tag{6}$$

kde veličiny $A_{j,i}$ *závisí pouze na tvaru funkce* φ (t), *uvažované v* (4a), *a jejích derivacích* (*resp. na tvaru funkce* $\psi(t)$ *v* (4b) *a jejích derivacích*).

Důkaz lze podat stručně methodou úplné indukce. Při každém $n > 1$ a každém p, $1 \leqq p \leqq n$ jest, jak plyne z (2), (4)a, (5), pro $j = 1$

$$\overset{*}{\underset{1}{u}}{}^{\nu} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \underset{1}{u}{}^{\nu}, \tag{7}$$

tedy $A_{1,1} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$. Pro $j = 2$ dostaneme ihned z (7)

$$\overset{*}{\underset{2}{u}}{}^{\nu} = \nabla_{\tau} \overset{*}{\underset{1}{u}}{}^{\nu} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \overset{*}{\underset{1}{u}}{}^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \overset{*}{\underset{1}{u}}{}^{\alpha} \overset{*}{\underset{1}{u}}{}^{\beta} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} \underset{1}{u}{}^{\nu} + \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underset{1}{u}{}^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \underset{1}{u}{}^{\alpha} \underset{1}{u}{}^{\beta}\right),$$

tedy

$$\overset{*}{\underset{2}{u}}{}^{\nu} = \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} \underset{1}{u}{}^{\nu} + \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \underset{2}{u}{}^{\nu}. \tag{8}$$

Zde je $A_{2,1} = \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2}$, $A_{2,2} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2$. Tvrzení věty je tedy správné při každém $n > 1$, $1 \leqq p \leqq n$, pro $j = 1, 2$. Úplnou indukcí dá se snadno dokázat, že věta platí v tom rozsahu, v němž byla vyslovena[2]).

Pomocná věta II. *Pro veličiny* $A_{j,1}, A_{j,j-1}, A_{j,j}$ *ze vztahů* (6) *platí*

$$A_{j,1} = \frac{\mathrm{d}^j t}{\mathrm{d}\tau^j} \qquad \text{pro } j = 1, 2, \dots p + 1; \tag{9a}$$

$$A_{j,j-1} = \frac{j(j-1)}{2} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{j-2} \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} \qquad \text{pro } j = 2, \dots p + 1; \tag{9b}$$

$$A_{j,j} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{j} \qquad \text{pro } j = 1, 2, \dots p + 1 \tag{9c}$$

při každém $n > 1$ *a každém* p, $1 \leqq p \leqq n$.

[2]) Methoda důkazu je obdobná jako pro výpočet j-té derivace funkce složené. Zde jde však o absolutní derivaci vektorů.

Důkaz se provede opět úplnou indukcí. Z (7), (8) plyne ihned, že věta je správná při každém $n > 1$, $1 \leqq p \leqq n$ pro $j = 1, 2$. Předpokládáme-li platnost vztahů (9) pro $n \geqq 3$, $3 \leqq p \leqq n$, $3 \leqq j \leqq p + 1$ (neboť případy $n = 2$, $1 \leqq p \leqq 2$, $j = 1, 2$ jsou zřejmě v (7), (8) obsaženy), potom lze podle (6), (9) psát

$$\underset{j}{{}^*u^\nu} = \sum_{i=1}^{j-2} A_{j,i} \underset{i}{u^\nu} + \frac{j(j-1)}{2} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{j-2} \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} \underset{j-1}{u^\nu} + \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{j} \underset{j}{u^\nu},$$

kde $A_{j,1} = \dfrac{\mathrm{d}^j t}{\mathrm{d}\tau^j}$. Odtud plyne pak po delším výpočtu a úpravě, přihlédneme-li k definičním vztahům (2),

$$\underset{j+1}{{}^*u^\nu} = \frac{\mathrm{d}^{j+1} t}{\mathrm{d}\tau^{j+1}} \underset{1}{u^\nu} + \sum_{i=2}^{j-1} A_{j+1,i} \underset{i}{u^\nu} + \frac{(j+1)j}{2} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{j-1} \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} \underset{j}{u^\nu} + \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{j+1} \underset{j+1}{u^\nu},$$

při čemž vyjdeme od identity

$$\underset{j+1}{{}^*u^\nu} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{j}{{}^*u^\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \underset{j}{{}^*u^\alpha} \underset{1}{{}^*u^\beta}.$$

Je tedy

$$A_{j+1,1} = \frac{\mathrm{d}^{j+1} t}{\mathrm{d}\tau^{j+1}}, \quad A_{j+1,j} = \frac{j(j+1)}{2} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{j-1} \left(\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2}\right), \quad A_{j+1,j+1} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{j+1}$$

v souhlase s (9). Tím je věta úplnou indukcí dokázána.

Na základně předchozích dvou vět dokážeme snadno tuto důležitou větu:

Věta 1. *Třída regulární křivky C v A_n je afinní invariant, t. j. třída křivky C v A_n nezávisí na volbě souřadnic v A_n a na volbě parametru, k němuž křivku vztáhneme.*

Důkaz: Nejdříve dokážeme, že třída křivky je invariantní při transformaci souřadnic v A_n. Budiž tedy p, $1 \leqq p \leqq n$ třída křivky v A_n. Jsou tedy vektory $\underset{1}{u^\nu}, \underset{2}{u^\nu}, \dots \underset{p}{u^\nu}$ (podle předpokladu c) na str. 2) lineárně nezávislé v definičním oboru křivky C, t. j. matice

$$\begin{bmatrix} \underset{1}{u^1} \underset{1}{u^2} \dots \underset{1}{u^n} \\ \underset{2}{u^1} \underset{2}{u^2} \dots \underset{2}{u^n} \\ \dots\dots\dots \\ \underset{p}{u^1} \underset{p}{u^2} \dots \underset{p}{u^n} \end{bmatrix}$$

má v uvažovaném oboru hodnost p. Potom v nějakém bodě t z definičního oboru křivky má p-vektor z vektorů $\underset{1}{u^\alpha}, \underset{2}{u^\alpha}, \dots \underset{p}{u^\alpha}$ aspoň jednu složku od nuly různou, t. j.

$$\underset{[1}{u^{\alpha_1}} \underset{2}{u^{\alpha_2}} \dots \underset{p]}{u^{\alpha_p}} \neq 0 \quad \text{pro } t \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t}), \tag{11}$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p \in 1, 2, \dots n$ jsou pevná vzájemně různá čísla při pevně zvoleném $t \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$.

Je-li $\xi^{\bar\alpha} = \xi^{\bar\alpha}(\xi^\beta)$ libovolná transformace souřadnic v A_n, regulární v určitém okolí uvažovaného bodu t a označíme-li

$$A^{\alpha}_{\bar\alpha} = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\xi^{\bar\alpha}},\quad A^{\bar\alpha}_{\alpha} = \frac{\partial\xi^{\bar\alpha}}{\partial\xi^\alpha},$$

potom, označíme-li pruhem nad symbolem transformované složky vektorů $\underset{i}{u}$, platí

$$\underset{i}{u}^\alpha = A^\alpha_{\bar\alpha}\underset{i}{\bar u}^{\bar\alpha}.\quad \underset{i}{\bar u}^{\bar\alpha} = A^{\bar\alpha}_\alpha \underset{i}{u}^\alpha,\quad i = 1, 2, \dots p. \tag{12}$$

Pro složku $\underset{[1}{u}^{\alpha_1}\underset{2}{u}^{\alpha_2}\dots\underset{p]}{u}^{\alpha_p}$, uvažovanou v (11), platí (podle (12)) při uvažované transformaci v souřadnic A_n v uvažovaném bodě t

$$\underset{[1}{u}^{\alpha_1}\underset{2}{u}^{\alpha_2}\dots\underset{p]}{u}^{\alpha_p} = A^{\alpha_1}_{\bar\alpha_1}A^{\alpha_2}_{\bar\alpha_2}\dots A^{\alpha_p}_{\bar\alpha_p}\underset{[1}{\bar u}^{\bar\alpha_1}\underset{2}{\bar u}^{\bar\alpha_2}\dots\underset{p]}{\bar u}^{\bar\alpha_p}. \tag{13}$$

Kdyby vektory $\underset{1}{\bar u}^\alpha, \underset{2}{\bar u}^\alpha \dots \underset{p}{\bar u}^\alpha$ byly v uvažovaném bodě lineárně závislé, potom všechny složky $\underset{[1}{\bar u}^{\bar\alpha_1}\underset{2}{\bar u}^{\bar\alpha_2}\dots\underset{p]}{\bar u}^{\bar\alpha_p}$ p-vektoru z vektorů $\underset{1}{\bar u}^\alpha, \underset{2}{\bar u}^\alpha, \dots \underset{p}{\bar u}^\alpha$ by byly rovny nule (při uvažované transformaci souřadnic v A_n), což by, podle (13), mělo za následek, že by též v uvažovaném bodě bylo $\underset{[1}{u}^{\alpha_1}\underset{2}{u}^{\alpha_2}\dots\underset{p]}{u}^{\alpha_p} = 0$, což je ve sporu s předpokladem (11). Ježto bod t byl libovolným bodem z definičního intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ křivky C, plyne z předchozího, že vektory $\underset{1}{\bar u}^\alpha, \underset{2}{\bar u}^\alpha, \dots \underset{p}{\bar u}^\alpha$ jsou lineárně nezávislé v každém bodě uvažovaného oboru.

Budiž nyní $\underset{[1}{\bar u}^{\bar\alpha_1}\underset{2}{\bar u}^{\bar\alpha_2}\dots\underset{p+1]}{\bar u}^{\bar\alpha_{p+1}}$ libovolná složka $p+1$-vektoru z vektorů $\underset{1}{\bar u}^\alpha$, $\underset{2}{\bar u}^\alpha, \dots \underset{p+1}{\bar u}^\alpha$. Potom při každé regulární transformaci souřadnic v A_n platí

$$\underset{[1}{\bar u}^{\bar\alpha_1}\underset{2}{\bar u}^{\bar\alpha_2}\dots\underset{p+1]}{\bar u}^{\bar\alpha_{p+1}} = A^{\bar\alpha_1}_{\alpha_1}A^{\bar\alpha_2}_{\alpha_2}\dots A^{\bar\alpha_{p+1}}_{\alpha_{p+1}}\underset{[1}{u}^{\alpha_1}\underset{2}{u}^{\alpha_2}\dots\underset{p+1]}{u}^{\alpha_{p+1}}. \tag{14}$$

Ježto podle předpokladu je křivka C třídy p, je, vzhledem k definici třídy křivky, vektor $\underset{p+1}{u}^\nu = \nabla_t \underset{p}{u}^\nu$ lineární kombinací vektorů $\underset{1}{u}^\nu, \underset{2}{u}^\nu, \dots \underset{p}{u}^\nu$ a tedy všechny složky $\underset{[1}{u}^{\alpha_1}\underset{2}{u}^{\alpha_2}\dots\underset{p+1]}{u}^{\alpha_{p+1}}$ jsou v uvažovaném oboru rovny nule. Odtud a z (14) plyne pak, že všechny složky $\underset{[1}{\bar u}^{\bar\alpha_1}\underset{2}{\bar u}^{\bar\alpha_2}\dots\underset{p+1]}{\bar u}^{\bar\alpha_{p+1}}$ jsou rovny nule. Ježto předtím jsme ukázali, že $\underset{1}{\bar u}^{\bar\alpha_1}, \underset{2}{\bar u}^{\bar\alpha_2}, \dots \underset{p}{\bar u}^{\bar\alpha_p}$ jsou lineárně nezávislé, plyne z předchozího ihned, že vektor $\underset{p+1}{\bar u}^\alpha$ je lineární kombinací vektorů $\underset{1}{\bar u}^\alpha, \underset{2}{\bar u}^\alpha, \dots \underset{p}{\bar u}^\alpha$.

Tím jsme dokázali, že třída křivky je invariantní vůči transformaci souřadnic v A_n. Zbývá ještě ukázat, že třída křivky nezávisí na volbě parametru, k němuž křivku vztáhneme.

Při transformaci parametru[3]) přejdou vektory $\underset{1}{u}^\nu, \underset{2}{u}^\nu, \dots \underset{p}{u}^\nu, \underset{p+1}{u}^\nu$ ve vektory

[3]) Tedy při transformaci (4).

$\underset{1}{{}^*u^\nu}, \underset{2}{{}^*u^\nu}, \dots \underset{p}{{}^*u^\nu}, \underset{p+1}{{}^*u^\nu}$, definované v (5), při čemž platí vztahy (6). Ježto dle předpokladu je daná křivka třídy p, existuje aspoň jedna složka $\underset{[1}{u^{\alpha_1}}\underset{2}{u^{\alpha_2}}\dots\underset{p]}{u^{\alpha_p}}$ p-vektoru z vektorů $\underset{1}{u^\alpha}, \underset{2}{u^\alpha}, \dots \underset{p}{u^\alpha}$, jež je ve zvoleném bodě t z definičního oboru křivky C různá od nuly. Z (6) plyne pak ihned

$$\underset{[1}{{}^*u^{\alpha_1}}\underset{2}{{}^*u^{\alpha_2}}\dots\underset{p]}{{}^*u^{\alpha_p}} = A_{1,1}, A_{2,2}\dots A_{p,p}\underset{[1}{u^{\alpha_1}}\underset{2}{u^{\alpha_2}}\dots\underset{p]}{u^{\alpha_p}},$$

což můžeme vzhledem k (9c) přepsat na tvar

$$\underset{[1}{{}^*u^{\alpha_1}}\underset{2}{{}^*u^{\alpha_2}}\dots\underset{p]}{{}^*u^{\alpha_p}} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{\frac{p(p+1)}{2}}\underset{[1}{u^{\alpha_1}}\underset{2}{u^{\alpha_2}}\dots\underset{p]}{u^{\alpha_p}}. \tag{15}$$

Ježto při transformaci (4) je v uvažovaném oboru $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \neq 0$ a ježto dle předpokladu je v uvažovaném bodě složka $\underset{[1}{u^{\alpha_1}}\underset{2}{u^{\alpha_2}}\dots\underset{p]}{u^{\alpha_p}}$ různá od nuly, plyne z (15) ihned

$$\underset{[1}{u^{\alpha_1}}\underset{2}{u^{\alpha_2}}\dots\underset{p]}{u^{\alpha_p}} \neq 0 \Rightarrow \underset{[1}{{}^*u^{\alpha_1}}\underset{2}{{}^*u^{\alpha_2}}\dots\underset{p]}{{}^*u^{\alpha_p}} \neq 0. \tag{16}$$

Ježto jsme uvažovali libovolný bod z definičního oboru křivky, plyne ze (16) ihned, že vektory $\underset{1}{{}^*u^\alpha}, \underset{2}{{}^*u^\alpha}, \dots \underset{p}{{}^*u^\alpha}$ jsou v tomto oboru lineárně nezávislé.

Z předpokladu, že daná křivka C je třídy p, plyne ihned, že všechny složky $(p + 1)$-vektoru utvořeného z vektorů $\underset{1}{u^\alpha}, \underset{2}{u^\alpha}\dots \underset{p}{u^\alpha}, \underset{p+1}{u^\alpha}$ jsou v definičním oboru křivky rovny nule. Při transformaci (4) platí vztah

$$\underset{[1}{{}^*u^{\alpha_1}}\underset{2}{{}^*u^{\alpha_2}}\dots\underset{p+1]}{{}^*u^{\alpha_{p+1}}} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{\frac{(p+2)(p+1)}{2}}\underset{[1}{u^{\alpha_1}}\underset{2}{u^{\alpha_2}}\dots\underset{p+1]}{u^{\alpha_{p+1}}};$$

odtud plyne pak ihned, že

$$\underset{[1}{u^{\alpha_1}}\underset{2}{u^{\alpha_2}}\dots\underset{p+1]}{u^{\alpha_{p+1}}} \equiv 0 \Rightarrow \underset{[1}{{}^*u^{\alpha_1}}\underset{2}{{}^*u^{\alpha_2}}\dots\underset{p+1]}{{}^*u^{\alpha_{p+1}}} \equiv 0,$$

t. j. vektory $\underset{1}{{}^*u^{\alpha_1}}, \underset{2}{{}^*u^{\alpha_2}}, \dots \underset{p+1}{{}^*u^{\alpha_{p+1}}}$ jsou v uvažovaném oboru lineárně závislé. Ježto jsme předtím ukázali, že vektory $\underset{i}{{}^*u^\alpha}$, $i = 1, 2, \dots, p$, jsou v tomto oboru lineárně nezávislé, plyne odtud ihned, že vektor $\underset{p+1}{{}^*u^\nu}$ jest v definičním oboru křivky lineární kombinací vektorů $\underset{i}{{}^*u^\alpha}$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Tím jsme dokázali, že třída křivky nezávisí na volbě parametru křivky. Tím je důkaz věty 1. hotov.

Nyní se obrátíme k důsledkům předchozích vět. Nechť C značí regulární křivku p-té třídy v A_n s definičním oborem $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ s parametrickým vyjádřením (1). Buďtež $\underset{i}{u^\nu}$, $i = 1, 2, \dots p$ vektory definované v (2a). Ježto dle předpokladu je křivka C třídy p-té, platí pro vektor $\underset{p+1}{u^\nu}$, definovaný v (2)b, vztah (3). Vztáhneme-li křivku C k novému parametru τ, zavedenému v (4a) resp. (4b) a mají-li vektory $\underset{1}{*u^\nu}, \underset{2}{*u^\nu}, \ldots \underset{p}{*u^\nu}, \underset{p+1}{*u^\nu}$ tentýž význam jako v (5), potom, vzhledem k větě 1, existují skaláry $\underset{p-i}{*l^{(p)}}(\tau)$, $i = 1, 2, \ldots, p$ (kde $\tau = \tau(t)$) tak, že v definičním oboru $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ křivky C platí

$$\underset{p+1}{*u^\nu} \equiv \nabla_\tau \underset{p}{*u^\nu} = \sum_{i=1}^{p} \underset{p-i}{*l^{(p)}} \underset{i}{*u^\nu}. \tag{17}$$

Nám půjde nyní o to najít vztah mezi skaláry $\underset{p-i}{l^{(p)}}, \underset{p-i}{*l^{(p)}}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, kde skaláry označené hvězdičkou, odpovídají parametru τ (viz (17)), ty druhé pak původnímu parametru t (viz (3)).

Věta 2. *Skaláry* $\underset{p-i}{l^{(p)}}, \underset{p-i}{*l^{(p)}}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, *jsou při regulární transformaci* (4a) *resp.* (4b) *v* $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ *vázány vztahy*

$$\sum_{i=1}^{p} A_{i,1} \underset{p-i}{*l^{(p)}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A_{p,1} + \underset{p-1}{l^{(p)}} A_{p,p} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau},$$

$$\sum_{i=j}^{p} A_{i,j} \underset{p-i}{*l^{(p)}} = A_{p,j-1} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A_{p,j} + A_{p,p} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \underset{p-j}{l^{(p)}},\ j = 2, \ldots, p, \tag{18}$$

kde $A_{i,j}$ *mají význam z vět pomocných I, II.*

Důkaz: Vyjdeme ze vztahu (6) pro $j = p$. Potom dostáváme, vzhledem k (7), (3),

$$\begin{aligned}
\nabla_\tau \underset{p}{*u^\nu} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{p}{*u^\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \underset{p}{*u^\alpha} \underset{1}{*u^\beta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(\sum_{i=1}^{p} A_{p,i} \underset{i}{u^\nu} \right) + \\
&+ \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \left(\sum_{i=1}^{p} A_{p,i} \underset{1}{u^\alpha} \right) A_{1,1} \underset{1}{u^\beta} = \\
&= \sum_{i=1}^{p} A_{p,i} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{i}{u^\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \underset{i}{u^\alpha} \underset{1}{u^\beta} \right) + \sum_{i=1}^{p} \underset{i}{u^\nu} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A_{p,i} = \\
&= \sum_{i=1}^{p} A_{p,i} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \underset{i+1}{u^\nu} + \sum_{i=1}^{p} \underset{i}{u^\nu} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A_{p,i} = \\
&= \underset{1}{u^\nu} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A_{p,1} + A_{p,p} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \underset{p-1}{l^{(p)}} \right) + \\
&+ \sum_{i=2}^{p} \underset{i}{u^\nu} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A_{p,i} + A_{p,i-1} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} + A_{p,p} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \underset{p-i}{l^{(p)}} \right).
\end{aligned} \tag{19}$$

Na druhé straně dostaneme z (17), dosadíme-li tam za $\underset{i}{*u^\nu}$, $i = 1, 2, \ldots, p$ ze vztahu (6),

$$\nabla_\tau \underset{p}{*u^\nu} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} A_{i,j} \underset{p-i}{*l^{(p)}} \underset{j}{u^\nu} = \sum_{j=1}^{p} \underset{j}{u^\nu} \sum_{i=j}^{p} A_{i,j} \underset{p-i}{*l^{(p)}}. \tag{20}$$

Píšeme-li v (19) místo sčítacího indexu i index j, potom z (19), (20) plyne ihned

$$\underset{1}{u}^{\nu}\left(\sum_{i=1}^{p} A_{i,1}\,\underset{p-i}{{}^*l^{(p)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}A_{p,1} - A_{p,p}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\underset{p-1}{l^{(p)}}\right) +$$

$$+\sum_{j=2}^{p}\underset{j}{u}^{\nu}\left(\sum_{i=j}^{p} A_{i,j}\,\underset{p-i}{{}^*l^{(p)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}A_{p,j} - A_{p,j-1}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} - A_{p,p}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\underset{p-j}{l^{(p)}}\right) = 0.$$

Odtud plyne, vzhledem k tomu, že vektory $\underset{j}{u}^{\nu}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, jsou v uvažovaném oboru lineárně nezávislé (neboť dle předpokladu je křivka třídy p, $1 \leqq p \leqq n$), ihned systém vztahů (18).

Poznámka 4. Z věty 2 plyne ihned, že mezi skaláry $\underset{0}{{}^*l^{(p)}}$, $\underset{0}{l^{(p)}}$ platí transformační vztah

$$A_{p,p}\,\underset{0}{{}^*l^{(p)}} = A_{p,p-1}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}A_{p,p} + A_{p,p}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\underset{0}{l^{(p)}}.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu za $A_{p,p}$, $A_{p,p-1}$ z (9), dostaneme, přihlédneme-li k tomu, že v uvažovaném oboru je $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \neq 0$,

$$\underset{0}{{}^*l^{(p)}} = \frac{p(p-1)}{2}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} + \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2}\,p\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} + \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\underset{0}{l^{(p)}},$$

t. j.

$$\underset{0}{{}^*l^{(p)}} = \frac{p(p+1)}{2}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} + \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\underset{0}{l^{(p)}}. \tag{21}$$

Nyní si můžeme položit otázku, zda je možno najít funkci $\tau = \varphi(t)$, jež by měla v definičním oboru $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ křivky C (jež je dle předpokladu třídy p v A_n, $1 \leqq p \leqq n$) spojité derivace nejméně $(p + 1)$-ho řádu, dále $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \neq 0$ v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ a pro niž by všude v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ bylo $\underset{0}{{}^*l^{(p)}} \equiv 0$. Odpověď nám dává tato věta:

Věta 3. *Budiž C regulární křivka p-té třídy v A_n, daná parametrickými rovnicemi* (1) *s definičním oborem $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Potom existuje nekonečně mnoho funkcí $\tau = \varphi(t)$, definovaných v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, jež mají v tomto intervalu spojité derivace řádu alespoň $p + 1$, při čemž $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \neq 0$ v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ a jež mají tu vlastnost, že vztáhneme-li křivku C ke kterékoliv z těchto funkcí $\tau = \varphi(t)$ v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ jakožto novému parametru, potom*

$$\underset{0}{{}^*l^{(p)}} \equiv 0, \tag{22}$$

při čemž význam symbolu $\underset{0}{{}^*l^{(p)}}$ je patrný ze (17).

Všechny tyto funkce mají tvar

$$\tau = \varphi(t) = C \int e^{\frac{2}{p(p+1)} \int \underset{0}{l}^{(p)}\, \mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t + k,\ C \neq 0, \tag{23}$$

kde $C \neq 0$, k jsou libovolné konstanty.

Důkaz: Nejdříve se přesvědčíme o tom, že všechny funkce tvaru (23) mají vlastnosti ve větě uvedené. Především je z (23) zřejmé, že $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \neq 0$ pro každé t přicházející v úvahu. Použijeme-li formule pro derivaci funkce inversní, snadno se přesvědčíme, že funkce $\varphi(t)$, definované v (23), anulují pravou stranu ((21), a tedy pro ně vyplývá tvrzení (22). Dokážeme o nich ještě, že mají spojité derivace řádu nejméně $p + 1$. Aby funkce $\varphi(t)$, definované v (23), měly spojité derivace alespoň $(p + 1)$-ho řádu, k tomu stačí, jak je patrno z (23), aby skalár $\underset{0}{l}^{(p)}$ měl spojité derivace alespoň $(p - 1)$-ho řádu vzhledem k t v definičním oboru $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Že tomu tak skutečně je, to plyne již z předpokladu, že křivka C je p-té třídy v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$[4]).

Abychom zjistili, že ve (23) jsou podchyceny všechny funkce s vlastnostmi ve větě uvedenými, stačí ukázat, že funkce (23) jsou obecným integrálem diferenciální rovnice

$$\frac{p(p+1)}{2} \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} + \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \underset{0}{l}^{(p)} = 0^{5)} \tag{24}$$

a jiných integrálů pro tuto rovnici v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ při $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \neq 0$ není. Rovnici (24) můžeme psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} = \frac{2}{p(p+1)} \underset{0}{l}^{(p)}$$

kterou, vzhledem k tomu, že předpokládáme $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \neq 0$ v uvažovaném oboru, můžeme dále přepsat

---

[4]) To si ověříme takto: Je-li t libovolný bod z intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, potom z předpokladu, že křivka C je v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ p-té třídy, $(1 \leq p \leq n)$, plyne, že v uvažovaném bodě je aspoň jedna složka p-vektoru z vektorů $\underset{1}{u}^{\alpha}, \underset{2}{u}^{\alpha}, \dots \underset{p}{u}^{\alpha}$ různá od nuly. Budiž to složka $\underset{[1}{u}^{\alpha_1}\underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p]}{u}^{\alpha_p}$. Z (3) plyne pak

$$\underset{[1}{u}^{\alpha_1}\underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p-1}{u}^{\alpha_{p-1}} \nabla_t \underset{p]}{u}^{\alpha_p} = \nabla_t \underset{[1}{u}^{\alpha_1}\underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p]}{u}^{\alpha_p} = \underset{0}{l}^{(p)} \underset{[1}{u}^{\alpha_1}\underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p]}{u}^{\alpha_p},$$

odkud můžeme $\underset{0}{l}^{(p)}$ vyjádřit, neboť $\underset{[1}{u}^{\alpha_1} \dots \underset{p]}{u}^{\alpha_p}$ je v uvažovaném bodě různé od nuly. Především je odtud vidět, že $\underset{0}{l}^{(p)}$ je řádu $p + 1$ vzhledem k t. Odtud a z předpokladů a), b), c), za nichž byla postavena definice křivky p-té třídy, je ihned vidět, že $\underset{0}{l}^{(p)}$ má spojité derivace alespoň $(p - 1)$-ho řádu.

[5]) Viz (21).

$$\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log\left|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{2}{p(p+1)}\underset{0}{l}^{(p)}, \tag{24$^+$}$$

jejímž obecným integrálem jsou právě funkce definované v (23). Tím je důkaz věty proveden.

Poznámka 5. Z předchozí věty je zřejmé, že podmínkou $*\underset{0}{l}^{(p)} \equiv 0$ v uvažovaném oboru není příslušný parametr τ jednoznačně stanoven. Je dán až na afinní transformaci

$$\bar{\tau} = C\tau + k, \quad C \neq 0, \tag{+}$$

kde $C \neq 0$, k jsou libovolné konstanty. Vhodnou volbou počátečních podmínek lze dosáhnout jednoznačnosti.

Věta 4. *Budiž* $\underset{0}{t} \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, *tedy z definičního oboru křivky* C, *jež je* p-*té třídy* $(1 \leqq p \leqq n)$. *Potom počátečními podmínkami*

$$s(\underset{0}{t}) = 0, \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)_{t=\underset{\bullet}{t}} = 1, \tag{25}$$

je v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ *definována jednoznačně funkce* $s = s(t)$ *těchto vlastností:*

1. $s(t)$ *je rostoucí v intervalu* $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, $\underset{1}{t} < \underset{2}{t}$,

2. $s(t)$ *je aditivní funkcí v* $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$,

3. $s(t)$ *má v* $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ *spojité derivace řádu nejméně* $p + 1$.

4. *Označíme-li*

$$\frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s} = \underset{1}{i}^\alpha, \ \nabla_s \underset{k}{i}^\alpha = \underset{k+1}{i}^\alpha, \quad k = 1, 2, \ldots p, \tag{26}$$

potom platí

$$\nabla_s \underset{p}{i}^\alpha = \sum_{k=1}^{p-1} \underset{p-k}{\lambda}^{(p)} \underset{k}{i}^\alpha,^{6)} \tag{27}$$

kde $\underset{p-k}{\lambda}^{(p)}$, $k = 1, \ldots, p - 1$ *jsou skaláry definované tak v bodech křivky* C.

5. *Funkci* $s(t)$ *lze psát ve tvaru*

$$e(t) = \int_{\underset{\bullet}{t}}^{t} e^{\frac{2}{p(p+1)}\int_{\underset{\bullet}{t}}^{t} l^{(p)}\,\mathrm{d}t} \,.\,\mathrm{d}t \tag{28}$$

Důkaz: Funkce $s(t)$, definovaná v (27), vyhovuje počátečním podmínkám (25), jak ihned nahlédneme. Dále je z (28) zřejmé, že $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{p(p+1)}\underset{0}{l}^{(p)}$, t. j. funkce $s(t)$ z (27) vyhovuje dif. rovnici (24)*[7]) a tedy ze systému funkcí

---

[6]) Je-li $p = 1$, pak je součet na pravé straně v (27) prázdný.

[7]) Tedy $\tau \equiv s(t)$ je řešením rovnice (24)* a tedy též (24).

tvaru (23). Podle věty 3 má tedy $s(t)$ spojité derivace řádu aspoň $p + 1$ v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Funkce $s(t)$ má tedy vlastnost 3. Vlastnosti 1., 2. jsou zřejmé z (28).

To, že funkce $s(t)$, definovaná v (28), je při počátečních podmínkách (25) jednoznačným řešením dif. rovnice (24)* resp. (24), plyne ihned z existenčního teorému Cauchyova. Ježto je $s(t)$ tvaru (23), je pak, podle věty 3, v celém definičním oboru $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ splněn vztah (22), což vzhledem k (17), vede ihned ke vztahům (27), při čemž místo dřívějších symbolů $^{*}l^{(p)}_{p-k}$ zavádíme symboly $\lambda^{(p)}_{p-k}$, neboť zde jde o speciální, privilegovaný parametr, pro který v celém uvažovaném definičním oboru křivky C je splněn vztah (22). Tím je celé tvrzení věty dokázáno.

Definice II. *Funkci $s(t)$, definovanou v (28), nazýváme afinním obloukem regulární křivky p-té ($1 \leqq p \leqq n$) v n-rozměrném afinním prostoru A_n, orientovaným od bodu $\underset{0}{t}$ k bodu t ($t > \underset{0}{t}$).*

Věta 5. *Afinní oblouk $s(t)$ a skaláry $\lambda^{(p)}_{p-k}(s)$, $k = 1, 2, \ldots, p - 1$ se transformují při každé regulární transformaci parametru t v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$*[8])

$$\bar t = \bar t(t) \tag{29}$$

takto

$$\bar s(\bar t) = \alpha s(t), \qquad \alpha = \left(\frac{d\bar t}{dt}\right)_{t=t_0} \tag{30a}$$

$$\lambda^{(\bar p)}_{p-k}(\bar t) = \alpha^{k-p-1}\,\lambda^{(p)}_{p-k}(t), \qquad \text{pro } 1 < p \leqq n,\ k = 1,\ 2, \ldots p - 1. \tag{30b}$$

Důkaz. Při regulární transformaci parametru t v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, uvažované v (29) je $\frac{d\bar t}{dt} \neq 0$ v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Zavedeme-li označení $\underset{0}{\bar t} = \bar t(\underset{0}{t})$, potom dostaneme vzhledem k (21), (28)

$$\int_{\bar t_0}^{\bar t} \bar l^{(p)}_0 \, d\bar t = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{p(p+1)}{2} \frac{d^2 t}{d\bar t^2} \left(\frac{dt}{d\bar t}\right)^{-1} + \frac{dt}{d\bar t}\, l^{(p)}_0 \right\} \frac{d\bar t}{dt}\, dt =$$

$$= \frac{p(p+1)}{2} \left[\log \left|\frac{dt}{d\bar t}\right|\right]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} l^{(p)}_0 \, dt$$

a tedy

$$\bar s(\bar t) = \int_{\bar t_0}^{\bar t} e^{\frac{2}{p(p+1)} \int_{\bar t_0}^{\bar t} \bar l^{(\bar p)}_0 \, d\bar t}\, d\bar t = \alpha \int_{t_0}^{t} e^{\frac{2}{p(p+1)} \int_{t_0}^{t} l^{(p)}_0 \, dt}\, dt,$$

---

[8]) Jde neustále o křivku C p-té třídy v A_n s definičním oborem $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, danou parametrickými rovnicemi (1).

tedy $\bar{s}(\bar{t}) = \alpha s(t)$, kde $\alpha = \left(\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_0}$, jak se snadno přesvědčíme. Tím je vztah (30a) dokázán.

Z dokázaného vztahu (30a) plyne ihned

$$\bar{\underset{1}{i}}{}^{\nu} = \frac{\mathrm{d}\xi^{\nu}}{\mathrm{d}\bar{s}} = \frac{\mathrm{d}\xi^{\nu}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\bar{s}} = \alpha^{-1}\underset{1}{i}{}^{\alpha}, \qquad \text{kde } \alpha = \left(\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_0}.$$

Methodou úplné indukce snadno dokážeme, že

$$\bar{\underset{k+1}{i}}{}^{\nu} \equiv \nabla_{\bar{s}}\bar{\underset{k}{i}}{}^{\nu} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\bar{s}}\nabla_{s}\frac{1}{\alpha^{k}}\underset{k}{i}{}^{\nu} = \alpha^{-k-1}\underset{k+1}{i}{}^{\nu}$$

pro $k = 1, 2, \ldots, p$. Pro $k = p > 1$ plyne pak z (31) a z věty 1, přihlédneme-li ke vztahům (27) a větě 3,

$$\bar{\underset{p+1}{i}}{}^{\nu} = \sum_{j=1}^{p-1}\bar{\underset{p-j}{\lambda}}{}^{(p)}\bar{\underset{j}{i}}{}^{\nu} = \alpha^{-p-1}\sum_{j=1}^{p-1}\underset{p-j}{\lambda}{}^{(p)}\underset{j}{i}{}^{\nu}, \tag{31}$$

t. j. podle (31)

$$\sum_{j=1}^{p-1}\bar{\underset{p-j}{\lambda}}{}^{(p)}\alpha^{-j}\underset{j}{i}{}^{\nu} = \alpha^{-p-1}\sum_{j=1}^{p-1}\underset{p-j}{\lambda}{}^{(p)}\underset{j}{i}{}^{\nu},$$

odkud plyne ihned

$$\bar{\underset{p-j}{\lambda}}{}^{(p)} = \alpha^{j-p-1}\underset{p-j}{\lambda}{}^{(p)} \qquad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, p-1,$$

což je vztah (30b).

Poznámka 6. Z věty 5 vyplývá, že jak afinní oblouk $s(t)$, tak skalární veličiny $\underset{p-k}{\lambda}{}^{(p)}$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$ (kteréžto jsou definovány jen při $p > 1$) *nejsou vnitřními veličinami křivky C*, jež je, dle předpokladu křivkou p-té třídy v uvažovaném oboru; citované veličiny nejsou afinními invarianty křivky C, neboť při každé regulární transformaci parametru nejsou invariantní, nýbrž podléhají jednoduchému transformačnímu zákonu (30a, b).

Jako doplněk k definici afinního oblouku uvedeme tuto větu:

Věta 6. *Budiž parametrickými rovnicemi (1) definována regulární křivka C n-té třídy v A_n s definičním oborem $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Nechť $\underset{0}{t}$ je nějaký bod z intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Potom její afinní oblouk (ve smyslu definice II) lze uvést na tvar*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t}\left[\frac{[\underset{1}{u}{}^{\nu}\underset{2}{u}{}^{\nu}\ldots\underset{n}{u}{}^{\nu}]}{Ke^{-\int_{t_0}^{t}\Gamma^{\gamma}_{\gamma\beta}\underset{1}{u}{}^{\beta}\,\mathrm{d}t}}\right]^{\frac{2}{n(n+1)}}\mathrm{d}t,$$

kde $[\underset{1}{u}{}^{\nu}\ldots\underset{n}{u}{}^{\nu}]$ je determinant z vektorů $\underset{i}{u}{}^{\nu}$, $i = 1, \ldots, n$, definovaných v (2a) a K je konstanta různá od nuly, $K = [\underset{1}{u}{}^{\nu}\underset{2}{u}{}^{\nu}\ldots\underset{n}{u}{}^{\nu}]_{t=t_0}$.

Důkaz: Podle formule pro absolutní derivaci multivektoru jest

$$\nabla_t[\underset{1}{u}{}^{\nu},\ldots\underset{n}{u}{}^{\nu}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\underset{1}{u}{}^{\nu},\ldots\underset{n}{u}{}^{\nu}] + [\underset{1}{u}{}^{\nu}\ldots\underset{n}{u}{}^{\nu}]\,\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}\underset{1}{u}{}^{\alpha}\,\mathrm{d}t. \tag{33}$$

Provedeme-li přímo operaci naznačenou na levé straně v (33), dostaneme vzhledem k (3) a vzhledem k tomu, že křivka C je třídy n

$$\nabla_t[\underset{1}{u}^\nu \dots \underset{n}{u}^\nu] = \underset{0}{l}^{(n)} [\underset{1}{u}^\nu, \dots \underset{n}{u}^\nu]. \tag{34}$$

Z (33), (34) plyne ihned vztah

$$\underset{0}{l}^{(n)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log |[\underset{1}{u}^\nu \dots \underset{n}{u}^\nu]| + \Gamma^\beta_{\beta\alpha} \underset{1}{u}^\alpha \,\mathrm{d}t,$$

neboť, ježto je křivka C třídy n, je v celém uvažovaném oboru $[\underset{1}{u}^\nu \dots \underset{n}{u}^\nu] \neq 0$. Integrací poslední rovnice v mezích od $\underset{0}{t}$ do t, kde $t, \underset{0}{t} \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ a ze vztahu (28) (položíme-li tam $p = n$) plyne pak snadno přepis (32) a tím i tvrzení věty.

V dalším budeme uvažovat afinní oblouk regulární křivky C kterékoliv třídy v A_n (tedy libovolné třídy p, $1 \leqq p \leqq n$).

Věta 7. *Budiž C regulární křivka p-té třídy, ($1 \leqq p \leqq n$), v A_n ($n > 1$) s definičním oborem $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, daná parametrickými rovnicemi $\xi^\nu = \xi^\nu(t)$, $\nu = 1, \dots n$. Nechť a, b, c jsou tři pevně zvolená vzájemně různá čísla z intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Nechť $s(t)$ je afinní oblouk křivky C, definovaný v (28)[9]. Potom poměr*

$$d(a, b; c) = \frac{s(a) - s(c)}{s(b) - s(c)} \tag{35}$$

je nezávislý na volbě parametru křivky C.

Poznámka 7. Při pevných číslech a, b, c vzájemně různých ($a, b, c \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$) je tedy dělicí poměr $d(a, b; c)$ invariantní vůči každé regulární transformaci parametru $\bar{t} = \bar{t}(t)$ v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Zřejmě je $s(t)$ skalárem v A_n, definovaným v bodech dané křivky C. Je tedy $d(a, b; c)$ afinním invariantem křivky C.

Důkaz věty 7: Nechť $\underset{0}{t}$ je libovolným bodem z intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, jež je definičním oborem křivky C (která je, dle předpokladu, p-té třídy v A_n). Potom afinní oblouk při této volbě počátečního bodu je dán předpisem (28). Vyjdeme-li od jiného počátečního bodu $*\underset{0}{t} \neq \underset{0}{t}$, $*\underset{0}{t} \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, potom mezi příslušnými afinními oblouky $s(t)$, $*s(t)$ při témže původním parametru platí zřejmě vztah

$$*s(t) - s(t) = \text{konst.}, \tag{36a}$$

kde konst. $= \displaystyle\int_{*t_0}^{t_0} e^{\frac{2}{p(p+1)} \int_{t_0}^{t} \underset{0}{l}^{(p)} \,\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t.$

Jsou-li a, c dva libovolné body z $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, potom podle (36a) je

$$*s(a) - *s(c) = s(a) - s(c). \tag{36b}$$

[9]) Při libovolné volbě „počátečního bodu“ $\underset{0}{t} \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$.

Přihlédneme-li nyní k větě (5) resp. k transformačnímu vztahu (30a), potom z (36b), (30a) plyne ihned tvrzení věty. Jmenovatel na pravé straně v (35) nemůže být pro žádnou dvojici $b \neq c$, $b, c \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, roven nule, ježto $s(t)$ je ryze monotonní v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$.

Poznámka 8. Z vět 3, 5, 7 plyne snadnou úvahou, že poměr $d(a, b; c)$ je nezávislý na tom, jakou funkci $\tau = \varphi(t)$ ze systému (23) vezmeme za parametr křivky C, tedy, kterou z těchto funkcí prohlásíme za afinní oblouk křivky C.

Definice III. *Číslo $d(a, b; c)$, definované v (35), nazýváme dělicím poměrem bodu c vzhledem k základním bodům a, b na křivce $C(a, b, c \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t}), a \neq b \neq c \neq a)$.*

Nyní se budeme zabývat skaláry $\underset{p-k}{\lambda^{(p)}}$, $k = 1, \dots p - 1$, vystupujících ve vztahu (27). Tyto skaláry nejsou afinními invarianty, jak vyplývá ze vztahu (30b). Avšak transformační zákon (30b) je tak jednoduchý, že se dá právem očekávat, že tyto skaláry jsou pro danou křivku p-té třídy v A_n charakteristické. Jejich důležitost vysvitne z následující existenční věty.

Věta 8. *Budiž A_n n-rozměrný afinní prostor v souřadnicích ξ^α $(\alpha = 1, 2, \dots n)$, opatřený symetrickou konexí o koeficientech $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}(\xi^\alpha)$. Budiž ξ^α_0 bod tohoto prostoru takový, že v něm a v jeho určitém n-rozměrném okolí mají funkce $\Gamma^\nu_{\lambda\beta}$ spojité parciální derivace podle proměnných ξ^α nejméně p-tého řádu, kde $1 < p \leqq n$. Budiž dále dáno $p - 1$ funkcí jedné proměnné s, $\varphi_i(s)$ $i = 1, \dots, p - 1$, spojitých v bodě $\underset{0}{s}$ a v určitém jeho okolí. Budiž dále dáno p čísel $(\underset{k}{i^\alpha})_0$, $k = 1, \dots, p$; $\alpha = 1, \dots$ $\dots, n$, takových, že matice*

$$\begin{bmatrix} (\underset{1}{i^1})_0 (\underset{1}{i^2})_0 \dots (\underset{1}{i^n})_0 \\ (\underset{2}{i^1})_0 (\underset{2}{i^2})_0 \dots (\underset{2}{i^n})_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ (\underset{p}{i^1})_0 (\underset{p}{i^2})_0 \dots (\underset{p}{i^n})_0 \end{bmatrix}$$

má hodnost p.

Potom v dostatečně malém okolí bodu ξ^α_0 existuje křivka p-té třídy v A_n s parametrickými rovnicemi

$$\xi^\nu = \xi^\nu(s), \quad \nu = 1, \dots n \tag{37}$$

těchto vlastností:

a) *pro $s = \underset{0}{s}$ je $\xi^\nu(\underset{0}{s}) = \xi^\nu_0$;*

b) *označíme-li*

$$\underset{1}{i^\alpha} = \frac{d\xi^\alpha}{ds}, \quad \underset{k}{i^\alpha} = \nabla_s \underset{k-1}{i^\alpha}, \quad k = 2, \dots, p,$$

potom

$$\underset{k}{i^\alpha}(\underset{0}{s}) = (\underset{k}{i^\alpha})_0, \quad k = 1, \dots, p;$$

c) *parametr s je afinním obloukem této křivky;*
d) *pro křivku* (37) *skalární funkce* $\lambda^{(p)}_{p-k}(s)$, $k = 1, \ldots, p-1$, (*z věty* 4, *vztahů* (27)) *jsou rovny daným funkcím* $\varphi_k(s)$, *t. j.*

$$\lambda^{(p)}_{p-k}(s) \equiv \varphi_k(s), \quad k = 1, \ldots, p-1;$$

e) *ve zmíněném dostatečně malém okolí bodu* ξ^α_0 (*a v něm samém*) *existuje křivka* (37) *s vlastnostmi* a), b), c), d) *jednoznačně.*

Poznámka 9. Věta předchozí říká, že skalární funkce $\lambda^{(p)}_{p-k}$ ze vztahů (27) tvoří tak zvaný úplný systém pro existenci křivky p-té třídy v A_n (lokální existenci), t. j., jsou-li dány předem funkce $\lambda^{(p)}_{p-k}(s)$, $k = 1, \ldots, p = 1$; $1 < p \leqq n$, a je-li dáno nějaké číslo s_0 z definičního oboru těchto funkcí, dále pak počáteční bod ξ^α_0 v A_n a v něm p lineárně nezávislých vektorů, potom, za předpokladů ve větě vyslovených, je těmito podmínkami v dostatečně malém okolí bodu ξ^α_0 jednoznačně definována křivka p-té třídy v A_n.

Důkaz věty 8: Při daném přirozeném p, $1 < p \leqq n$, uvažujme systém diferenciálních rovnic

$$\underset{p+1}{i^\alpha} \equiv \nabla_s \underset{p}{i^\alpha} = \sum_{k=1}^{p-1} \varphi_k(s) \underset{k}{i^\alpha} \text{ [10]}, \tag{38}$$

kde

$$\underset{1}{i^\alpha} \equiv \frac{d\xi^\alpha}{ds}, \; \underset{k}{i^\alpha} \equiv \nabla_s \underset{k-1}{i^\alpha} \quad \text{pro } k = 2, \ldots, p+1. \tag{39a}$$

Zaveďme označení

$$\frac{d\xi^\alpha}{ds} = \underset{1}{v^\alpha}, \; \frac{d}{ds} \underset{k-1}{v^\alpha} = \underset{k}{v^\alpha}, \quad k = 2, \ldots, p+1. \tag{39b}$$

Vektory $\underset{k}{i^\alpha}$ v (39a) můžeme přepsat pomocí veličin $\underset{k}{v^\alpha}$ a koeficientů dané konexe v A_n, resp. jejich parciálních derivací podle ξ^α. Tak dostaneme

$$\underset{1}{i^\alpha} = \underset{1}{v^\alpha}, \tag{40a}$$

$$\underset{2}{i^\alpha} = \underset{2}{v^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \underset{1}{v^\beta} \underset{1}{v^\gamma}, \tag{40b}$$

$$\underset{3}{i^\alpha} = \underset{3}{v^\alpha} + 3\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \underset{2}{v^\beta} \underset{1}{v^\gamma} + (\partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_{\mu\nu}) \underset{1}{v^\mu} \underset{1}{v^\nu} \underset{1}{v^\gamma}. \tag{40c}$$

Snadno bychom nyní methodou úplné indukce dokázali toto tvrzení.

Tvrzení I. *Vektor $\underset{k}{i^\alpha}$ lze přepsat na tvar*

$$\underset{k}{i^\alpha} = \underset{k}{v^\alpha} + \underset{k}{P^\alpha}(\underset{1}{v^\nu}, \underset{2}{v^\nu}, \ldots \underset{k-1}{v^\nu}) \quad \textit{pro } k = 2, \ldots, p+1, \tag{40}$$

[10]) Viz (27).

kde $\underset{k}{P^\alpha}$ je celistvou racionální funkcí v proměnných $\underset{1}{v^\alpha}, \underset{2}{v^\alpha}, \dots, \underset{k-1}{v^\alpha}$, v jejichž koeficientech vystupují v součtech a součinech pouze konstanty, koeficienty konexe a jejich parciální derivace nejvýše (k — 2)-ho řádu[11]).

Všimněme si, že ze vztahů (40a, b, c) a z tvrzení I plyne ihned tento poznatek: Jsou-li dány veličiny $\underset{k}{v^\alpha}$, $k = 1, \dots, p$ a bod ξ^α pevně[12]), pak jsou též vektory $\underset{k}{i^\alpha}$, $k = 1, \dots, p$ pevně jednoznačně stanoveny. Snadno nahlédneme (rovněž z (40a, b, c) a z tvrzení I), že, jsou-li dány pevně vektory $\underset{k}{i^\alpha}$ a bod ξ^α, jsou pak jednoznačně a pevně stanoveny vektory $\underset{k}{v^\alpha}$.

Učiňme nyní tento krok: pevně daným číslům ξ^α_0 a $(\underset{k}{i^\alpha})_0$, $k = 1, \dots, p$, (v předpokladu věty), přiřaďme čísla $(\underset{k}{v^\alpha})_0$ ve smyslu předchozích úvah. Jsou tedy počátečními podmínkami ξ^α_0, $(\underset{k}{i^\alpha})_0$, $k = 1, \dots, p$, ve smyslu hořeního přiřazení jednoznačně stanovena čísla $(\underset{k}{v^\alpha})$, $k = 1, \dots, p$.

Vyslovme nyní další, pro důkaz věty důležité tvrzení:

Tvrzení II. *V dostatečně malé uzavřené oblasti $n(p + 1)$ rozměrné, obsahující uvnitř bod $[\underset{0}{\xi^1}, \dots \underset{0}{\xi^n}, (\underset{1}{v^1})_0, \dots (\underset{1}{v^n})_0, (\underset{2}{v^1})_0, \dots (\underset{p}{v^n})_0]$, mají funkce $\underset{k}{i^\alpha}(\xi^\nu, \underset{1}{v^\nu}, \dots \underset{k}{v^\nu})$ spojité parciální derivace podle svých argumentů ($k = 1, 2, \dots p$).*

Důkaz tohoto tvrzení plyne ihned z tvrzení I a z předpokladu věty.

Vraťme se nyní k systému rovnic (38). Tento systém lze, vzhledem k (39b), (40) přepsat na tvar

$$\underset{p+1}{v^\alpha} = - \underset{p+1}{P^\alpha}(\underset{1}{v^\nu}, \dots \underset{p}{v^\nu}) + \sum_{k=1}^{p-1} \varphi_k(s)(\underset{k}{v^\alpha} + \underset{k}{P^\alpha}(\underset{1}{v^\nu}, \dots \underset{k-1}{v^\nu})). \tag{41}$$

Uvažujme nyní systém $n(p + 1)$ rovnic pro $n(p + 1)$ neznámých funkcí $\xi^\alpha, \underset{1}{v^\alpha}, \dots \underset{p}{v^\alpha}$ s nezávisle proměnnou s

$$\frac{d\xi^\alpha}{ds} = \underset{1}{v^\alpha}, \quad \frac{d}{ds}\underset{k-1}{v^\alpha} = \underset{k}{v^\alpha}, \qquad k = 2, \dots p, \tag{42a}$$

$$\frac{d}{ds}\underset{p}{v^\alpha} = f^\alpha(s, \xi^\nu, \underset{1}{v^\nu}, \underset{2}{v^\nu}, \dots \underset{p}{v^\nu}), \tag{42b}$$

kde

$$f^\alpha \equiv - \underset{p+1}{P^\alpha}(\underset{1}{v^\nu}, \dots \underset{p}{v^\nu}) + \sum_{k=1}^{p-1} \varphi_k(s)(\underset{k}{v^\alpha} + \underset{k}{P^\alpha}(\underset{1}{v^\nu}, \dots \underset{k-1}{v^\nu}))^{13}). \tag{43}$$

Tvrzení III. *Omezíme-li se na dostatečně malou uzavřenou oblast $n(p + 1) + 1$ rozměrnou, obsahující uvnitř bod*

$$[s_0, \xi^1_0, \dots \xi^n_0, (\underset{1}{v^1})_0, \dots (\underset{1}{v^n})_0, \dots (\underset{p}{v^n})_0],$$

---

[11]) Snadný důkaz tohoto tvrzení methodou úplné indukce zde nepodávám.

[12]) ξ^α z oboru, v němž podle předpokladu věty mají funkce $\Gamma^{\alpha\beta}_\gamma$ spojité parciální derivace aspoň p-tého řádu.

potom funkce f^α, definované v (43), jsou v této uzavřené oblasti spojitými funkcemi svých argumentů s, ξ^α, $\underset{1}{v}^\alpha, \dots \underset{p}{v}^\alpha$ a mají v této uzavřené oblasti spojité parciální derivace podle $n(p + 1)$ proměnných $\xi^\alpha, \underset{1}{v}^\alpha, \dots \underset{p}{v}^\alpha$.

Důkaz tohoto tvrzení plyne bezprostředně z tvrzení II a z předpokladu věty, že totiž funkce $\varphi_k(s)$ jsou spojité v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{s}$.

Tvrzení III nám však říká, že funkce f^α, $\alpha = 1, \dots, n$ vyhovují v dostatečně malé uzavřené oblasti, obsahující uvnitř bod $[s_0, \underset{0}{\xi}^1, \dots \underset{0}{\xi}, (\underset{1}{v}^1)_0, \dots \dots (\underset{1}{v}^n)_0, (\underset{2}{v}^1)_0, \dots (\underset{p}{v}^n)_0]$, Lipschitzově podmínce vzhledem k $\xi^\alpha_1, \underset{1}{v}^\alpha, \dots \underset{p}{v}^\alpha$[14]). Platí tedy pro soustavu diferenciálních rovnic (42a, b) existenční teorém Cauchyův (lokálně). Tedy platí tento existenční teorém též pro soustavu ekvivalentní soustavě (42a, b), t. j. pro soustavu (38).

Podle tohoto existenčního teorému existuje tedy (lokálně) křivka C s parametrickými rovnicemi (37), jež prochází předem daným bodem $\xi^\alpha_0 = \xi^\alpha(\underset{0}{s})$ a pro kterou platí v bodě $\underset{0}{s}$

$$(\underset{k}{v}^\alpha)_0 = \underset{k}{v}^\alpha(\underset{0}{s}), \qquad k = 1, \dots, p. \tag{44}$$

Vztahy (44) implikují (podle toho, jak jsme čísla $(\underset{k}{v}^\alpha)_0$ a veličiny $\underset{k}{v}^\alpha$ dříve definovali) následující relace

$$(\underset{k}{i}^\alpha)_0 = \underset{k}{i}^\alpha(\underset{0}{s}), \qquad k = 1, 2, \dots, p. \tag{45}$$

Tím je dokázáno tvrzení a), b) naší věty. Z rovnic (38) je zřejmé, že tato integrální křivka je v uvažovaném dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{s}$ nejvýše p-té třídy v A_n. Ježto vektory $\underset{1}{i}^\alpha, \dots \underset{p}{i}^\alpha$ jsou pak v tomto dostatečně malém okolí spojitými funkcemi proměnné s (jsou totiž, jak plyne z (38), diferencovatelné podle s), je hodnost matice z vektorů $\underset{1}{i}^\alpha, \dots \underset{p}{i}^\alpha$ rovna p též v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{s}$.

Tvrzení c) věty, totiž, že s je afinním obloukem této křivky, plyne ihned z rovnic (38), věty 4 a z poznámky 5 na str. 14. Tvrzení d), jež je jádrem věty, plyne ihned z rovnic (38), z věty 4, vztahů (37). Tvrzení e) je pak z předchozího evidentní. Tím je věta 8 dokázána.

Poznámka 10. Předchozí existenční věta neobsahuje případ křivky prvé třídy v A_n. V tomto případě jde o řešení systému diferenciálních rovnic

$$\nabla_s \underset{1}{i}^\nu = 0,$$

---

[13]) Viz pravou stranu v (41).

[14]) Viz na př. *V. V. Stepanov*: Kurs diferenciálních rovnic (český překlad od *E. Čecha*), Praha 1950, str. 157 shora.

na který lze použít též existenční věty 8, klademe-li v ní $p = 1$ a vynecháme-li předpoklad daných funkcí $\varphi_k(s)$ a škrtneme-li současně tvrzení d) věty 8. Zde jde o známý případ geodetických čar v A_n.

Poznámka 11. Nehledíme-li k jednoduchému případu čar geodetických v A_n, potom, jak z existenční věty 8 a transformačních vztahů (30b) vyplývá, jsou funkce $\underset{p-k}{\lambda^{(p)}}(s)$, $k = 1, \ldots, p - 1$, podstatné důležitosti pro křivku p-té třídy v A_n $(1 < p \leq n)$. Jsou to skaláry charakterisující křivku p-té třídy v A_n, i když nejsou afinními invarianty v tom smyslu, že nejsou invariantní vůči libovolné regulární transformaci parametru křivky. V oboru, kde platí pro diferenciální rovnice (27) existenční věta 8, lze předem danými funkcemi $\underset{p-k}{\lambda^{(p)}}(s)$, $k = 1, \ldots, p$ charakterisovat celou rodinu křivek p-té třídy v A_n. Tak dojdeme ke speciálním rodinám křivek téže třídy v A_n, k rodinám, kde křivky jedné a téže rodiny mají, jakožto různá partikulární řešení daného systému diferenciálních rovnic (38), určité společné vlastnosti, tak zvané *afinní vlastnosti* křivek téže rodiny.

Závěrečná poznámka k článku:

Při sepisování nebylo ani v důkazech použito cizích pramenů. Též symbolika je vlastní. Jednoduché příklady jakožto aplikace předchozí theorie budou uveřejněny později jakožto druhá část práce.

LITERATURA

týkající se afinních pojmů v článku se vyskytujících:

E. Cartan: Sur les variétés à connexion affine (Annales Éc. Norm. sup., t. 40, 1923).

L. Berwald: Differentialinvarianten in der Geometrie (Enz. der Math. Wiss. III. Teil 3, 1923).

W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Berlin, Springer, 1923.

J. A. Schouten - D. J. Struik: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II, Groningen—Batavia, 1938, str. 25—27.

V. Hlavatý: Les courbes de la variété générale à *n* dimensions; Mémorial des sciences mathématiques, Paris 1934, Fascicule LXIII.

ČÁST II.

Několik příkladů z afinní geometrie křivek v E_2

Uvedené příklady jsou jednoduchou aplikací theorie probrané v I. části práce na křivky v dvojrozměrném afinoeukleidovském prostoru. Jde většinou o známé výsledky, které je možno odvodit jednoduchými jinými výpočty. Příklady jsou voleny jednoduché proto, aby na nich právě byla evidentní úloha afinního oblouku v geometrii.

Afinní prostor dvojrozměrný A_2 o koeficientech konexe $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \equiv 0$ se nazývá dvojrozměrným afinním eukleidovským prostorem a je zvykem označovat jej E_2.

Jako velmi jednoduché příklady pro aplikaci theorie rozvedené v I. části práce uvedeme příklady z afinní geometrie křivek v E_2.

Poznamenejme ještě, že geodetickými čarami v afinním eukleidovském prostoru E_n ($n \geq 2$) jsou přímky. Křivka p-té třídy v E_n, $1 < p < n$, je křivkou ležící v p-dimensionální rovinné subvarietě E_p, která leží v E_n. To snadno nahlédneme z definice třídy regulární křivky v A_n, podané v I. části práce. Stačí se tedy omezit při studiu křivek v E_n na studium křivek n-té třídy v E_n.

Příklad 1. *Rodina parabol v E_2.* Definujeme funkci $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ takto:

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} \equiv 0 . \tag{1,1}$$

V tomto případě se diferenciální rovnice (27) redukují na tvar

$$\frac{d^3\xi^\alpha}{ds^3} = 0 , \qquad \alpha = 1, 2 . \tag{1,2}$$

Řešení těchto rovnic jest

$$\xi^\alpha = A^\alpha s^2 + B^\alpha s + C^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2 , \tag{1,3a}$$

kde A^α, B^α, C^α, $\alpha = 1,2$ jsou zcela libovolné konstanty. Podmínka, že hledaná křivka má být druhé třídy v E_2 vede na podmínku

$$A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0 . \tag{1,3b}$$

Rovnice (1,3a) spolu s podmínkou (1,3b) vyjadřují, jak se snadno přesvědčíme, rodinu všech parabol v kartézské rovině.

Jestliže předepíšeme počáteční hodnoty ve smyslu existenční věty 8, pak dostaneme jedinou zcela určitou parabolu jakožto partikulární řešení rovnic (1,2).

Všimněme si ještě toho, že směr $\underset{2}{i^\alpha} \equiv \dfrac{d^2\xi^\alpha}{ds^2}$ je konstantní a v důsledku (1,3b) nenulový. Nazveme-li $\underset{2}{i^\alpha}$ *sdruženým směrem* ke směru $\underset{1}{i^\alpha} \equiv \dfrac{d\xi^\alpha}{ds}$, potom v každém bodě paraboly je vektoru $\underset{1}{i^\alpha}$ přiřazen jeden a týž směr sdružený.

Příklad 2. *Rodina elips v E_2.* Hledejme rodinu křivek druhé třídy v E_2, kde funkce $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ je takto definována

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) \equiv -1 . \tag{2,1}$$

V tomto případě se diferenciální rovnice (27) redukují na tvar

$$\frac{d^3\xi^\alpha}{ds^3} + \frac{d\xi^\alpha}{ds} = 0 , \qquad \alpha = 1, 2 . \tag{2,2}$$

Snadno zjistíme, že řešením systému rovnic (2,2) jsou křivky

$$\xi^\alpha = A^\alpha \sin s + B^\alpha \cos s + C^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2 , \tag{2,3a}$$

kde A^α, B^α, C^α ($\alpha = 1, 2$) jsou libovolné konstanty vázané pouze podmínkou

$$A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0 , \tag{2,3b}$$

což je opět podmínka pro to, aby integrální křivka rovnic (2,2) byla druhé třídy v E_2.

Rovnice (2,3a) spolu s podmínkou (2,3b) popisují, jak se snadno přesvědčíme, rodinu všech elips v kartézské rovině.

Příklad 3. *Rodina hyperbol v E_2.* Definujeme-li

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) \equiv 1 , \tag{3,1}$$

potom se rovnice (27) redukují na tvar

$$\frac{d^3\xi^\alpha}{ds^3} - \frac{d\xi^\alpha}{ds} = 0 , \qquad \alpha = 1, 2 , \tag{3,2}$$

jejichž řešením jsou křivky

$$\xi^\alpha = A^\alpha e^s + B^\alpha e^{-s} + C^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2 ,$$

které můžeme též přepsat na tvar

$$\xi^\alpha = a^\alpha \sinh s + b^\alpha \cosh s + c^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2 , \tag{3,3a}$$

kde a^α, b^α, c^α ($\alpha = 1, 2$) jsou libovolné konstanty vázané podmínkou

$$a^1b^2 - a^2b^1 \neq 0 , \tag{3,3b}$$

kterážto podmínka vyjadřuje, že křivka (3,3a) je druhé třídy v E_2. Snadno se přesvědčíme, že parametrickými rovnicemi (3,3a) spolu s podmínkou (3,3b) je podchycena třída hyperbol v kartézské rovině.

Poznámka 1. Snadno se přesvědčíme, že volba $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = -k$, $k > 0$ je konstanta, vede ke křivkám druhé třídy v E_2 s parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = A^\alpha \sin \sqrt{k}s + B^\alpha \cos \sqrt{k}s + C^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2 ,$$

kde A^α, B^α, C^α ($\alpha = 1, 2$) jsou libovolné konstanty vázané podmínkou $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$. Položíme-li $^*s = \sqrt{k}s$, potom předchozí parametrické rovnice přejdou v rovnici elips v E_2 tvaru (2,3a) a příslušná charakteristická funkce $\underset{1}{{}^*\lambda}$ je pak, podle transformačního vztahu (30b), rovna

$$\overset{(2)}{\underset{1}{{}^*\lambda}} = \frac{1}{(\sqrt{k})^2}\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = -1\,.$$

Tedy číslo -1 charakterisuje skutečně všechny elipsy v E_2. Zcela obdobně si ověříme, že číslo $+1$ charakterisuje všechny hyperboly (větve hyperbol) v E_2. To, že číslo 0 charakterisuje všechny paraboly v rovině, bylo ukázáno v příkladě 1.

Příklad 4. *Definice středu elipsy a hyperboly a středu křivosti.*

Budiž parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(s),\ \alpha = 1, 2,\ s \in J\ (J \text{ — otevřený interval}) \tag{4,1}$$

dána v E_2 křivka druhé třídy v J, při čemž s nechť je její afinní oblouk. Předpokládejme dále, že této křivce příslušná charakteristická funkce $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ je spojitá v J. Budiž $\underset{\circ}{s} \in J$ té vlastnosti, že

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{\circ}{s}) \neq 0\,. \tag{4,2}$$

Z (4,2) a z předpokladu spojitosti funkce $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ v J (jak to vyžaduje existenční teorém 8) plyne, že je $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ různá od nuly v dostatečně malém okolí bodu $\underset{\circ}{s}$. Volme číslo h tak malé, aby bod $\underset{\circ}{s} + h$ byl rovněž z tohoto okolí (při čemž $\underset{\circ}{s} + h \in J$). V bodech $\underset{\circ}{s}$, $\underset{\circ}{s} + h$ křivky (4,2) sestrojme přímky ve směru vektorů $\underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s})$, $\underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s} + h)$. Parametrické rovnice těchto přímek jsou

$$\begin{aligned} x^\alpha(t) &= \xi^\alpha(\underset{\circ}{s}) + \underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s})\, t\,,\\ x^\alpha(t) &= \xi^\alpha(\underset{\circ}{s} + h) + \underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s} + h)\, t\,. \end{aligned} \tag{4,3}$$

Najděme tu hodnotu parametru t, která odpovídá průsečíku přímek (4,3). Pro tuto hodnotu t_h plynou z (4,3) tyto vztahy

$$t_h[\underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s} + h) - \underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s})] = -[\xi^\alpha(\underset{\circ}{s} + h) - \xi^\alpha(\underset{\circ}{s})]\,,\qquad \alpha = 1, 2\,. \tag{4,4}$$

Uvažujme nyní dva podíly

$$\frac{\xi^\alpha(\underset{\circ}{s} + h) - \xi^\alpha(\underset{\circ}{s})}{\underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s} + h) - \underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s})}\,,\qquad \alpha = 1, 2\,. \tag{4,5}$$

Ježto vektor $\underset{2}{i}^\alpha$ má v J derivaci $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\underset{2}{i}^\alpha = \overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}\underset{1}{i}^\alpha$ a ježto ve zmíněném dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{s}$ je $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) \neq 0$ a protože vektor $\underset{1}{i}^\alpha$ není v žádném bodě intervalu J vektorem nulovým, potom aspoň pro jeden podíl v (4,5) je jmenovatel různý od nuly a tedy příslušný podíl má smysl. Nechť α je onen pevný index, pro který podíl (4,5) má smysl. Potom jsou zřejmě splněny podmínky pro druhou větu o střední hodnotě, takže můžeme psát

$$\frac{\xi^\alpha(\underset{0}{s} + h) - \xi^\alpha(\underset{0}{s})}{\underset{2}{i}^\alpha(\underset{0}{s} + h) - \underset{2}{i}^\alpha(\underset{0}{s})} = \frac{\underset{1}{i}^\alpha(\underset{0}{s} + \Theta h)}{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{0}{s} + \Theta h)\, \underset{1}{i}^\alpha(\underset{0}{s} + \Theta h)}, \quad 0 < \Theta < 1 .$$

Odsud a z (4,4) plyne

$$t_h = - \frac{1}{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{0}{s} + \Theta h)}, \quad 0 < \Theta < 1 . \tag{4,6}$$

Dosazením z (4,6) do první z rovnic (4,3) dostaneme pro souřadnice hledaného průsečíku

$$x^\alpha(t_h) = \xi^\alpha(\underset{0}{s}) - \{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{0}{s} + \Theta h)\}^{-1}\, \underset{2}{i}^\alpha(\underset{0}{s}), \qquad \alpha = 1, 2 . \tag{4,7}$$

Necháme-li nyní bod $\underset{0}{s} + h$ konvergovat k bodu $\underset{0}{s}$, potom přechodem k limitě $\to 0$) dostaneme

$$x^\alpha(\underset{0}{s}) = \lim_{h \to 0} x^\alpha(t_h) = \xi^\alpha(\underset{0}{s}) - \{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{0}{s})\}^{-1}\, \underset{2}{i}^\alpha(\underset{0}{s}), \qquad \alpha = 1, 2 .$$

Výsledek můžeme stručně vysloviti takto:

1°. *Ke každému bodu křivky* (4,1) *lze přiřadit za předpokladů shora vyslovených, bod o souřadnicích*

$$x^\alpha(s) = \xi^\alpha(s) - \{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}\}^{-1}\, \underset{2}{i}^\alpha(s), \qquad \alpha = 1, 2 . \tag{4,8}$$

Toto přiřazení je jednoznačné a nezávislé na volbě parametru křivky.

Nezávislost bodu $x^\alpha(s)$ na volbě parametru plyne ihned z transformačních vztahů (30b), (31).

Bod $x^\alpha(s)$, definovaný v (4,8), nazýváme ***středem křivosti křivky*** příslušným k bodu s.

Z 1° a ze vztahů (30b), (31) plyne ihned:

2°. *Vektor*

$$n^\alpha(s) \equiv - \{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)\}^{-1}\, \underset{2}{i}^\alpha(s) \tag{4,9}$$

je nezávislý na transformaci parametru křivky.

Poznámka 2. Bod křivky druhé třídy v E_2, v němž je $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = 0$, budeme nazývat bodem ***parabolickým*** na křivce. V takovém bodě není ovšem vektor n^α definován.

Vektor $\underset{2}{i}^\alpha(s)$ (s je afinní oblouk) budeme nazývat *směrem sdruženým* ke směru $\underset{1}{i}^\alpha$.

Z předcházejících definic a vztahů (4,8) odvodíme dvě tvrzení, týkající se rodin křivek z příkladů 2,3.

3°. *Všem bodům elipsy v* E_2 *odpovídá jediný společný střed křivosti, jímž procházejí všechny přímky*

$$x^\alpha(t) = \xi^\alpha(s) + n^\alpha(s)\,t\,, \qquad \alpha = 1, 2\,. \tag{4,10}$$

(t. j. přímky ve směru $\underset{2}{i}^\alpha(s)$ *vedené bodem* $\xi^\alpha(s)$*). Stejné tvrzení platí pro hyperbolu.*

Důkaz. Pro elipsu je podle (2,3a)

$$\xi^\alpha = A^\alpha \sin s + B^\alpha \cos s + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,, \tag{4,11}$$

při čemž $A^\alpha, B^\alpha, C^\alpha$ jsou libovolné konstanty vázané podmínkou $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$; s je afinní oblouk. Z (4,11) plyne ihned

$$\underset{2}{i}^\alpha = -A^\alpha \sin s - B^\alpha \cos s = -\xi^\alpha + C^\alpha\,. \tag{4,12}$$

Dosadíme-li z (4,11), (4,12) do (4,8) a uvážíme-li, že pro elipsu (4,11) je podle (2,1) $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} \equiv -1$, dostaneme

$$x^\alpha(s) = C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,,$$

pro každou hodnotu s. Ježto bod $x^\alpha(s)$ leží na přímce jdoucí bodem $\xi^\alpha(s)$ mající, směr $\underset{2}{i}^\alpha(s)$, je zbývající část tvrzení 3° pro elipsu evidentní. Pro hyperbolu probíhá důkaz obdobně.

4°. *Nechť parametrickými rovnicemi*

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(s)\,, \qquad s \in (-\infty, \infty) \tag{4,13}$$

je definována v E_2 *regulární křivka druhé třídy v celém svém definičním oboru. Nechť* s *je její afinní oblouk a* $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ *jí příslušná charakteristická funkce, o níž budeme předpokládat, že je v* $(-\infty, \infty)$ *derivace schopná. Potom nutná a postačující podmínka pro to, aby pro křivku (4,13) uvedených vlastností existoval jediný střed křivosti,*[1]) *jest: křivka je buď elipsa nebo hyperbola.*

Důkaz: Postačitelnost podmínky věty je vyslovena tvrzením 3°. Nutnost podmínky věty si ověříme takto: uvažme nejdříve, že má-li mít křivka požadovanou vlastnost, potom v žádném bodě této křivky nemůže být $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}$ rovno nule (ježto v takovém případě by příslušný střed křivosti nebyl vůbec definován, jak

[1]) společný všem bodům křivky.

je vidět z (4,8)). Musí být tedy nutně $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} \neq 0$ v $(-\infty, \infty)$. Podle předpokladu věty je $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}$ spojitou funkcí parametru s v $(-\infty, \infty)$; má tedy $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}$ v $(-\infty, \infty)$ totéž znamení (tedy buď $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} > 0$ v $(-\infty, \infty)$ nebo $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} < 0$ v $(-\infty, \infty)$). Podmínka, že existuje jediný střed křivosti pro každé $s \in (-\infty, \infty)$, vede podle (4,8) k podmínce

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\xi^\alpha(s) - \frac{1}{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}}\underset{2}{i}^\alpha(s)\right\} \equiv 0 \qquad (s \in (-\infty, \infty)) .$$

Provedeme-li naznačenou operaci, dospějeme (vzhledem k (27)) k podmínce

$$\underset{2}{i}^\alpha(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} \equiv 0 , \qquad s \in (-\infty, \infty) .$$

Ježto předpokládáme, že křivka je druhé třídy v E_2, nemůže být v žádném bodě $\underset{2}{i}^\alpha$ vektorem nulovým. Poslední vztah se tedy redukuje na $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\overset{(2)}{\underset{(1)}{\lambda}} \equiv 0$, t. j. $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} =$ $=$ *konstanta* v $(-\infty, \infty)$. Z hořejších úvah je zřejmé, že tato konstanta nemůže být rovna nule. Je tedy buď větší než nula a křivka je pak hyperbola, nebo menší než nula a křivka je v tomto případě elipsou. To plyne z poznámky 1.

Poznámka 3. Do kategorie křivek s jediným středem křivosti mohli bychom zahrnout též parabolu, kdybychom připustili pojem nevlastního středu křivosti. Tento pojem však nezavádíme.

Poznámka 4. Tvrzení 4° ukazuje, že rodina elips a rodina hyperbol jsou jakési privilegované křivky v E_2. Jediný střed křivosti těchto křivek nazýváme prostě jejich středem.

Příklad 5. *Frenetovy formule pro křivku druhé třídy v* E_2.

Nechť parametrickými rovnicemi $\xi^\alpha = \xi^\alpha(s)$, $\alpha = 1, 2$, je dána křivka druhé třídy v E_2, při čemž s je její afinní oblouk, $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$ definiční interval. Předpokládejme, že na uvažované křivce neleží žádný parabolický bod. Dále předpokládejme, že křivce příslušná charakteristická funkce $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ má v intervalu $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$ spojitou derivaci. Pak je tedy v $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$ buď $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) > 0$ nebo $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) < 0$.

Označme

$$\varepsilon = \text{signum}\,\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) , \qquad s \in (\underset{1}{s}, \underset{2}{s})^{2)} \tag{5,1}$$

[2]) tedy $\varepsilon = 1$, je-li $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} > 0$, $\varepsilon = -1$, je-li $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} < 0$.

a zaveďme na dané křivce nový parametr

$$\sigma = \int_{s_0}^{s} \sqrt{|\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}(s)|}\, \mathrm{d}s\,. \tag{5,2}$$

Označíme-li

$$t^{\alpha} \equiv \frac{\mathrm{d}\xi^{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma} \tag{5,3}$$

a značí-li $\underset{1}{i}^{\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}\xi^{\alpha}}{\mathrm{d}s}$ (jako v předchozích příkladech), potom mezi vektory $\underset{1}{i}^{\alpha}$, t^{α} platí vztah

$$t^{\alpha} = |\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}|^{-\frac{1}{2}}\, \underset{1}{i}^{\alpha}\,. \tag{5,4}$$

Z (5,4) plyne pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} t^{\alpha} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon |\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}|^{-2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}\right) \underset{1}{i}^{\alpha} + |\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}|^{-1}\, \underset{2}{i}^{\alpha}.$$

Zavedeme-li ještě označení (viz (4,9))

$$n^{\alpha}(s) = -\{\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}\}^{-1}\, \underset{2}{i}^{\alpha}(s) = -\,\varepsilon |\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}|^{-1}\, \underset{2}{i}^{\alpha}(s)\,, \tag{5,5}$$

můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} t^{\alpha} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon\, |\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}|^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}\right) t^{\alpha} - \varepsilon n^{\alpha}\,. \tag{5,6}$$

Z (5,5) plyne dále derivováním podle σ

$$\frac{d}{\mathrm{d}\sigma} n^{\alpha} = -\,t^{\alpha} + \varepsilon \underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}{}' |\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}|^{-\frac{3}{2}}\, n^{\alpha}\,, \qquad \underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}{}' \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}\,. \tag{5,7}$$

Zavedeme-li pro stručnost označení

$$\varrho(s) = \varepsilon \underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}\, |\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}|^{-\frac{3}{2}}\,, \tag{5,8}$$

můžeme (5,6), (5,7) psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} t^{\alpha} = -\tfrac{1}{2}\varrho t^{\alpha} - \varepsilon n^{\alpha}\,, \tag{5,9a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} n^{\alpha} = -\,t^{\alpha} + \varrho n^{\alpha}\,. \tag{5,9b}$$

Platí nyní tato věta:

5°. *Vektory t^{α}, n^{α} a skalární funkce ϱ jsou nezávislé na volbě parametru křivky shora uvažované.*

Důkaz této věty plyne bezprostředně z definičních vztahů (5,4), (5,5), (5,8) a z transformačních rovnic (30a, b), (31).

Jsme nyní oprávněni vyslovit tuto definici: *Vektory t^{α}, n^{α} nazýváme v tomto pořadí normalisovaným tečným, normalisovaným normálním vektorem křivky* *druhé třídy v jejím neparabolickém bodě. Skalár $\varrho(s)$ nazýváme křivostí křivky druhé třídy v E_2 v jejím neparabolickém bodě.* Vztahy (5,9a, b) nazveme *Frenetovými formulemi* pro křivku druhé třídy v E_2 v jejím neparabolickém bodě.

Poznámka 5. Pro elipsu mají Frenetovy formule tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} t^\alpha = n^\alpha, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} n^\alpha = -t^\alpha \qquad (\varrho = 0),$$

jak plyne ihned z (5,9a, b) a (2,1). Pro hyperbolu pak — podle (5,9a, b) a (2,1) — platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} t^\alpha = -n^\alpha, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} n^\alpha = -t^\alpha \qquad (\varrho = 0).$$

Příklad 6. *Afinní styk křivek.* Buďtež C_1, C_2 dvě křivky druhé třídy v E_2 popsané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} C_1&: \ \xi^\alpha = \xi^\alpha(s), \\ C_2&: \ \bar{\xi}^\alpha = \bar{\xi}^\alpha(\bar{s}), \end{aligned} \tag{6,1}$$

o nichž budeme předpokládat:

a) s je afinním obloukem křivky C_1, $\bar{s}$ je afinním obloukem křivky C_2;

b) křivky C_1, C_2 mají společný bod, odpovídající u křivky C_1 hodnotě parametru $s = 0$, pro křivku C_2 hodnotě parametru $\bar{s} = 0$;

c) funkce $\xi^\alpha(s)$, $\bar{\xi}^\alpha(\bar{s})$ jsou v dostatečně malém okolí bodu $s = \bar{s} = 0$ funkcemi analytickými;

d) charakteristické funkce $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$, $\overline{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}}(\bar{s})$, příslušné v tomto pořadí křivkám C_1, C_2, jsou ve společném bodě (odpovídajícím hodnotě $s = \bar{s} = 0$) různé od nuly.

Poznámka 6. Mají-li křivky C_1, C_2 společný bod a jsou-li vztaženy k libovolným parametrům (tedy ne nutně ke svým afinním obloukům), potom lze vždy zařídit, aby platily předpoklady a), b). To plyne z předpokladu, že křivky jsou druhé třídy v E_2 a z poznámky 5, rovnice (*) v prvé části práce.

Volme nyní $\underset{\circ}{s} = \underset{\circ}{\bar{s}}$ tak malé, abychom zůstali v takovém okolí bodu $s = \bar{s} = 0$, kde platí předpoklad c). Definujme nyní:

Definice. *Křivky C_1, C_2 mají ve společném bodě $s = \bar{s} = 0$ afinní styk nejméně q-tého řádu, jestliže platí*

$$\lim_{\underset{\circ}{s} \to 0} \frac{\xi^\alpha(\underset{\circ}{s}) - \bar{\xi}^\alpha(\underset{\circ}{s})}{\underset{\circ}{s}^p} = 0 \quad \text{pro} \quad p = 1, \ldots, q. \tag{6,2}$$

Z předchozí definice plyne věta:

6°. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby křivky* (6,1) *měly ve společném bodě $s = \bar{s} = 0$ afinní styk nejméně q-tého řádu* ($q = 1, 2, 3, 4$), *jest:*

pro

$$
\begin{aligned}
&1)\ q = 1:\ \underset{1}{i^\alpha}(0) = \underset{1}{\bar{i}^\alpha}(0)\,;\\
&2)\ q = 2:\ \underset{1}{i^\alpha}(0) = \underset{1}{\bar{i}^\alpha}(0),\ \underset{2}{i^\alpha}(0) = \underset{2}{\bar{i}^\alpha}(0);\\
&3)\ q = 3:\ t^\alpha(0) = \bar{t}^\alpha(0),\ n^\alpha(0) = \bar{n}^\alpha(0);\\
&4)\ q = 4:\ t^\alpha(0) = \bar{t}^\alpha(0),\ n^\alpha(0) = \bar{n}^\alpha(0),\ \varrho(0) = \bar{\varrho}(0).
\end{aligned}
\tag{6,3}
$$

Důkaz: Z předpokladu c) plyne

$$
\underset{\circ}{\xi^\alpha}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underset{\circ}{s^k}}{k!} \left(\frac{\mathrm{d}^k \xi^\alpha}{\mathrm{d}s^k}\right)_{s=0},
$$

$$
\underset{\circ}{\bar{\xi}^\alpha}(s) = \underset{\circ}{\bar{\xi}^\alpha}(\bar{s}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underset{\circ}{s^k}}{k!} \left(\frac{\mathrm{d}^k \bar{\xi}^\alpha}{\mathrm{d}\bar{s}^k}\right)_{\bar{s}=0}
$$

a tedy

$$
\underset{\circ}{\xi^\alpha}(s) - \underset{\circ}{\bar{\xi}^\alpha}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underset{\circ}{s^k}}{k!} \left\{\left(\frac{\mathrm{d}^k \xi^\alpha}{\mathrm{d}s^k}\right)_{s=0} - \left(\frac{\mathrm{d}^k \bar{\xi}^\alpha}{\mathrm{d}\bar{s}^k}\right)_{\bar{s}=0}\right\}.
$$

Podmínka (6,2) implikuje

$$
\left(\frac{\mathrm{d}^k \xi^\alpha}{\mathrm{d}s^k}\right)_{s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}^k \bar{\xi}^\alpha}{\mathrm{d}\bar{s}^k}\right)_{\bar{s}=0} \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, q \tag{6,4}
$$

a též obráceně, t. j. (6,4) $\Rightarrow$ (6,2).

Případy $(6,3_1)$, $(6,3_2)$ plynou bezprostředně z definičních rovnic (26) a podmínek (6,4).

Pro $q = 3$ platí podle (26), (6,4), $(6,3_1)$, $(6,3_2)$

$$
\underset{1}{i^\alpha}(0) = \underset{1}{\bar{i}^\alpha}(0)\,, \qquad \underset{2}{i^\alpha}(0) = \underset{2}{\bar{i}^\alpha}(0)\,, \qquad \underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}(0)\,\underset{1}{i^\alpha}(0) = \underset{1}{\overset{\overline{(2)}}{\lambda}}(0)\,\underset{1}{\bar{i}^\alpha}(0)\,,
$$

kteréžto podmínky můžeme přepsat na ekvivalentní systém podmínek

$$
\underset{1}{i^\alpha}(0) = \underset{1}{\bar{i}^\alpha}(0)\,, \qquad \underset{2}{i^\alpha}(0) = \underset{2}{\bar{i}^\alpha}(0)\,, \qquad \underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}(0) = \underset{1}{\overset{\overline{(2)}}{\lambda}}(0)\,, \tag{6,5}
$$

který, vzhledem k definičním vztahům (5,3), (5,5) vede k podmínkám $(6,3_3)$.

Pro $q = 4$ platí jednak podmínky $(6,3_3)$, jednak, podle (6,4), podmínka

$$
\left(\frac{\mathrm{d}^4 \xi^\alpha}{\mathrm{d}s^4}\right)_{s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}^4 \bar{\xi}^\alpha}{\mathrm{d}\bar{s}^4}\right)_{\bar{s}=0},
$$

kterou, jak se snadno přesvědčíme z (27), můžeme přepsat na tvar

$$
\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}\right)_{s=0} \underset{1}{i^\alpha}(0) + \underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}(0)\,\underset{2}{i^\alpha}(0) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{s}}\underset{1}{\overset{(2)}{\bar{\lambda}}}\right)_{\bar{s}=0} \underset{1}{\bar{i}^\alpha}(0) + \underset{1}{\overset{\overline{(2)}}{\lambda}}(0)\,\underset{2}{\bar{i}^\alpha}(0)\,. \tag{6,6}
$$

Z předpokladu lineární nezávislosti vektorů $\underset{1}{i^\alpha}, \underset{2}{i^\alpha}$ (neboť jde o křivku druhé třídy) a z platnosti vztahů (6,5), jež jsou ekvivalentní s $(6,3_3)$, plyne pak z (6,6) — vedle podmínek (6,5) — navíc podmínka

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{s}}\overset{(2)}{\underset{1}{\bar{\lambda}}}\right)_{\bar{s}=0} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}\right)_{s=0}. \tag{6,7}$$

Podmínky (6,5) jsou pak ekvivalentní podmínkám $(6,3_3)$, podmínka (6,7) spolu s podmínkou třetí v (6,5) vede — podle (5,8) — k podmínce

$$\varrho(0) = \bar{\varrho}(0)\,. \tag{6,8}$$

Zřejmě je podmínka (6,8) spolu s podmínkami $(6,3_3)$ ekvivalentní podmínkám (6,5), (6,7), jak snadno nahlédneme.

Poznámka 7. Z $(6,3)_{3,4}$ je vidět, že v podmínkách afinního styku 3. a 4. řádu vystupují pouze veličiny nezávislé na volbě parametru křivky.

Příklad 7. V tomto příkladě uvedeme jednoduchou aplikaci theorie z příkladu 6.

Definice: *Kuželosečku, která má s danou křivkou styk (afinní) třetího řádu, budeme nazývat oskulační kuželosečkou křivky v uvažovaném bodě.*

Uvažujme nyní tři případy:

A) Nechť C_1 je křivka druhé třídy v E_2 s parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(s)\,, \qquad \alpha = 1, 2\,, \tag{7,1a}$$

kde s je její afinní oblouk a která má za definiční obor nějaký interval $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$ obsahující bod $s = 0$. Nechť v bodě $s = 0$ platí

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} < 0\,. \tag{7,1b}$$

Položme si za úkol stanovit elipsu, jež má v bodě $s = 0$ s danou křivkou afinní styk 3. řádu.

Pišme, podle (2,3a), parametrické rovnice příslušné elipsy ve tvaru

$$\bar{\xi}^\alpha(s) = A^\alpha \sin\bar{s} + B^\alpha \cos\bar{s} + C^\alpha\,.^{3)} \tag{7,2}$$

Pro elipsu (7,2) spočteme vektory $\bar{t}^\alpha$, $\bar{n}^\alpha$ v bodě $s = \bar{s} = 0$. Podle (2,3a), (2,1) a (7,2) dostaneme

$$\underset{1}{\bar{i}^\alpha}(\bar{s}) = A^\alpha \cos\bar{s} - B^\alpha \sin\bar{s}\,,$$

$$\underset{2}{\bar{i}^\alpha}(\bar{s}) = -A^\alpha \sin\bar{s} - B^\alpha \cos\bar{s}\,, \qquad \overset{(2)}{\underset{1}{\bar{\lambda}}} \equiv -1$$

a tedy

$$\underset{1}{\bar{i}^\alpha}(0) = A^\alpha\,, \qquad \underset{2}{\bar{i}^\alpha}(0) = -B^\alpha\,, \qquad \overset{(2)}{\underset{1}{\bar{\lambda}}}(0) = -1\,.$$

---

[3]) Bereme tedy pro elipsu parametr $\bar{s}$, jenž je jejím afinním obloukem.

Dosadíme-li odtud do definičních rovnic (5,4), (5,5), dostaneme

$$\bar{t}^\alpha(0) = A^\alpha\,, \qquad \bar{n}^\alpha(0) = -B^\alpha\,. \tag{7,3}$$

Tedy podmínka, aby elipsa (7,2) měla s křivkou (7,1a) v bodě $s = 0$ styk třetího řádu, vede na podmínky (podle $(6,3_3)$)

$$\xi^\alpha(0) = B^\alpha + C^\alpha\,, \qquad t^\alpha(0) = A^\alpha\,, \qquad n^\alpha(0) = -B^\alpha\,.$$

Dosadíme-li odsud do (7,2), dostaneme rovnice hledané oskulační elipsy

$$\bar{\xi}^\alpha(s) = \xi^\alpha(0) + t^\alpha(0)\sin s - n^\alpha(0)\,(\cos s - 1)\,.$$

Je-li $\underset{0}{s}$ libovolným bodem křivky (7,1a), v němž $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{0}{s}) < 0$, dostaneme snadno pro hledanou elipsu parametrické vyjádření (píšeme-li místo $\bar{\xi}^\alpha(s)$ symbol $\xi^\alpha_e(s)$)

$$\xi^\alpha_e(s) = \xi^\alpha(\underset{0}{s}) + t^\alpha(\underset{0}{s})\sin(s - \underset{0}{s}) + n^\alpha(\underset{0}{s})(1 - \cos(s - \underset{0}{s}))\,, \qquad \alpha = 1, 2\,. \tag{7,4}$$

Poznámka 8. A) Je-li daná křivka (7,1a) elipsou o rovnicích (7,2), potom, jak se snadno přesvědčíme, splývá oskulační elipsa v každém jejím bodě s danou elipsou (7,2), což samozřejmě očekáváme.

B) Nechť C_2 je křivka druhé třídy v E_2 s parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(s)\,, \qquad \alpha = 1, 2\,, \tag{7,5a}$$

kde s je její afinní oblouk a která má za definiční obor nějaký otevřený interval $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$, obsahující bod $s = 0$. Nechť v bodě $s = 0$ platí

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(0) > 0\,. \tag{7,5b}$$

Vytkněme si za úkol stanovit hyperbolu, která má v bodě $s = 0$ styk s křivkou (7,5a) třetího řádu. Pišme, podle (3,3a) rovnice příslušné hyperboly ve tvaru

$$\xi^\alpha_h = A^\alpha \sinh s + B^\alpha \cosh s + C^\alpha\,. \tag{7,6}$$

Pro hyperbolu (7,6) je podle (3,1)

$$\underset{1}{i^\alpha_h}(0) = A^\alpha\,, \qquad \underset{2}{i^\alpha_h}(0) = B^\alpha\,, \qquad \overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(0) = 1\,.$$

Dosadíme-li odsud do definičních rovnic (5,4), (5,5) dostaneme

$$t^\alpha_h(0) = A^\alpha\,, \qquad n^\alpha_h(0) = -B^\alpha\,. \tag{7,7}$$

Tedy podmínka, aby hyperbola (7,6) měla s danou křivkou v bodě $s = 0$ styk řádu třetího, vede — podle $(6,3_3)$ — na podmínky

$$\xi^\alpha(0) = B^\alpha + C^\alpha\,, \qquad t^\alpha(0) = A^\alpha\,, \qquad n^\alpha(0) = -B^\alpha\,.$$

Odsud a z (7,6) plynou pak rovnice hledané hyperboly

$$\xi^\alpha_h(s) = \xi^\alpha(0) + t^\alpha(0)\sinh s + n^\alpha(0)(1 - \cosh s)\,.$$

Je-li $\underset{\circ}{s}$ libovolným bodem křivky (7,5a), kde $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{\circ}{s}) > 0$, dostaneme snadno pro hledanou hyperbolu z předchozího vyjádření

$$\xi^\alpha_h(s) = \xi^\alpha(\underset{\circ}{s}) + t^\alpha(\underset{\circ}{s}) \sinh(s - \underset{\circ}{s}) + n^\alpha(\underset{\circ}{s})(1 - \cosh(s - \underset{\circ}{s}))\,. \tag{7,8}$$

Hyperbola s parametrickými rovnicemi (7,8) je hledaná oskulační hyperbola křivky (7,5a) v bodě $\underset{\circ}{s}$.

Poznámka 9. Analogicky k poznámce 8 můžeme v případě, že daná křivka (7,5a) je hyperbolou, snadno se přesvědčit, že oskulační hyperbola v každém jejím bodě s ní splyne.

Poznámka 10. Předpoklad d) učiněný o křivkách C_1, C_2 na počátku příkladu 6 byl pro definici styku dvou křivek nepodstatný. Podstatné předpoklady jsou a), b), c).

Je-li na příklad C křivka druhé třídy v E_2 s parametrickými rovnicemi $\xi^\alpha = \xi^\alpha(s)$, $\alpha = 1, 2$, kde s je její afinní oblouk a která má za definiční obor nějaký interval $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$ a je-li $s = 0$ z intervalu $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$ takový, že $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(0) = 0$, potom je možno jednoznačně určit parabolu, která má s křivkou C v tomto bodě styk třetího řádu. Pro rovnice této, tak zvané oskulační paraboly, dostaneme snadno z podmínek (6,5)

$$\xi^\alpha_p(s) = \tfrac{1}{2}\underset{2}{i}^\alpha(0)\, s^2 + \underset{1}{i}^\alpha(0)\, s + \xi^\alpha(0)\,, \qquad \alpha = 1, 2\,.$$

Je-li $s = \underset{\circ}{s}$ libovolným bodem z intervalu $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$, v němž $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{\circ}{s}) = 0$, potom parametrické rovnice oskulační paraboly v $\underset{\circ}{s}$ jsou

$$\xi^\alpha_p(s) = \tfrac{1}{2}\underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s})(s - \underset{\circ}{s})^2 + \underset{1}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s})(s - \underset{\circ}{s}) + \xi^\alpha(\underset{\circ}{s})\,, \tag{7,9}$$

jak se snadno přesvědčíme.

Kdyby daná křivka byla parabolou, pak v každém jejím bodě je oskulační parabola s danou parabolou identická.

Výsledky z příkladu 6 můžeme stručně shrnout takto:

7°. *Budiž C křivka druhé třídy v E_2. Potom v každém jejím bodě je jednoznačně určena oskulační kuželosečka, a to:*

a) *elipsa, je-li $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} < 0$ v tomto bodě,*

b) *hyperbola, je-li $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} > 0$ v tomto bodě,*

c) *parabola, je-li $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = 0$ v tomto bodě.*

Tím je dána základní klasifikace bodů na regulární křivce druhé třídy v E_2. Body, v nichž $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} < 0$, nazýváme eliptickými, body, v nichž $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} > 0$ nazýváme hyperbolickými, body, v nichž $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = 0$ jsou pak parabolické body na dané křivce.

Příklad 8. V příkladě 5 byl definičním vztahem (5,8) zaveden pro neparabolické body křivky druhé třídy v E_2 invariant ϱ.

Položíme-li si nyní otázku najít v E_2 křivky druhé třídy, pro něž

$$\varrho = \text{konstanta}\,, \tag{8,1}$$

potom dojdeme k jednoduchým speciálním rovinám křivek druhé třídy v E_2.

Podrobný rozbor je poměrně snadný, avšak pracný. Ve výsledcích dojdeme k této klasifikaci:

A) Případ $\varrho \equiv 0$. Ježto předpokládáme $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} \neq 0$, vedou tyto podmínky k známému případu tříd hyperbol a elips v E_2, jak snadno vyplývá z (5,8) a příkladů 1, 2.

B) Případ $\varrho = k$ (konstanta) $\neq 0$, $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) > 0$. V tomto případě je třeba ještě rozeznávat:

a) $|k| \neq \sqrt{2}$ $(k \neq 0)$. V tomto případě dojdeme k rovině křivek druhé třídy v E_2, které se dají popsat parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha(t) = A^\alpha t^a + B^\alpha t + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,; \qquad t > 0\,, \tag{8,2a}$$

kde A^α, B^α, C^α, $\alpha = 1, 2$ jsou libovolné konstanty, $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$, při čemž

$$a \in (-\infty, -1) \text{ resp. } a \in (-1, 0), \text{ resp. } a \in (0, \tfrac{1}{2}), \text{ resp. } a \in (2, \infty)\,. \tag{8,2b}$$

b) $|k| = \sqrt{2}$. V tomto případě lze parametrické rovnice hledaných křivek uvést na jeden z těchto tvarů:

I.

$$\xi^\alpha(s) = A^\alpha s^3 + B^\alpha \log s + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,, \qquad s > 0\,, \tag{8,4a}$$

kde A^α, B^α, C^α, $\alpha = 1, 2$ jsou konstanty vázané pouze podmínkou $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$.

II.

$$\xi^\alpha(t) = {}^*A^\alpha t + {}^*B^\alpha \log_a t + {}^*C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,, \qquad t > 0\,, \tag{8,4b}$$

kde a je nějaké nezáporné číslo, $a \neq 1$ a ${}^*A^\alpha$, ${}^*B^\alpha$, ${}^*C^\alpha$ jsou libovolné konstanty ${}^*A^1{}^*B^2 - {}^*A^2{}^*B^1 \neq 0$.

III.
$$\xi^\alpha(t) = \bar{A}^\alpha e^\tau + \bar{B}^\alpha \tau + \bar{C}^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2 ; \qquad \tau \in (-\infty, \infty) , \qquad (8,4c)$$
při čemž $\bar{A}^\alpha$, $\bar{B}^\alpha$, $\bar{C}^\alpha$, $\alpha = 1, 2$ jsou opět libovolné konstanty, $\bar{A}^2\bar{B}^1 - \bar{A}^1\bar{B}^2 \neq 0$.

Připomeňme ještě, že v případech (8,2a), (8,4b), (8,4c) nejsou parametry afinními oblouky.

C) **Případ** $\varrho = k$ **(konstanta)** $\neq 0$, $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) < 0$. V tomto případě je třeba rozeznávat tři možnosti:

a) $|k| > 4$. Rovnice hledané roviny křivek druhé třídy v E_2 lze psát zde ve tvaru
$$\xi^\alpha(t) = A^\alpha t^a + B^\alpha t + C^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2 ; \qquad t > 0, \qquad (8,5a)$$
kde A^α, B^κ, C^α, $\alpha = 1, 2$, jsou libovolné konstanty, $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$ a dále
$$a \in (1, 2) \quad \text{resp.} \quad a \in (\tfrac{1}{2}, 1) . \qquad (8,5b)$$

b) $|k| < 4$. Parametrickým rovnicím hledaných křivek je možno dát tvar
$$\xi^\alpha(t) = A^\alpha e^{kt} \sin t + B^\alpha e^{kt} \cos t + C^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2 ; \qquad (8,6a)$$
$$t \in (-\infty, \infty) ,$$
kde A^α, B^α, C^α, $\alpha = 1, 2$ jsou libovolné konstanty, $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$, při čemž
$$k \in (0, \infty) . \qquad (8,6b)$$

c) $|k| = 4$. Zde je možno hledané křivky popsat parametrickým vyjádřením
$$\xi^\alpha(t) = A^\alpha t + B^\alpha (\log t)\, t + C^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2 ; \qquad t > 0 , \qquad (8,7)$$
kde A^α, B^α, C^α, $\alpha = 1, 2$ jsou opět libovolné konstanty vázané podmínkou $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$. Případy A), B), C) řeší náš problém, kladený podmínkou (8,1), úplně. Poznamenejme ještě, že v případech (8,5a), (8,6) a (8,7) není parametr t afinním obloukem.

Poznámka 11. Všimněme si, že vztahy (8,2a, b) spolu se vztahy (8,5a, b) dávají křivky s parametrickým popisem
$$\xi^\alpha(t) = A^\alpha t^a + B^\alpha t + C^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2 ; \qquad t > 0 , \qquad (8,8)$$
kde a může nabývat všech možných reálných hodnot s výjimkou čísel -1, 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2. Snadno nahlédneme, že pro $a = 0$ bychom dostali přímku a nikoliv křivku druhé třídy v E_2. Pro $a = 2$ a $a = \frac{1}{2}$ by předchozí rovnice (8,8) vyjadřovaly parabolu (tedy křivku, pro níž není invariant definován). Případ $a = 1$ vede opět na přímku v E_2, konečně případ $a = -1$ vede na hyperbolu, pro níž $\varrho = 0$.

Pro volbu $A^1 = 0$, $A^2 = 1$, $B^1 = 1$, $B^2 = 0$, $C^\alpha = 0$ dostaneme speciální křivku systému (8,8) v explicitním vyjádření (položíme-li $x = t$)
$$y = x^a , \qquad a \in (-\infty, \infty) , \qquad a \neq 1, 0, \tfrac{1}{2}, 1, 2 .$$

Odůvodněně můžeme nyní systém křivek (8,8) nazvat *třídou obecných mocninných křivek v E_2*. Ty jsou podle předchozích výsledků dvojího typu:

1. mocninné křivky s body vesměs hyperbolickými s konstantní afinní křivostí ϱ, $\varrho \neq 0$, $|\varrho| \neq \sqrt{2}$;

2. mocninné křivky s body vesměs eliptickými s konstantní afinní křivostí ϱ, $|\varrho| > 4$.

Vedle uvedené třídy obecných mocnin v E_2 existují další třídy křivek druhé třídy v E_2 s konstantní afinní křivostí. Je to třída křivek (8,4c), do níž patří též křivka

$$x = t\,, \qquad y = e^t\,.$$

Můžeme tedy třídu křivek (8,4c) nazvat *třídou exponenciálních křivek v E_2*.

Křivky s parametrickým vyjádřením (8,6a) obsahují křivku

$$x = e^{kt} \sin t\,, \qquad y = e^{kt} \cos t\,, \qquad k > 0\,,$$

což je v kartézském systému spirála.

Příklad 9. Pro křivku druhé třídy v E_2 danou v explicitním tvaru

$$y = f(x)\,,$$

dostaneme, jak se snadným výpočtem přesvědčíme

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = k^2\{\tfrac{5}{9} y''^{-\frac{8}{3}} (y''')^2 - \tfrac{1}{3} y''^{-\frac{5}{3}} y^{(\mathrm{IV})}\}\,,$$

kde k je konstanta různá od nuly. Tento vztah lze též přepsat na tvar

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = \frac{k^2}{2} (y''^{-\frac{2}{3}})''\,.$$

Jako speciální případ plyne z předchozího a z příkladů 1, 2, 3 diferenciální rovnice pro všechny kuželosečky v rovině

$$(y''^{-\frac{2}{3}})''' = 0\,.$$

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 78 (1953)

O PLOCHÁCH SE SNADNO STANOVITELNÝMI KŘIVKAMI NEJVĚTŠÍHO SPÁDU VZHLEDEM K DANÉ ROVINĚ

FRANTIŠEK KADEŘÁVEK, Praha.

(Došlo dne 18. května 1953.) DT: 515.2

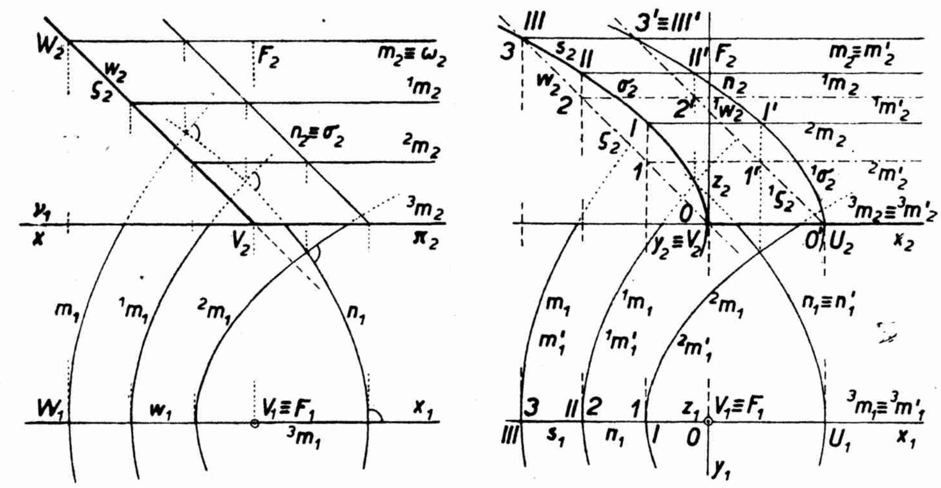
Při výkladech o křivkách největšího spádu vzhledem k dané rovině bývá používáno zpravidla triviálních příkladů. V následujícím bude poukázáno na jednoduché plochy, které dávají vhodný příklad křivek největšího spádu k zvolené rovině.

1. V obr. 1a zvolena byla v rovině $\omega \parallel \pi$ parabola m o ohnisku F a vrcholu W; $WF \parallel x$. Pata V kolmice spuštěné z F na π použita byla jako vrchol kuželové plochy η druhého stupně, procházející parabolou m. Je zřejmé, že prvé průměty řezů $m, {}^1m, {}^2m, \ldots$ v rovinách rovnoběžných s π jsou koaxiální a konfokální kuželosečky s m_1 — dotýkají se totiž obrysu plochy η, který je tvořen isotropickými přímkami roviny π, procházejícími bodem V_1. Rovina σ vedená rovnoběžně k nárysně promítací rovině ϱ vrcholové přímky w plochy η — protne kuželovou plochu η v parabole n, jejíž půdorys je z důvodů uvedených pro křivky ${}^1m, {}^2m, \ldots$ konfokální a koaxiální s těmito parabolami a proto je protíná vesměs v pravém úhlu. I jsou tu paraboly plochy η položené v rovinách rovnoběžných s rovinou ϱ křivkami největšího spádu dané plochy kuželové η a to vzhledem k půdorysně π. Řezy plochy η rovnoběžné s π a s rovinou ϱ dávají nárys ve dvou osnovách rovnoběžných přímek, půdorysy jejich jsou souosé paraboly o společném ohnisku.

Béře-li se v úvahu celá kuželová plocha η, jdoucí od vrcholu V na obě strany, je každá ze souosých a společné ohnisko majících parabol v π půdorysem jednoho řezu plochy η rovnoběžného s π a jedné z parabol největšího spádu plochy η vzhledem k π.

2. Místo přímky w (obr. 1b) z předešlého příkladu zvolme parabolu $s \equiv$ $\equiv z^2 = -2qx$ $(q > 0)$; $y = 0$ a na ní zvolme vrcholy $0, I, II, III, \ldots$ parabol $m, {}^1m, {}^2m, \ldots$ rovnoběžných s π a majících v půdoryse společnou osu a totéž ohnisko F_1. Vznikne tak plocha η, jejíž rovnice k daným osám souřadným x, y, z je jednoduchá: $\eta \equiv q^2y^2 = 2qxz^2 + z^4$.

Spojme body III 0 přímkou w a na ní vyhledejme body $0, 1, 2, 3, \ldots$, jejichž půdorysy spadají do bodů $0, I, II, III, \ldots$ a jimi veďme v rovinách rovnoběžných s průmětnou π paraboly m', ${}^1m'$, ${}^2m'$, ..., jejichž půdorysy splývají s půdorysy parabol m, ${}^1m$, ${}^2m$ ... plochy η. Tyto paraboly vyplní plochu η', která byla uvažována v předcházejícím odstavci a která je plochou kuželovou. Rovina ${}^1\varrho \parallel \varrho \perp \nu$ protíná η' v parabole n', jejíž půdorys je kolmou trajektorií soustavy křivek m, ${}^1m$, ${}^2m$, ... a provedeme-li nad úsečkou $\overline{0'III'}$ parabolu n_2 shodnou a shodně položenou k s_2, je tato křivka nárysem křivky n plochy η a půdorys $n_1 \equiv n_1'$ je proto půdorysem křivky n největšího spádu plochy η vzhledem k půdorysně π. Je proto dovozeno, že *křivky největšího*



a) Obr. 1. b)

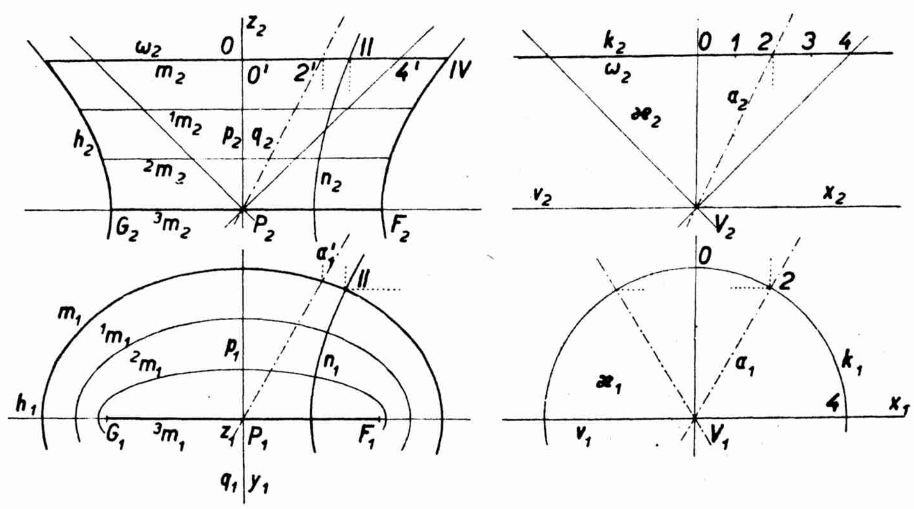
spádu vzhledem k půdorysně π pro uvažovanou plochu η promítají se v půdoryse do konfokálních a koaxiálních parabol; jejich nárysy jsou souosé paraboly shodné a shodně položené s nárysem s_2 křivky s.

Je-li bod U průsečíkem křivky n s přímkou ${}^3m$, je vidno, že křivka n je proniková křivka dvou válcových parabolických ploch, které se v bodě U a v úběžném bodě osy x navzájem dotýkají. Proto se jejich proniková křivka rozpadá na dvě kuželosečky — paraboly o společném půdoryse v n_1. Platí pro plochu η tohoto odstavce totéž, co platilo pro plochu uvažovanou v předcházejícím odstavci:

Křivky největšího spádu vzhledem k rovině π jsou rovinné. Jsou to paraboly o společné ose v ose x a promítají se do π do souosých a konfokálních parabol.

Ve stranorysně jsou na uvažované ploše položeny dvě paraboly $z^2 = \pm qy$, $x = 0$, tedy o polovičním parametru toho, který přináleží parabole řídicí s. Tyto paraboly mají společnou osu v ose y a dotýkají se svými vrcholy v počátku souřadnic. Parabola s je pro plochu η křivkou úžlabní, osa x, dvojná přímka plochy, jejím žlabem, stejně jako v předcházejícím odstavci přímka w byla úžlabím nebo křivkou údolní a osa x žlabem uvažované tam plochy.

3. Uvažovali jsme dvě plochy, na nichž řezy rovnoběžné s průmětnou π se promítaly do soustavy souosých a konfokálních parabol. Zvolme nyní plochy, jejichž řezy rovnoběžné s rovinou π se promítají do osnovy konfokálních kuželoseček, dotýkajících se dvou dvojin isotropických přímek, které procházejí body F_1, G_1 (obr. 2). Další zákon pro rozložení křivek samých v prostoru můžeme si zvoliti. Volme na př. ten, kdy vrcholy vedlejších os vyplňují dvě přímky



Obr. 2.

p, q, které jdou středem P úsečky $\overline{FG} = 2e$, jsou položeny ve stranorysně μ a mají vzhledem k π spád tg $\varphi = +1$! Rovnice takto stanovené plochy η jest

$$\eta \equiv -\frac{x^2}{z^2 + e^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1$$

nebo

$$\eta \equiv z^4 + z^2e^2 - z^2x^2 - y^2z^2 - e^2y^2 = 0\,.$$

Pro $x = 0$ získává se mimo dvojiny přímek p, q ještě dvojina imaginárně sdružených přímek $x = 0$; $z = \pm ie$. Osa $x \equiv v$ je dvojnou přímkou plochy; roviny jí proložené protínají plochu η ještě v kuželosečkách, které, dotýkajíce se čtyř imaginárních rovin, jdoucích isotropickými přímkami určených ohnisky F a G a kolmých k rovině π, musí se nezbytně promítati do π jako kuželosečky konfokální s průměty řezů plochy η, rovnoběžných s rovinou π a jsou proto orthogonálními trajektoriemi těchto řezů a jsou tudíž i křivkami největšího spádu plochy η vzhledem k rovině π. Obě přímky p, q a dále hyperbola $y = 0$, $z^2 - x^2 + e^2 = 0$, jsou útvary úboční uvažované plochy a osa x je jejím žlabem.

Podél úběžné kružnice plochy η, patřící do soustavy elips rovnoběžných s π dotýká se plochy rotační plocha kuželová o vrcholu v bodě P, který půlí vzdálenost ohnisek F a G. Na této úběžné kružnici leží úběžné body hyperbol největšího spádu, jsou proto jejich nárysy afinně sdružené směrem x_2 pro osu z_2.

Jednoduchý přímý důkaz je tento:

Vytkněme na ploše η křivku m v rovině ω rovnoběžné s π a vedle vytkněme rotační plochu kuželovou $\varkappa$, mající vrchol V v půdorysně a základnu k v ω. Poloměr kružnice k je rovný vedlejší poloose elipsy m. Vyhledejme v náryse body $1, 2, 3, 4$, které rozdělují přímočarý nárys reálné části kružnice k od středu ke krajnímu bodu na čtyři stejné díly. Jejich půdorysy jsou $1, 2, 3, 4$ v k_1. Když jsme zvolili střed P plochy η a vrchol V plochy kuželové $\varkappa$ v téže přímce $v \parallel x$, jsou roviny vedené přímkou v a body $1, 2, 3, 4$ kružnice k ony roviny, které protínají plochu η v hyperbolách největšího spádu vzhledem k rovině π. Rovnoběžky vedené body $1, 2, 3, 4$ kružnice k k ose x vytyčují v křivce m body I, II, III, IV, jimiž hledané hyperboly stejného spádu procházejí. Nárysy I, II, III, IV tvoří řadu podobnou k řadě $1, 2, 3, 4$ v k_2. Asymptoty nárysů hyperbol spádových jdou bodem P_2 rovnoběžně ke spojnicím $V_2 1$, $V_2 2$, $V_2 3$, $V_2 4$ bodu V_2 s dělicími body v přímce k_2. I je řada $1', 2', 3', 4'$ v m_2 shodná s řadou $1, 2, 3, 4$ v k_2 a proto jsou hyperboly určené asymptotami $P_2 1', \ldots$ a body $I', \ldots$ v m_2 afinně sdružené pro osu z_2 směrem x_2. Z křivek n byla narýsována jen jedna, jdoucí bodem II.

Plocha η je vzhledem k rovinám π, ν, μ kolmo souměrná, bod P je jejím středem a osy x, y, z jsou jejími osami kolmé souměrnosti. Podél libovolné elipsy plochy η dotýká se jí zborcená plocha 4°, mající osu v ose z a řídící přímky jednu v ose x, druhou různoběžnou k z a rovnoběžnou s osou y.

4. Zvolí-li se pro plochu η místo zákona uvedeného v předešlém odstavci pravidlo, že vrcholy s π rovnoběžných řezů plochy promítajících se do π do konfokálních kuželoseček vyplňují v rovině $(x, z) \equiv \nu$ přímku jdoucí bodem P a mající k π spád $\operatorname{tg} \varphi = 1$, získáme plochu, která jsouc středová o středu v P a o třech rovinách π, ν, μ kolmé souměrnosti, má rovnici

$$\eta \equiv \frac{x^2}{z^2} - \frac{y^2}{y^2 e^2 - z^2} = 1,$$

čili

$$\eta \equiv (x^2 - z^2)(e^2 - z^2) = y^2 z^2 ,$$

či v jiném tvaru

$$\eta \equiv z^4 - z^2(x^2 + y^2 + e^2) + e^2 x^2 = 0 .$$

Pro $y = 0$ je určena na ploše dvojina přímek $y = 0$, $x = \pm z$, v nichž jsou vrcholy kuželoseček plochy, rovnoběžných s π a dvě přímky $y = 0$, $z = \pm e$. V rovině μ je položena rovnoosá hyperbola $x = 0$, $z^2 - y^2 = e^2$ a dvojná přímka $x = 0$, $z = 0$. Tato plocha od roviny π směrem vzhůru počíná osou y jako dvojnou přímkou, v následujících s π rovnoběžných rovinách má hyperboly; v rovině vzdálené od π o úsečku e má přímku kráterovou a nad touto rovinou jsou položeny elipsy, z nichž úběžná se ze středu P plochy promítá stejně jako v případě předcházejícím rotační plochou kuželovou. Roviny, procházející osou y protínají uvažovanou plochu v kuželosečkách, které tvoří pro plochu soustavu křivek největšího spádu vzhledem k rovině π a promítají se do ní do kuželoseček konfokálních s průměty řezů rovnoběžných s rovinou π.

5. Výtvarné zákony pro polohu řezů plochy η rovinami rovnoběžnými s π v prostoru mohou být ovšem nejrůznější, ale předpokládáme-li stále, že tyto řezy se promítají do π do konfokálních kuželoseček o stejné lineární výstřednosti e, pak bude platiti, že kolmé průměty jejich křivek největšího spádu vzhledem k π na tuto rovinu jsou opět kuželosečky s vrstevnicovým plánem plochy η konfokální. Povšimneme si z nich ještě této plochy:

Plocha η má vrstevnicový plán v konfokálních kuželosečkách položených v π, spojnice ohnisek $FG \equiv x$, $\overline{FG} = 2e$! Předpokládejme, že vrcholy křivek plochy, položených v rovinách rovnoběžných s π vyplňují kružnici popsanou nad úsečkou $\overline{FG}$ jako průměrem v rovině ν a počátek souřadnic položme do středu úsečky $\overline{FG}$! Získaná plocha má rovnici

$$\eta \equiv \frac{x^2}{e^2 - z^2} - \frac{y^2}{z^2} = 1$$

nebo $\eta \equiv z^4 + z^2(x^2 + y^2 - e^2) - e^2y^2 = 0$, kde e je polovina úsečky $\overline{FG}$. Osa x je tu dvojnou přímkou a jí jdoucí roviny protínají η v křivkách největšího spádu vzhledem k rovině π.

Je zřejmo, že pro plochy uvažované v 3. a 4. odstavci mohli bychom si zvolit geometrické místo vrcholů křivek rovnoběžných s π v libovolné vhodné křivce a stále získáváme plochy, jejichž křivky největšího spádu vzhledem k půdorysně se promítají do této roviny do konfokálních kuželoseček, což možno prováděti i s plochou odstavce 2.

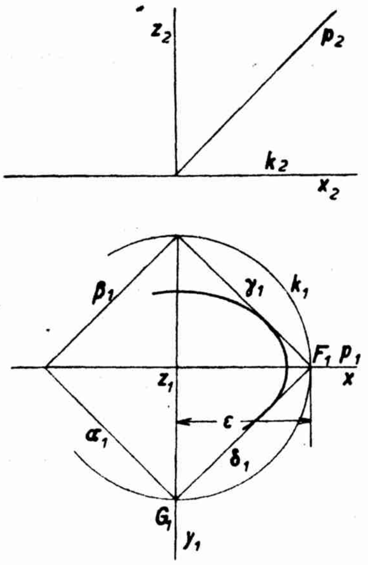
6. V předcházejících odstavcích byl půdorysný obrys uvažované plochy tvořen dvěma dvojinami imaginárně sdružených přímek. Můžeme nahraditi (obr. 3) tento předpoklad tím, že plocha je dána tečnými rovinami $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, které protínají roviny ν a μ v přímkách rovnoběžných s osou z a od ní o úsečku ε vzdálených. Vodorovné, s π rovnoběžné řezy buďtež kuželosečky, které mají vrcholy na přímce p položené v ν, jdoucí počátkem souřadnic ve spádu $\operatorname{tg} \varphi = 1$ vzhledem k půdorysně. Plocha η je tu dána rovnicí

$$\eta \equiv \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{\varepsilon^2 - z^2} = 1$$

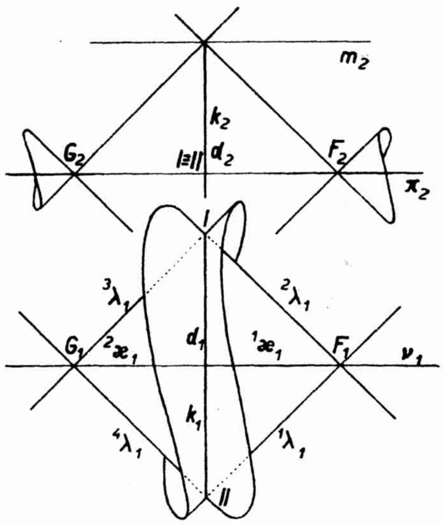
nebo

$$\eta \equiv z^4 + \varepsilon^2(x^2 - z^2) - z^2(x^2 - y^2) = 0 .$$

Ježto body F_1, G_1 mají v tomto případě stejný význam, není třeba uvažovat zvlášť řídicí přímku plochy v μ jako případ zvláštní. Osa y je tu dvojnou přímkou a roviny jí položené protínají plochu η v kuželosečkách promítajících se do π do osnovy, určené tečnami α_1, β_1, γ_1, δ_1, tedy téže osnovy, do níž se do π promítají řezy plochy s π rovnoběžné. Všechny tyto půdorysy kuželoseček mají v kružnici opsané v π okolo počátku poloměrem ε společnou orthoptickou kružnici k. Ve stranorysně leží na ploše kružnice o poloměru ε a středu v počátku souřadnic, osa y a přímky $y = 0$, $z = \pm\,\varepsilon$ jsou kráterové přímky této plochy.



Obr. 3.



Obr. 4.

Poznámka: Plochu uvedenou v odstavci 6 můžeme získati sečítáním. Zvolme dvě rotační kuželové plochy ${}^1\varkappa$, ${}^2\varkappa$ o společné ose v π a o vrcholech F, G, při čemž vrcholové úhly obou kuželových ploch buďtež rovny úhlu pravému (obr. 4). Z ploch ${}^1\varkappa$, ${}^2\varkappa$ získáme plochu $\varkappa \equiv ({}^1\varkappa + {}^2\varkappa)$ pro směr sečítání kolmý k π a pro podmínku, že souřadnice z libovolného bodu plochy η ve sčítacím paprsku je rovna $z = \dfrac{{}^1z + {}^2z}{2}$, kde ${}^1z$, ${}^2z$ jsou příslušné souřadnice ploch ${}^1\varkappa$ a ${}^2\varkappa$. V rovinách ${}^1\lambda, \ldots, {}^4\lambda$ jsou položeny půdorysné obrysy plochy $\varkappa$, paraboly souměrně položené k π a mající v bodech I, II své vrcholy. Z tohoto způsobu vytváření plochy $\varkappa$ bylo by lze vyčíst řadu dalších vlastností této plochy čtvrtého stupně. Zvolíme-li plochy ${}^1\varkappa$, ${}^2\varkappa$ tak, aby jejich obrysy půdorysu byly isotropické přímky, dává součet plochy uvažované v 2. a dalších odstavcích, bez použití počtu vyplývá tu na př. stupeň plochy a jiné vlastnosti.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 78 (1953)

KANÁLOVÉ W-PLOCHY

KAREL HAVLÍČEK, Praha.

(Došlo dne 30. března 1953.) DT: 513.785

V článku je ukázáno, že některé vlastnosti kanálových ploch, které jsou známé jako podmínky nutné, jsou zároveň i postačující pro jednotlivé typy těchto ploch. Především jsou zde mezi kanálovými plochami určeny všechny plochy *Weingartenovy*.

1. Formulace problému

Kanálové plochy lze charakterisovat rovnicí

$$C = 0\,, \tag{1}$$

kde C je skalár, jehož konstrukci jsem podal dříve;[1]) protože

$$C = u_{\nu\lambda\mu}\, u_{\alpha\beta\gamma}\, P^{\nu\alpha}P^{\lambda\beta}P^{\mu\gamma}\,,$$

kde $u_{\nu\lambda\mu}$ a $P^{\lambda\mu}$ jsou symetrické tensory, jejichž složky jsou závislé až na třetích parciálních derivacích funkcí, určujících uvažovanou plochu, je rovnice (1) rovnicí diferenciální. Chceme-li mezi kanálovými plochami určit některé speciální plochy, charakterisované jinou diferenciální rovnicí, stačí hledat společné řešení obou diferenciálních rovnic. Tak lze na př. zjistit, které kanálové plochy jsou zároveň plochami přímkovými.[2]) Abychom stanovili mezi kanálovými plochami všechny W-plochy (Weingartenovy plochy), budeme hledat společné řešení rovnice (1) a rovnice

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial K}{\partial u}, & \dfrac{\partial H}{\partial u} \\ \dfrac{\partial K}{\partial v}, & \dfrac{\partial H}{\partial v} \end{vmatrix} = 0\,, \tag{2}$$

která charakterisuje W-plochy; při tom K, H značí *Gaussovu*, resp. střední křivost plochy vztažené k parametrům u, v.

Protože rozvinutelné plochy ($K = 0$) jsou zde triviálním řešením, vypustíme je ze svých úvah a omezíme se v dalším pouze na plochy nerozvinutelné.

---

[1]) *Havlíček* [1].
[2]) *Havlíček* [2].

Rovněž kruhové body plochy vyloučíme ze svých úvah, neboť v takových bodech nelze sestrojit skalár C. Značí-li $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ normální křivosti plochy v hlavních směrech, takže tedy je

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}, \quad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

pak kruhové body jsou charakterisovány rovnicí $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$. Celkem tedy budeme v dalším stále předpokládat splnění těchto dvou nerovností:

$$K \neq 0, \quad \frac{1}{R_1} \neq \frac{1}{R_2}. \tag{3}$$

Vedle ploch rozvinutelných je tím vyloučena z našich úvah také koule.

Za podmínek (3) lze rovnici (2) nahradit rovnicí

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial u}, & \frac{\partial R_2}{\partial u} \\ \frac{\partial R_1}{\partial v}, & \frac{\partial R_2}{\partial v} \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

takže naším úkolem je hledati společné řešení rovnic (1) a (4). Protože význam těchto rovnic je nezávislý na volbě parametrů u, v, můžeme výpočet zjednodušit vhodnou volbou parametrů. K tomu účelu se zde hodí parametry hlavní.

2. Pomocné rovnice

Užijeme obvyklé vektorové a tensorové symboliky a terminologie.[3]) V pravoúhlých kartézských souřadnicích jsou parametrické rovnice plochy, vztažené k parametrům u, v symbolisovány vektorovou rovnicí

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(u, v)\,, \tag{5}$$

která představuje průvodič (radius — vektor) $\boldsymbol{r}$ bodu plochy jako funkci dvou parametrů u, v.

Za předpokladu, že u, v jsou hlavní parametry, vyjádříme složky prvního metrického tensoru $a_{\lambda\mu}$ resp. druhého metrického tensoru $b_{\lambda\mu}$ klasickým způsobem

$$a_{\mathrm{I\,I}} = E\,, \quad a_{\mathrm{I\,II}} = a_{\mathrm{II\,I}} = F = 0\,, \quad a_{\mathrm{II\,II}} = G$$

$$b_{\mathrm{I\,I}} = L\,, \quad b_{\mathrm{I\,II}} = b_{\mathrm{II\,I}} = M = 0\,, \quad b_{\mathrm{II\,II}} = N\,.$$

Jejich diskriminanty označíme

$$A^2 = EG - F^2\,, \qquad B^2 = LN - M^2\,.$$

Protože studujeme pouze reálné plochy bez singularit, je vždycky $A > 0$.

[3]) Viz na př. *Havlíček* [2].

Následující vztahy a rovnice tohoto odstavce uvádím rovněž bez důkazu; jsou obsaženy téměř v každé moderní učebnici diferenciální geometrie.[4]) Pro normální křivosti v hlavních směrech máme vzorce

$$\frac{1}{R_1} = \frac{L}{E}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G}, \tag{6}$$

takže $\frac{1}{R_1}$ $\left(\text{resp. } \frac{1}{R_2}\right)$ je normální křivost křivky $v = \text{const}$ (resp. $u = \text{const}$). V důsledku druhé nerovnosti (3) je tedy

$$EN - GL \neq 0\,. \tag{7}$$

Jednotkový vektor normály plochy označme $\boldsymbol{N}$. Formule *Rodriguesovy* pak jsou

$$\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u} = -\frac{1}{R_1}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial v} = -\frac{1}{R_2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\,. \tag{8}$$

Christoffelovy symboly $\left\{ {\nu \atop \lambda\mu} \right\}$, určující metrickou konnexi, jsou v hlavních parametrech určeny těmito výrazy:

$$\begin{gathered}
\left\{ {\mathrm{I} \atop \mathrm{I\,I}} \right\} = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}, \quad \left\{ {\mathrm{II} \atop \mathrm{II\,II}} \right\} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v},\\
\left\{ {\mathrm{II} \atop \mathrm{I\,II}} \right\} = \left\{ {\mathrm{II} \atop \mathrm{II\,I}} \right\} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}, \quad \left\{ {\mathrm{I} \atop \mathrm{I\,II}} \right\} = \left\{ {\mathrm{I} \atop \mathrm{II\,I}} \right\} = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v},\\
\left\{ {\mathrm{II} \atop \mathrm{I\,I}} \right\} = -\frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad \left\{ {\mathrm{I} \atop \mathrm{II\,II}} \right\} = -\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u}\,.
\end{gathered} \tag{9}$$

Pro složky kubického tensoru $b_{\omega\mu\lambda} = \frac{\partial}{\partial \xi^\omega} b_{\mu\lambda} - \left\{ {\alpha \atop \mu\omega} \right\} b_{\alpha\lambda} - \left\{ {\alpha \atop \lambda\omega} \right\} b_{\mu\alpha}$ dostáváme tyto výrazy:

$$\begin{gathered}
b_{\mathrm{I\,I\,I}} = \frac{1}{E}\left(E\frac{\partial L}{\partial u} - L\frac{\partial E}{\partial u}\right), \quad b_{\mathrm{I\,I\,II}} = b_{\mathrm{I\,II\,I}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{N}{G} - \frac{L}{E}\right)\frac{\partial E}{\partial v}\\
b_{\mathrm{II\,I\,I}} = \frac{1}{E}\left(E\frac{\partial L}{\partial v} - L\frac{\partial E}{\partial v}\right), \quad b_{\mathrm{I\,II\,II}} = \frac{1}{G}\left(G\frac{\partial N}{\partial u} - N\frac{\partial G}{\partial u}\right)\\
b_{\mathrm{II\,I\,II}} = b_{\mathrm{II\,II\,I}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{L}{E} - \frac{N}{G}\right)\frac{\partial G}{\partial u}, \quad b_{\mathrm{II\,II\,II}} = \frac{1}{G}\left(G\frac{\partial N}{\partial v} - N\frac{\partial G}{\partial v}\right).
\end{gathered} \tag{10}$$

Tento tensor je symetrický, takže

$$b_{\mathrm{I\,I\,II}} = b_{\mathrm{I\,II\,I}} = b_{\mathrm{II\,I\,I}}\,, \quad b_{\mathrm{I\,II\,II}} = b_{\mathrm{II\,I\,II}} = b_{\mathrm{II\,II\,I}}\,,$$

už dává známé rovnice *Mainardi-Codazziho*, jež v hlavních parametrech tedy zní:

---

[4]) Na př. *Kagan* [3].

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{N}{G}-\frac{L}{E}\right)\frac{\partial E}{\partial v} &= \frac{1}{E}\left(E\frac{\partial L}{\partial v}-L\frac{\partial E}{\partial v}\right) \\
\frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}-\frac{N}{G}\right)\frac{\partial G}{\partial u} &= \frac{1}{G}\left(G\frac{\partial N}{\partial u}-N\frac{\partial G}{\partial u}\right).
\end{aligned} \tag{11}
$$

V dalším užijeme *Gaussovy rovnice*, které vyjadřují druhé derivace vektoru (5) jako lineární kombinace tří lineárně nezávislých vektorů $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, $\mathbf{N}$. Tyto rovnice mají v hlavních parametrech tvar

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2} &= \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} - \frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} + L\mathbf{N}, \\
\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u\,\partial v} &= \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} + \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \\
\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2} &= -\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} + \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} + N\mathbf{N}.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Konečně pro *Gaussovu* míru křivosti plochy máme jednak vyjádření $K = \frac{B^2}{A^2}$, jednak vyjádření pomocí prvního metrického tensoru (*Gaussova* věta),

$$
K = \frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{EA}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{A}\frac{\partial G}{\partial u}\right) + \frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2}{A}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{A}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{EA}\frac{\partial E}{\partial u}\right), \text{ kde } A > 0\,,
$$

což v hlavních parametrech dává rovnici

$$
\frac{1}{2EG}\left\{E\left[\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right] + G\left[\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right]\right\} - \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} = 2LN\,. \tag{13}
$$

3. Kanálové W-plochy

Každá kanálová plocha je obálkou jednoparametrického systému koulí.

Mají-li všechny tyto koule stejný poloměr, pak je známo, že jejich obálka je W-plocha. Druhý běžný případ kanálové W-plochy je rotační plocha.[5]) Jiné kanálové W-plochy už nejsou, jak plyne z následujícího tvrzení:

Věta 1. *Nechť kanálová plocha je W-plochou. Potom je to buď plocha rotační nebo obálka jednoparametrického systému koulí s konstantním poloměrem.*

[5]) Na př. *Kagan* [3], str. 202; 252 a dál.

Důkaz: Daná plocha je podle předpokladu kanálovou, tedy pro ni platí rovnice (1), která v hlavních parametrech se po krácení nenulovým faktorem redukuje na tvar[6])

$$b_{\mathrm{I\,I\,I}}\, b_{\mathrm{II\,II\,II}} = 0\,. \tag{14}$$

Aspoň jeden systém hlavních (křivoznačných) čar jsou kružnice. Protože označení parametrických čar je v naší moci, můžeme předpokládat, že tyto kružnice jsou čáry $u = \text{const}$, takže je $b_{\mathrm{II\,II\,II}} = 0$. K podmínce $b_{\mathrm{I\,I\,I}} = 0$ bychom dospěli pouhou záměnou parametrů. Pro Dupinovu cyklidu je současně $b_{\mathrm{I\,I\,I}} = b_{\mathrm{II\,II\,II}} = 0$. Můžeme se tedy při řešení rovnice (14) bez újmy obecnosti omezit na případ

$$b_{\mathrm{II\,II\,II}} = 0\,. \tag{15}$$

Z poslední rovnice (10) odtud plyne

$$G\frac{\partial N}{\partial v} - N\frac{\partial G}{\partial v} = 0\,,$$

neboť vzhledem k předpokladu $A > 0$ je $G \neq 0$. Tato podmínka je ekvivalentní s rovnicí

$$\frac{\partial R_2}{\partial v} = 0\,, \tag{16}$$

neboť ze (6) plyne $R_2 = \frac{G}{N}$, jelikož $N \neq 0$ (neboť podle (3) je $\frac{LN}{EG} = K \neq 0$).

(Poznámka: Touto rovnicí (16) v hlavních parametrech je možno také definovat kanálovou plochu, čímž by odpadly některé výpočty v odstavci 2. Budeme je však ještě potřebovat při jiné příležitosti.)

Druhý předpoklad, že daná plocha je W-plochou, vede na rovnici (4). Dosazením ze (16) do (4) tedy docházíme k podmínce

$$\frac{\partial R_2}{\partial u}\frac{\partial R_1}{\partial v} = 0\,, \tag{17}$$

která spolu se (16) charakterisuje kanálové W-plochy. Nyní je třeba rozlišovat dva případy:

$$\text{I.}\ \frac{\partial R_2}{\partial u} = 0\,, \quad \text{II.}\ \frac{\partial R_1}{\partial v} = 0\,.$$

I. $\frac{\partial R_2}{\partial u} = 0$ spolu s podmínkou (16) dává $R_2 = \text{konst}$; ale R_2 je právě poloměr koule, která se dotýká plochy podél příslušné kružnice $u = \text{const}$. To plyne na příklad ihned z věty Meusnierovy, podle níž poloměr kružnice $u = \text{const}$ je kolmým průmětem poloměru R_2, takže existuje koule o poloměru R_2, procházející uvažovanou kružnicí a dotýkající se plochy podél ní. Ke každé

[6]) *Havlíček* [1], théorème (3,5), str. 30—31, kde místo tensoru $b_{\nu\lambda\mu}$ je užito tensoru $v_{\nu\lambda\mu} = - b_{\nu\lambda\mu}$ (viz Mathematical Reviews, Vol. 11, No 5, p. 396, nebo *Havlíček* [2], poznámka [10]) pod čarou).

kružnici $u = \text{const}$ lze takto přiřaditi jedinou kouli, všechny tyto koule mají konstantní poloměr $R_2 = \text{konst}$, jejich středy probíhají křivku[7])

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} + R_2\boldsymbol{N}\,, \tag{18}$$

takže tyto koule tvoří jednoparametrický systém a uvažovaná plocha je tedy jejich obálkou. Vede tedy případ I k obálce koulí o konstantním poloměru, čímž je první část tvrzení věty 1. dokázána.

II. případ, kdy $\dfrac{\partial R_1}{\partial v} = 0$, vyžaduje delšího výpočtu. Uvažovaná kanálová plocha je ovšem zase obálkou jednoparametrického systému koulí, dotýkajících se jí podle kružnic $u = \text{const}$. Středy těchto koulí vytvoří i zde křivku (18), avšak R_2 nemusí zde být konstantní. Dokážeme, že tato rovnice (18) zde je rovnicí přímky; tím bude dokázáno, že daná plocha je rotační, neboť tato přímka středů koulí je zřejmě osou rotace celého jednoparametrického systému koulí.

Z rovnice (18) plyne:

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} + \frac{\partial R_2}{\partial u}\boldsymbol{N} + R_2\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u}\,.$$

Dosazením z rovnic (6) a z první rovnice (8) dostáváme

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} = \frac{EN - GL}{EN}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} + \frac{1}{N^2}\left(N\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial N}{\partial u}\right)\boldsymbol{N}\,.$$

Koeficient při vektoru $\boldsymbol{N}$ upravíme ještě dosazením z druhé rovnice (11), takže

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} = \frac{EN - GL}{EN}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} + \frac{1}{2N}\frac{\partial G}{\partial u}\boldsymbol{N}\right). \tag{19}$$

Dalším derivováním dostaneme

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial u^2} = \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{EN - GL}{EN}\right)\right]\cdot\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} + \frac{1}{2N}\frac{\partial G}{\partial u}\boldsymbol{N}\right] + \frac{EN - GL}{EN}\left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2N}\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u} + \frac{1}{2N^2}\left(N\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial N}{\partial u}\right)\boldsymbol{N}\right].$$

Dosadíme-li sem za $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}^2}{\partial u^2}$ z první rovnice (12) a za $\dfrac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u}$ z první rovnice (8), máme po kratší úpravě

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial u^2} = \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{EN - GL}{EN}\right)\right]\cdot\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} + \frac{1}{2N}\frac{\partial G}{\partial u}\boldsymbol{N}\right] +$$
$$+ \frac{EN - GL}{EN}\left[\frac{1}{2EN}\left(N\frac{\partial E}{\partial u} - L\frac{\partial G}{\partial u}\right)\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} - \frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} + \right. \tag{20}$$
$$\left. + \frac{1}{2N^2}\left(N\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial N}{\partial u} + 2LN^2\right)\cdot\boldsymbol{N}\right].$$

---

[7]) V důsledku druhé z rovnic (8) je totiž $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v} = 0$, takže $\boldsymbol{p}$ závisí pouze na jednom parametru a představuje tedy křivku.

Tento výsledek lze značně zjednodušit. Užijeme-li konečně rovnice $\frac{\partial R_1}{\partial v} = 0$, plynoucí z podmínky (17), máme po dosazení za R_1 ze (6)

$$L\frac{\partial E}{\partial v} - E\,\frac{\partial L}{\partial v} = 0\,,$$

což dosazeno do první rovnice (11) dává vzhledem k nerovnosti (7) podmínku

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0 \tag{21}$$

a tedy také

$$\frac{\partial L}{\partial v} = 0\,.$$

Upravíme především koeficient při $\mathbf{N}$ ve výrazu (20). Z rovnice (13) se snadno vypočte $\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}$, což při podmínce (21) dává

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} = \frac{1}{2EG}\frac{\partial G}{\partial u}\left(E\,\frac{\partial G}{\partial u} + G\,\frac{\partial E}{\partial u}\right) - 2LN$$

a užitím tohoto výsledku po vhodné úpravě dostaneme

$$\frac{1}{2N^2}\left(N\,\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial N}{\partial u} + 2LN^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4N}\frac{\partial G}{\partial u}\left[\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{2}{GN}\left(N\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial N}{\partial u}\right)\right].$$

Poslední člen snadno upravíme dosazením z druhé rovnice (11) a dostaneme postupnými úpravami tento koeficient ve tvaru:

$$\frac{1}{4EN^2}\frac{\partial G}{\partial u}\left(N\frac{\partial E}{\partial u} - L\frac{\partial G}{\partial u}\right).$$

Dosadíme-li to spolu s (21) do (20), máme

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial u^2} = \Psi.\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} + \frac{1}{2N}\frac{\partial G}{\partial u}\mathbf{N}\right),$$

kde

$$\Psi = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{EN - GL}{EN}\right) + \frac{EN - GL}{2E^2N^2}\left(N\frac{\partial E}{\partial u} - L\frac{\partial G}{\partial u}\right).$$

Porovnáním s rovnicí (19) nacházíme vzhledem k (3), že platí

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial u^2} = \Phi\,.\,\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u}, \tag{22}$$

kde

$$\Phi = \Psi\,.\,\frac{EN}{EN - GL} =$$

$$= \frac{EN}{EN - GL}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{EN - GL}{EN}\right)\right] + \frac{1}{2EN}\left(N\frac{\partial E}{\partial u} - L\frac{\partial G}{\partial u}\right).$$

Vzhledem k tomu, že $\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial v} = 0$ (srovnej s poznámkou [7]), je $\frac{\mathrm{d}\mathfrak{p}}{\mathrm{d}u} = \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}$, $\frac{\mathrm{d}^2\mathfrak{p}}{\mathrm{d}u^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial u^2}$; rovnici (22) lze přepsat na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathfrak{p}}{\mathrm{d}u^2} = \Phi \frac{\mathrm{d}\mathfrak{p}}{\mathrm{d}u},$$

která charakterisuje přímku. Křivka (18) je tedy přímkou, to znamená, že uvažovaná plocha je obálkou jednomocného systému koulí, jejichž středy vyplní přímku, takže naše plocha je rotační. Tím je věta 1. celá dokázána.

Zvláštním případem kanálových ploch jsou *Dupinovy cyklidy*, charakterisované v hlavních parametrech rovnicemi

$$b_{\mathrm{I\,I\,I}} = b_{\mathrm{II\,II\,II}} = 0\,. \tag{23}$$

Pro ně dává předchozí věta 1. tento výsledek:

Věta 2. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby Dupinova cykloida byla W-plochou, jest: tato plocha je torus* (rotační anuloid).

Důkaz: Protože torus je nutně W-plochou, stačí se omezit na druhou část důkazu. Nechť Dupinova cyklida je W-plochou. Podobně jako v důkaze věty 1. zjistíme, že (23) je ekvivalentní s rovnicemi

$$\text{a)}\ \frac{\partial R_1}{\partial u} = 0\,, \quad \text{b)}\ \frac{\partial R_2}{\partial v} = 0\,, \tag{24}$$

což dosazeno do (4) dává

$$\frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial R_2}{\partial u} = 0\,. \tag{25}$$

Rozlišujeme opět dva případy.

I. Nechť $\frac{\partial R_1}{\partial v} = 0$. Spolu s rovnicí (24a) dává tato podmínka výsledek $R_1 =$ $=$ konst; uvažovaná plocha je tedy obálkou koulí o konstantním poloměru a tyto koule se dotýkají plochy podél kružnic $v =$ konst. (Porovnej s případem I, v důkazu věty 1.) Spolu s rovnicí (24b) představuje podmínku pro to, aby plocha byla rotační, na níž křivky $u =$ konst jsou rotačními kružnicemi (což jsme odvodili v důkaze věty 1., případ II.). To znamená, že čáry $v =$ konst, jež jsou zde kružnicemi, jsou meridiány naší plochy, která je tedy rotačním anuloidem.

II. Případ $\frac{\partial R_2}{\partial u} = 0$, dává ovšem stejný výsledek s výměnou označení obou systémů parametrických křivek.

Poznámka: Případ $\frac{\partial R_1}{\partial u} = \frac{\partial R_1}{\partial v} = \frac{\partial R_2}{\partial u} = \frac{\partial R_2}{\partial v} = 0$ vede k podmínkám $b_{\mathrm{II\,I\,I}} = b_{\mathrm{I\,II\,II}} = 0$, což podle rovnic (11) za předpokladu (7) znamená $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$,

$\dfrac{\partial G}{\partial u} = 0$; podle vzorce (13) pak máme $K = 0$ a naše plocha je rozvinutelná, kterýžto případ jsme předem vyloučili ze svých úvah. Kdybychom opustili předpoklad (7) a připustili $R_1 = R_2$, pak všechny body jsou kruhové a uvažovaná plocha je koule. Tento případ jsme rovněž vyloučili.

4. Některé důsledky.

U kanálových W-ploch je vždycky jedna soustava hlavních (čili křivoznačných) křivek tvořena křivkami geodetickými; u plochy rotační jsou to meridiány, u plochy, která je obálkou koulí o konstantním poloměru jsou to kružnice, podle nichž se tyto koule dotýkají obálky (neboť rovina každé z těchto kružnic prochází zde středem příslušné koule a tedy její normály jsou zároveň normálami obálky, což je charakteristická vlastnost geodetické křivky). Snadno ukážeme, že tato vlastnost je pro kanálové W-plochy charakteristická.

Označíme-li $u = \xi^{\mathrm{I}}$, $v = \xi^{\mathrm{II}}$, pak rovnice geodetických křivek lze užitím tensorové symboliky psát jednoduše ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\nu}{\mathrm{d}t^2} + \begin{Bmatrix} \nu \\ \lambda\mu \end{Bmatrix} \frac{\mathrm{d}\xi^\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}t} = f(t)\frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}t}, \quad (\nu = \mathrm{I}, \mathrm{II}),$$

kde $f(t)$ je libovolný skalár, t je parametr uvažované křivky. Pro parametrické křivky máme buď $u =$ konst, $v = t$

$$\left(\text{tedy } \frac{\mathrm{d}\xi^{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\xi^{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t^2} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\xi^{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}t} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}^2\xi^{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}t^2} = 0\right)$$

nebo $u = t$, $v =$ konst

$$\left(\frac{\mathrm{d}\xi^{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}^2\xi^{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}t^2} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\xi^{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\xi^{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}t^2} = 0\right),$$

takže nutná a postačující podmínka, aby parametrická křivka $u =$ konst (resp. $v =$ konst) byla geodetickou, je

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}\ \mathrm{II} \end{Bmatrix} = 0 \ \left(\text{resp. } \begin{Bmatrix} \mathrm{II} \\ \mathrm{I}\ \mathrm{I} \end{Bmatrix} = 0\right). \tag{26}$$

Předpokládejme opět, že parametry u, v jsou hlavní a ve shodě s označením v předcházejícím odstavci volme kružnice, tvořící jednu soustavu hlavních křivek na kanálové ploše, za křivky $u =$ konst. Nazveme ji první soustavou hlavních křivek; křivky $v =$ konst tvoří pak druhou soustavu hlavních křivek.

Věta 3. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby na kanálové ploše byla první soustava hlavních křivek tvořena křivkami geodetickými, jest: tato plocha je obálkou jednoparametrického systému koulí o konstantním poloměru.*

Důkaz: Kanálová plocha, na níž hlavní křivky $u =$ konst jsou kružnice, je charakterisována rovnicí (15), resp. (16).

Z případu I v důkazu věty 1. víme, že tato plocha je obálkou koulí o konstantním poloměru tehdy a jen tehdy, když ve všech bodech plochy platí

$$\frac{\partial R_2}{\partial u} = 0 \, ,$$

čili

$$N \frac{\partial G}{\partial u} - G \frac{\partial N}{\partial u} = 0 \, .$$

Na základě druhé z rovnic (11) je tato rovnice vzhledem k předpokladu (7) ekvivalentní s podmínkou

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 0 \, ,$$

která je splněna tehdy a jen tehdy, když

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \ \mathrm{II} \end{Bmatrix} = 0 \, ,$$

jak snadno zjistíme z poslední rovnice (9). Tak docházíme k první rovnici (26), představující nutnou a postačující podmínku pro to, aby křivky $u =$ konst byly geodetické. Tím je věta 3. dokázána.

Stejného postupu důkazu užijeme i v druhém případě.

Věta 4. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby na kanálové ploše byla druhá soustava hlavních křivek tvořena křivkami geodetickými, jest: tato plocha je rotační.*

Důkaz. Z případu II v důkaze věty 1. víme, že kanálová plocha, na níž $u =$ konst jsou kružnice, je rotační tehdy a jen tehdy, když vedle (16) platí

$$\frac{\partial R_1}{\partial v} = 0 \, ,$$

čili

$$E \frac{\partial L}{\partial v} - L \frac{\partial E}{\partial v} = 0 \, .$$

Vzhledem k předpokladu (7) plyne z první rovnice (11), že tato podmínka je splněna tehdy a jen tehdy, když

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0 \, .$$

Ze vzorců (9) plyne, že tato rovnice je splněna tehdy a jen tehdy, když

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{II} \\ \mathrm{I} \ \ \mathrm{I} \end{Bmatrix} = 0 \, ,$$

čili, když křivky $v =$ konst jsou geodetické (viz druhou rovnici (26)), čímž je tvrzení věty 4 dokázáno.

LITERATURA

[1] *K. Havlíček:* Sur les surfaces enveloppes de sphères. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, *74*, Praha 1949, 21—40.

[2] *K. Havlíček:* Каналовые линейчатые поверхности. Чехословацкий математический журнал. Т. *1* (*76*), Praha 1951, 213—224; francouzský překlad: Surfaces réglées qui sont enveloppes de sphères, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. *1* (*76*), Praha 1951, 187—197.

[3] *В. Ф. Каган:* Основы теории поверхностей I, огиз, Москва, 1941.

RECENSE ČLÁNKŮ A KNIH

Vladimír Kořínek, **Základy algebry.** Nakladatelství ČSAV, Praha 1953. Str. 494, 10 obrazů, náklad 3300. Cena váz. Kčs 64,—.

Kořínkova kniha o základech algebry, která vyšla v nakladatelství ČSAV jako 1. svazek Studií a pramenů (sekce matematicko-fysikální), vyplnila podstatnou mezeru v naší matematické literatuře. A lze říci, že ji vyplnila úspěšně. Kniha je určena především posluchačům matematiky na universitě v prvním roce studia. Tedy posláním knihy je spolehlivě a srozumitelně seznámit čtenáře se základní a tradiční látkou z algebry. Vzniká pak vážný problém:

1° vybrat vhodně látku;

2° vykládat látku tak, aby pro začátečníka byla plně a snadno srozumitelná a přitom zase nenudila svou obšírností a ponechávala čtenáři možnost samostatného usuzování;

3° zpracovat tradiční látku v duchu dnešní abstraktní algebry a vést čtenáře k abstraktnímu myšlení.

Protože kniha je v podstatě první učebnicí algebry u nás, přistupují ještě otázky terminologické.

Nebude bez zajímavosti, podrobněji si všimnout, jak autor, zkušený pedagog, tento problém řeší.

V úvodu seznamuje stručně autor čtenáře se základními logickými pojmy v matematice (implikace, ekvivalence dvou výroků, negace výroku), s pojmem množiny (ovšem s naivního stanoviska) a základními množinovými operacemi, s označováním čísel písmeny (vzorce) a s axiomatickou methodou v matematice. Pak následuje vlastní obsah knihy. Kniha má tři části; první část (zabírající 208 stránek, tedy víc než třetinu knihy) má název „*Základní pojmy a úkony algebry*", druhá část je věnována *lineární algebře*, třetí část se zabývá *algebraickými rovnicemi jedné neznámé.*

První část je rozdělena do kapitol I.—III.

V kapitole I jsou vyloženy základní algebraické pojmy a racionální čísla. Při tom autor předpokládá u čtenáře znalost přirozených a celých čísel, jež axiomaticky nezavádí. Hned v prvním paragrafu jsou vysloveny vlastnosti rovnosti čísel a poté definován rozklad na libovolné množině, pro přirozená čísla uveden princip úplné indukce. Postupu, který vede k definici rozkladu na množině, užívá autor důsledně při zavádění nových abstraktních pojmů. Tak definici oboru integrity předchází paragraf věnovaný celým číslům, jejich základním vlastnostem (t. j. zákon komutativní, asociativní pro sčítání a násobení, existence a vlastnosti 0 a 1, krácení, distributivní zákon). Z těchto základních vlastností autor odvozuje řadu vět o celých číslech a objasňuje tak čtenáři zásadní význam těchto vlastností. K paragrafu o oboru integrity je připojen podrobný a užitečný odstavec o zkráceném psaní součtů a součinů (Σ, Π) v oboru integrity. Po definici tělesa se autor obrací ke konstrukci podílového tělesa $\mathbf{T}$ z daného oboru integrity $\mathbf{J}$ a ke konstrukci racionálních čísel. Při tom čtenář, jemuž by vadil abstraktní obor integrity $\mathbf{J}$, může si místo $\mathbf{J}$ myslet obor integrity celých čísel. Velmi podrobně je vyloženo zavedení rovnosti v podílovém tělese, počítání s třídami sobě rovných zlomků a vnoření oboru integrity J do jeho podílového tělesa. Tím je čtenář přirozeným způsobem přiveden k pojmu isomorfismu dvou oborů integrity. — V dalších dvou paragrafech si autor všímá uspořádání racionálních čísel podle velikosti a axiomaticky zavádí uspořádaný obor integrity (pomocí axiomů uspořádání). Uvádí pak ještě jinou definici uspořádaného oboru integrity (pomocí kladných prvků), ekvivalentní s původní, a dokazuje větu o jednoznačnosti uspořádání celých čísel a větu o vztahu mezi uspořádáním oboru integrity a jeho podílového tělesa, speciálně tedy větu o jednoznačnosti uspořádání racionálních čísel. Pak se autor zabývá archimedovským uspořádáním, absolutní hodnotou v uspořádaném oboru integrity a ohodnocenými obory integrity.

Další část I. kapitoly je věnována dělitelnosti, a to nejprve obecně v oboru integrity, pak v oboru integrity celých čísel. Je vyložen rozklad celých čísel v součin prvočísel, jeho jednoznačnost a výpočet a připojena stručná poznámka o oborech integrity s jednoznačným rozkladem. Na výklady o dělitelnosti celých čísel navazuje studium číselných kongruencí. Nejprve se vyšetřují kongruence podle prvočíselného modulu p, které přivedou čtenáře k novým příkladům oborů integrity a těles, k tělesům zbytkových tříd modulo p. Teprve nyní, když má připraven konkretní materiál, přistupuje autor k výkladu o charakteristice oboru integrity. Vyšetřováním kongruencí podle složeného modulu přivádí pak čtenáře přirozeným způsobem k pojmu (komutativního) okruhu.

Kapitola I končí paragrafem věnovaným binomické a polynomické větě v oboru integrity charakteristiky 0. Pro charakteristiku p je věta rovněž odvozena (petitem).

Krátká kapitola II shrnuje vlastnosti reálných a komplexních čísel pro pozdější potřebu. Autor se zmiňuje o potřebě, která vede k rozšíření racionálních čísel na čísla reálná. Konstrukci těchto čísel nepodává; odkazuje čtenáře na Jarníkův *Úvod do počtu diferenciálního* nebo na Waerdenovu knížku *Moderne Algebra*. Zato je podána konstrukce komplexních čísel (pomocí uspořádaných dvojic reálných čísel), při tom je vysvětlen pojem adjunkce prvku (z oboru integrity $J' \supset J$) k oboru integrity J.

Pro část III potřebuje autor goniometrické vyjádření komplexního čísla a Moivreovu větu. Tento úkol řeší autor geometricky tak, že zavede geometrické znázornění komplexních čísel v orientované eukleidovské rovině a užije věty (kterou uvádí bez důkazu), že každé prosté zobrazení orientované roviny na sebe, jež má právě jeden samodružný bod O a které zachovává délky úseček, se dá vytvořit rotací roviny kolem bodu O o jistý úhel t. Užitím této věty pak se už snadno zavedou goniometrické funkce, goniometrické vyjádření komplexního čísla a Moivreův vzorec.

Tento postup však sotva některého čtenáře naplní uspokojením. Především lze říci, že tento postup nezapadá do rámce knihy. Na str. 15 se autor zmiňuje o axiomatické methodě; na str. 138 se však bez jakéhokoli odkazu odvolává na jakousi „větu elementární geometrie". V elementární geometrii se však často vychází z jiných předpokladů, než že jsou body dány dvěma reálnými souřadnicemi; kdybychom chtěli opravdu použít nějaké věty z elementární geometrie, museli bychom napřed zjistit, že Gaussova rovina splňuje předpoklady, za nichž byla věta dokázána. To není ovšem nemožné; není to však nikterak jednoduché, má-li se vše opravdu precisovat. Bylo by asi lepší rovnou se odvolat na Jarníkův Úvod do počtu diferenciálního, kde jsou nejdůležitější věci, které souvisí s goniometrickým vyjádřením komplexního čísla, přesně odvozeny.

Čtenář může tedy postupovat takto: Z celého § 14 se v dalším potřebují jen věty 14,7; 14,8; 14,9. Slova „kdež t je jeden z úhlů, které příslušejí podle věty 14,4 k číslu $\alpha/|\alpha|$ mající mu absolutní hodnotu 1", která se vyskytují ve větě 14,7 na str. 140, 1.—2. řádek shora, lze rovněž vynechat. Jinak se v uvedených třech větách nevyskytuje ani pojem úhlu, ani pojem rotace; z pojmů, které nebyly dříve v autorově knize definovány, se užívá jen pojmů sin a cos, které však čtenář zná z Jarníkovy knihy. Věta 14,7 je po vynechání uvedených slov v plném znění dokázána v Jarníkově knize na str. 430,*) posledních 17 řádků. Je tam rovněž vysvětlen příslušný geometrický význam. Ve větě 14,8 stačí zřejmě dokázat vztah (13). Píšeme-li $\cos t + i \sin t = e^{it}$ (viz Jarník, str. 429, 11. ř. zdola) a použijeme-li vztahu $e^{\xi} . e^{\eta} = e^{\xi + \eta}$ (viz Jarník, str. 427, věta 183), dostaneme ihned

$$|\alpha_1| (\cos t_1 + i \sin t_1) |\alpha_2| (\cos t_2 + i \sin t_2) = |\alpha_1| e^{it_1} |\alpha_2| e^{it_2} = |\alpha_1| |\alpha_2| e^{it_1} e^{it_2} =$$

$$= |\alpha_1| |\alpha_2| e^{i(t_1 + t_2)} = |\alpha_1| |\alpha_2| . [\cos (t_1 + t_2) + i \sin (t_1 + t_2)] .$$

Věta 14,9 plyne ihned z věty 14,8 pro n přirozené; pro $n = 0$ je věta triviální a pro n celé záporné dokáže čtenář větu snadno pomocí vztahu $e^{nt} . e^{-nt} = e^{(n-n)t} = e^0 = 1$.— Věty 14,7—14,9 jsme dokázali pomocí základních vlastností funkce e^x (pro komplexní x); čtenář snadno zjistí, že lze tyto věty dokázat též použitím vzorců pro $\sin (t_1 + t_2)$, $\cos (t_1 + t_2)$, aniž mluvíme o funkci e^x.

Je snad dobře si uvědomit, že se goniometrického vyjádření komplexních čísel podstatně používá na př. na str. 350 v důkazu t. zv. základní věty algebry a na str. 407 při výpočtu odmocnin z jedné. V autorově podání jsou tedy tato místa bez solidního základu.

Kapitola III je věnována polynomům a racionálním funkcím. Autor pečlivě rozlišuje mezi funkční a algebraickou definicí polynomu a vysvětluje čtenáři, proč je algebraická definice polynomu pro algebru výhodnější než funkční. Po výkladu funkční definice polynomu jedné proměnné se autor zabývá pojmem algebraické rovnice o jedné neznámé. Říká v podstatě, že algebraická rovnice o jedné neznámé je úloha, najít pro daný polynom $f(x)$ s koeficienty v oboru integrity $\mathbf{J}$ všechny prvky $\xi \in \mathbf{J}$, pro něž $f(\xi) = 0$. Symbolicky označíme tuto úlohu $f(\xi) = 0$ a prvku ξ (o němž se má zjistit, zda existuje, a určit jej), řekneme neznámá. Autor pak důsledně označuje neznámé řeckými písmeny, aby vyznačil, zda běží o rovnici či o nulový polynom ($f(x) = 0$ znamená, že f je nulový polynom, $f(\xi) = 0$ rovnici); zdůrazňuje tím rozdíl mezi rovností a rovnicí. Je jasné, že rozlišování rovnice a rovnosti není ve svých důsledcích bez nesnází (a autor to v předmluvě podotýká); pro účely knihy však plně postačuje. Obor integrity $\mathbf{J}[x]$ polynomů jedné neurčité nad daným oborem integrity $\mathbf{J}$ konstruuje autor pomocí nekonečných posloupností prvků z $\mathbf{J}$, jež mají jen konečný počet prvků různých od nuly. Pak se obrací ke studiu dělitelnosti polynomů jedné neurčité nad tělesem a jejich rozkladu v součin ireducibilních polynomů. Pro výpočet největšího společného dělitele dvou polynomů je uveden Eukleidův algoritmus. Pak autor vykládá dělitelnost polynomů jedné neurčité s celočíselnými koeficienty a ukazuje čtenáři rozdíly s dělitelností polynomů s koeficienty z tělesa; přitom upozorňuje hned, že celá theorie platí pro polynomy s koeficienty z libovolného oboru integrity s jednoznačným rozkladem. Následuje derivace polynomu, Taylorův vzorec a Hornerovo schema, racionální funkce jedné neurčité a jedné proměnné. O resultantu dvou polynomů se autor nezmiňuje(!) (ani zde, ani při symetrických funkcích v kapitole VIII). Zbývající část III. kapitoly je věnována polynomům a racionálním funkcím několika proměnných (několika neurčitých) a dělitelnosti polynomů n neurčitých. Úvodní část končí.

Druhá část knihy obsahuje kapitoly IV—VI.

V kapitole IV, věnované theorii lineárních rovnic bez determinantů, vychází autor z pojmu vektorového n-rozměrného prostoru nad oborem integrity (resp. nad tělesem) a odvozuje jeho základní vlastnosti. Těchto výsledků použije v dalším paragrafu, věnovaném maticím nad oborem integrity a nad tělesem (vlastně jen hodnosti matice jakožto maximálnímu počtu lineárně nezávislých řádků a výpočtu této hodnosti). Tím je připravena půda pro následující paragraf k řešení soustavy lineárních rovnic bez determinantů a určení vlastností těchto řešení. Značnou pozornost věnuje autor numerickému výpočtu

*) Čísla stran se vztahují k 1. vydání Jarníkovy knihy.

řešení soustavy lineárních rovnic. Jasně se zde ukazuje výhodnost tohoto postupu oproti methodě užívající determinantů.

Teprve **kapitola V** jedná o determinantech a jejich užití k řešení lineárních rovnic. Po úvodním paragrafu, v němž autor podrobně vykládá potřebné věty o permutacích (jež rozlišuje od pořadí), obrací se autor k theorii determinantů nad libovolným oborem integrity. Definuje obecný determinant n-tého stupně nad oborem integrity $\mathbf{J}$ jako determinant matice

$$\left\| \begin{matrix} x_{11}, \ldots, x_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n1}, \ldots, x_{nn} \end{matrix} \right\|, \tag{1}$$

kde x_{ik} jsou neurčité nad oborem integrity $\mathbf{J}$, a důsledně pak pracuje s obecnými determinanty. Výhoda tohoto postupu se nejlépe projeví při odvozování věty o násobení determinantů a Laplaceovy věty. K důkazu těchto vět autor užívá toho, že obecný determinant stupně n nad $\mathbf{J}$ je právě takový polynom $f(\ldots x_{ik} \ldots)$ v $\mathbf{J}[\ldots x_{ik} \ldots]$, pro nějž platí:

I. $f(\ldots x_{ik} \ldots)$ je lineární forma v neurčitých každého řádku matice (1).

II. Dosadíme-li do $f(\ldots x_{ik} \ldots)$ za neurčitou x_{ik} neurčitou x_{jk} $(1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq n,$ $i \neq j)$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$, dostaneme polynom nulový.

III. Dosadíme-li do $f(\ldots x_{ik} \ldots)$ za neurčité x_{ik} hodnoty δ_k^i $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, pak polynom nabude hodnoty 1.

Na řadě příkladů ukazuje autor výpočet konkretních determinantů; theorii determinantů aplikuje pak na řešení lineárních rovnic, odvozuje Cramerovo pravidlo a větu o hodnosti matice (nad libovolným tělesem).

Druhá část knihy je ukončena **kapitolou VI**, věnovanou početním operacím s maticemi, lineárním substitucím a kvadratickým formám (nad oborem integrity, resp. nad tělesem). Čtvercové matice dávají příklad nekomutativního okruhu. Jako příklad na početní úkony s maticemi je znovu odvozeno Cramerovo pravidlo. Matic užívá pak autor při výkladech o lineárních substitucích (nad libovolným tělesem) a kvadratických formách (nad tělesem charakteristiky $\neq 2$). Odvozuje transformaci kvadratické formy regulární lineární substitucí na lineární kombinaci čtverců, zákon setrvačnosti a specialisaci pro těleso reálných čísel resp. komplexních čísel; orthogonálními substitucemi se nezabývá. Kapitola je zakončena stručnou zmínkou o Hermitových formách.

Třetí část knihy tvoří kapitoly VII—IX.

Kapitola VII se zabývá existencí kořenů algebraické rovnice o jedné neznámé, a to nejprve nad tělesem komplexních čísel. Autor tu podává Cauchyův důkaz t. zv. základní věty algebry (který spočívá v tom, že reálná funkce $|f(x)|$ komplexní proměnné x, kde $f(x)$ je polynom s komplexními koeficienty stupně $\geqq 1$, nabývá v Gaussově rovině infima a to nemůže být $\neq 0$). Užívá při tom výsledků II. kapitoly (m. j. goniometrického vyjádření komplexního čísla) a odvozuje několik vět o odhadech kořenů algebraické rovnice jedné neznámé s komplexními a reálnými koeficienty. Podrobně vysvětluje čtenáři význam základní věty pro „klasickou" algebru a postavení této věty v moderní algebře. Přivádí tak čtenáře k otázce po existenci kořenů algebraické rovnice s koeficienty v libovolném tělese a ukazuje, jak je třeba tuto otázku formulovat: hledat existenci vhodného rozšíření daného tělesa $\mathbf{T}$. Dokazuje pak existenci kořenového a rozkladového tělesa polynomu nad $\mathbf{T}$ a jeho jednoznačnost. Kapitola je zakončena studiem násobnosti kořenů rovnice a vyšetřováním rovnic s reálnými a racionálními koeficienty.

Kapitola VIII se zabývá symetrickými funkcemi a obvyklým způsobem je podán důkaz hlavní věty o symetrických funkcích (indukcí podle výšky polynomu). Podrobně je probrán výpočet symetrických funkcí. Kapitola končí paragrafem o diskriminantu.

Poslední IX. kapitola je věnována řešení algebraických rovnic. Nejprve autor vyšetřuje rovnice pro n-té odmocniny z jedné a binomické rovnice (nad libovolným tělesem) a podává goniometrické řešení rovnice pro n-té odmocniny z jedné (nad tělesem racionálních čísel). Pak se obrací k definici algebraického řešení rovnic, kterou uvádí v poněkud jiném smyslu než jak je obvyklé (nepožaduje ireducibilitu příslušných binomických resolvent) a obrací se k algebraickému řešení rovnic 2., 3. a 4. stupně. Pro casus irreducibilis rovnice 3. stupně je podáno goniometrické řešení. V pěkné poznámce se autor zmiňuje o historické stránce algebraického řešení rovnic. Jako důležitý příklad rovnic vyšších stupňů, jež lze převést na rovnice nižšího stupně, případně algebraicky řešit, vyšetřuje pak reciproké rovnice. Kapitola je zakončena paragrafem věnovaným geometrickým konstrukcím kružítkem a pravítkem. Autor tu ovšem neprovádí důkazy všech vět.

V Dodatku je podán ještě druhý důkaz základní věty algebry (upravený 2. Gaussův důkaz), užívající existence rozkladového tělesa polynomu.

Ke každému paragrafu (s výjimkou dodatku) je připojena řada pěkných cvičení (je jich celkem přes 700), z nichž mnohá prohlubují probíranou látku. K některým cvičením jsou na konci knihy udána řešení.

Z uvedeného výčtu je patrné, že kniha vzhledem k svému stránkovému rozsahu neobsahuje látky tak mnoho. To je tím, že autor (zejména v první části knihy) všechny úsudky velmi podrobně odůvodňuje, až může vzniknout obava, že na čtenáře zbude velmi málo. Ale není to tak zlé: ten, kdo si propočte cvičení, si na své přijde a nijak nebude zkrácen o samostatný úsudek. Obšírnost výkladu zato zaručuje dokonalou srozumitelnost.

Je zajímavé, že v knize není uveden *pojem grupy*. Podle autorových slov v předmluvě by se tento pojem při probírané látce příliš neuplatnil. Rovněž se autor nezabývá numerickým řešením algebraických rovnic patřících svou povahou do analysy. V obsahu ke knize je vynechán návod ke studiu knihy, seznam axiomů a nejdůležitějších označení. Kořínkovu učebnici o algebře nutno uvítat jako spolehlivou učebnici, velmi pečlivě napsanou, která nejen usnadní studium našim posluchačům matematiky, nýbrž i poskytne vydatnou pomoc učitelům středních škol a gymnasií k vyučování matematice v dnešním duchu.

V knize se však vyskytují také některá závažná nedopatření a recensenti pokládají za svou povinnost na ně upozornit. Takovým nedopatřením je na př. autorův výrok na str. 115, 10. ř. shora: „Jako příklad mějme množinu a, a, a, a, b, b, b, c, kdež...“. Podle definice části množiny (str. 13, 1. ř. shora) je toto „množina“ částí množiny a, b, c, protože každý prvek první „množiny“ je zároveň prvkem druhé. Vidíme, že cosi není v pořádku. Kde je chyba? Slovem „množina“ rozumíme vlastně pravidlo, podle něhož můžeme rozhodnout, co je nebo není prvkem množiny. Nelze tedy mluvit o tom, že by se některý prvek vyskytoval v množině vícekrát.

Tato chyba se ovšem dá snadno napravit; autor ostatně předem dosti podrobně vysvětluje, jak je věc míněna, takže nedorozumění asi nevznikne. Mohlo by se však stát, že by se některý začátečník dal tímto místem svést k nesprávné představě o pojmu množina.

Horší je však situace s t. zv. dosazovacím pravidlem (str. 155, věta 16,5). Prvky množiny $\mathsf{J}_0 = \mathsf{J}[x]$ (kde J je nějaký obor integrity) jsme definovali jako posloupnosti prvků z J (které obsahují jen konečný počet členů různých od nuly). Mějme nyní prvek $f \in \mathsf{J}[x]$. Abychom mohli dosazovací pravidlo vyslovit, musíme napřed definovat, co znamená symbol $f(a)$, kde a je prvek nějakého nadoboru integrity J' nad J. Definice symbolu $f(a)$ však v knize vyslovena není. Z autorovy poznámky (str. 155, 16. ř. zdola) „Polynomy $f(x)$ a $g(x)$ nemusí být napsány v normálním tvaru. (To bude právě případ, na který budeme věty používat.)“ je patrné, že autor měl na mysli asi tuto „definici“ pro $f(a)$: Vyjádříme polynom f nějak pomocí prvku x a místo x pak všude napíšeme a. Abychom však takovou definici mohli vyslovit, musili bychom napřed dokázat, že nezáleží na tom, jak polynom f pomocí prvku x vyjádříme, museli bychom tedy napřed dokázat to, co se chce říci dosazovacím pravidlem.

Je zde tedy jakýsi kruh. Vinu na tomto nedopatření má jistě také (důsledně prováděné) označení $f(x)$. Proč psát $f(x)$, když stačí f? Kdybychom psali jen f, bylo by jasné, že není předem patrné, co znamená $f(a)$. Zdá se tedy, že symbol $f(a)$ musíme definovat jako $\sum_{i=0}^{n} a_i a^i$, kde $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ (normální tvar). Při této definici ztrácí pak ovšem rozumný smysl výrok „dosadit do polynomu, který není napsán v normálním tvaru" a větu 16,5 je tedy třeba formulovat jinak.

Všimněme si ještě, že při naší definici symbolu $f(a)$ platí $f = f(x)$.

Podstatu „dosazovacího pravidla" lze vyslovit asi v tomto tvaru:

(*) Buďte f, g prvky $\mathbf{J}[x]$; nechť $h = f + g$, $k = fg$. Buď a prvek z nějakého nadoboru integrity $\mathbf{J}'$ nad $\mathbf{J}$. Pak platí

$$h(a) = f(a) + g(a), \; k(a) = f(a)\, g(a) \,.$$

Snadný důkaz této věty lze přenechat čtenáři za cvičení. Poznamenejme však toto: Jsou-li $\mathbf{O}_1$, $\mathbf{O}_2$ okruhy a je-li φ zobrazení okruhu $\mathbf{O}_1$ na okruh $\mathbf{O}_2$ takové, že platí implikace

$$a, b \in \mathbf{O}_1 \Rightarrow \varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a + b), \; \varphi(a)\, \varphi(b) = \varphi(ab) \,,$$

říkáme, že φ je homomorfní zobrazení okruhu $\mathbf{O}_1$ na okruh $\mathbf{O}_2$. Homomorfní zobrazení je tedy takové, které převádí součet v součet a součin v součin, které tedy „zachovává okruhové operace". Snadno nahlédneme, že homomorfní zobrazení zachovává i „složitější operace"; platí na př. $\varphi(a(b + c) + d) = \varphi(a) \,.\, (\varphi(b) + \varphi(c)) + \varphi(d)$. Můžeme (bohužel ne zcela jasně) říci, že homomorfní zobrazení převede každý výraz, utvořený tím, že na prvky okruhu $\mathbf{O}_1$ provádíme postupně sčítání a násobení v konečném počtu kroků, ve zcela stejně utvořený výraz z obrazů daných prvků. Nyní lze snad již tušit, jak naše věta souvisí s dosazovacím pravidlem. Zvolíme-li totiž prvek a z $\mathbf{J}' \supset \mathbf{J}$, můžeme každému prvku $f \in \mathbf{J}[x]$ přiřadit prvek $\varphi(f) = f(a)$ z $\mathbf{J}[a]$; podle naší věty je toto zobrazení φ homomorfní. Každý „výraz", sestavený pomocí sčítání a násobení z prvků oboru $\mathbf{J}[x]$, převede se tak tedy ve stejný „výraz", utvořený z prvků $\mathbf{J}[a]$. Je-li tedy na př. $f(g + h) + k = l$ (kde $f, g, h, k \in \mathbf{J}[x]$), je

$$l(a) = \varphi(l) = \varphi(f(g + h) + k) = \varphi(f) \,.\, (\varphi(g) + \varphi(h)) + \varphi(k) =$$
$$= f(a)(g(a) + h(a)) + k(a) \,.$$

Čtenář by se ovšem nyní mohl ptát, co to znamená „výraz, utvořený pomocí sčítání a násobení z prvků daného okruhu". Tuto otázku — na kterou není tak docela snadné dát uspokojivou odpověď — nebudou recensenti rozebírat; upozorňují však, že k tomu, abychom mohli použít dosazovacího pravidla, nemusíme vědět, co je to „výraz, utvořený..."; v každém konkretním případě je jasné, co slovo „výraz" znamená, a stačí pak použít naší věty (*); obyčejně je ovšem třeba použít této věty několikrát. Chceme-li se tomu vyhnout, můžeme dokázat na př. tuto větu:

(**) Je-li

$$g = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_i} f_{ij}, \quad \text{je} \quad g(a) = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_i} f_{ij}(a).$$

Není to sice věta, která by tvrdila, že „v libovolném výraze" můžeme místo x napsat a, je to však věta, která asi (vyslovíme-li ji event. pro více neurčitých) vystačí ve všech případech, kde se v knize dosazovacího pravidla používá. Na př. na str. 164 v důkaze věty 18,4 je vztah $f(x) = (x - a)\, Q(x) + b$; chceme dokázat, že platí $f(a) = b$. Abychom mohli použít věty (**), stačí položit $m = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $f_{11} = x - a$, $f_{12} = Q$, $f_{21} = b$.

Čtenář tedy pomocí věty (*) nebo pomocí věty (**) jistě již sám snadno dokáže všechna tvrzení, která autor odvodil pomocí t. zv. dosazovacího pravidla. Naskýtá se ovšem ještě otázka, jak dokázat to, co vlastně chtěl autor říci větou 16,5.

Chtěli bychom ve skutečnosti dokázat asi toto: Předpokládejme, že jakýsi polynom (pro jednoduchost v jedné neurčité) je napsán dvěma formálně odlišnými způsoby, že tedy máme polynom ,,vyjádřen pomocí neurčité x ve dvou různých tvarech". Zajímá nás nyní, co se stane, jestliže v obou těchto vyjádřeních všude prvek x nahradíme prvkem a z nějakého nadoboru integrity J' nad J; přesněji řečeno, zajímá nás, zda po provedení naznačených operací ,,nám vyjde na obou stranách totéž", zda nám oba výrazy dají týž prvek (z J').

Uvědomíme-li si nyní přesný smysl položené otázky, zjistíme, že věta (*) na ni dává kladnou odpověď. Je-li daný polynom nějak ,,vyjádřen pomocí prvku x", můžeme zřejmě předpokládat, že je příslušný výraz sestaven z polynomů, napsaných v normálním tvaru; v nejhorším případě vezmeme za tyto polynomy prvky oboru J a prvek x. Je-li však polynom f ,,napsán v normálním tvaru", pak ,,utvořit prvek $f(a)$" neznamená nic jiného než ,,napsat všude a místo x". Je-li tedy polynom F ,,sestaven" určitým způsobem z polynomů $f_1, \ldots, f_n$, napsaných v normálním tvaru, pak podle věty (*) dostaneme prvek $F(a)$ tím, že sestavíme obdobný výraz z prvků $f_1(a), \ldots, f_n(a)$, což podle naší úvahy neznamená nic jiného než v celém výraze nahradit symbol x symbolem a. Vidíme tedy, že hodnotu $F(a)$ (která je definována tím, že do *normálního* tvaru polynomu F ,,napíšeme" a místo x) můžeme ,,vypočítat" také tak, že polynom F vyjádříme v libovolném jiném tvaru a do tohoto tvaru ,,napíšeme" a místo x. Dosadíme-li tedy a místo x do libovolných dvou vyjádření daného polynomu F, dostaneme v obou případech prvek $F(a)$, tedy v obou případech totéž. — Stejná úvaha zřejmě platí i pro polynomy ve větším počtu neurčitých.

Čtenář může ovšem namítnout, že náležitě nerozlišujeme mezi prvkem a znakem pro onen prvek; ale zde je snad ze souvislosti patrné, jak je co míněno. Podobně by bylo třeba zpřesnit na př. autorův výrok na str. 154, 9. ř. zdola: ,,Každý prvek z $\mathsf{J}[x]$ napsaný ve tvaru (2) nazýváme normální tvar polynomu." Prvek z $\mathsf{J}[x]$ zřejmě není tvar polynomu; mělo by se snad říci, že *výrazu* (2) říkáme normální tvar polynomu.

Dále je třeba upozornit ještě na jednu věc. Autor dokazuje, že ke každému oboru integrity J existuje obor integrity J', který obsahuje J a zároveň nějaký transcendentní prvek nad J. Autor konstruuje pak zcela určitý obor integrity $\mathsf{J}[x]$; nezdůrazňuje však důležitou věc, že obory $\mathsf{J}[x]$ a $\mathsf{J}[y]$ jsou isomorfní, jestliže x a y jsou neurčité nad J. Tato okolnost je ovšem přímým důsledkem úvah na str. 150—151. Autor dále nezdůrazňuje, že nakonec potřebujeme jen jakýsi obor integrity $\mathsf{J}[x]$, kde x je neurčitá nad J, a že nikterak nezáleží na tom, jak jsme $\mathsf{J}[x]$ zkonstruovali. Přitom je v konstrukci $\mathsf{J}[x]$ jeden malý háček, který by mohl vést k nedorozumění. Prvky z $\mathsf{J}[x]$ jsme utvořili jako jisté speciální posloupnosti prvků z J, při čemž jsme některé z těchto posloupností ztotožnili s prvky z J. A právě při tomto ztotožňování by mohl vzniknout omyl; může se totiž stát, že již obor integrity J obsahuje nějakou posloupnost tvaru $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$, kde $a_n \in \mathsf{J}$. Zde se ovšem ,,ztotožnění" nesmí brát doslova. Tato nepříjemnost nastává při konstrukci $\mathsf{J}[x_1, x_2]$ na str. 190. Prvek x_1 je posloupnost $(0, 1, 0, 0, \ldots)$. K oboru integrity $\mathsf{J}[x_1]$ tvoříme nyní obor integrity $(\mathsf{J}[x_1])[x_2]$; tvoříme tedy posloupnosti prvků z $\mathsf{J}[x_1]$. Protože jsme však posloupnost $(1, 0, 0, \ldots)$ nahradili prvkem 1, zjistíme, že se prvek x_2 rovná téže posloupnosti jako x_1. Je tedy zřejmé, že takto nelze věc chápat. Nejlépe je snad zapomenout na konstrukci $\mathsf{J}[x]$ a uvědomit si jen, že ke každému oboru integrity — stručně řečeno — existuje neurčitá a že existuje v podstatě jen jeden takový obor integrity $\mathsf{J}[x]$. Adjungujeme pak postupně k J neurčitou x_1, k $\mathsf{J}[x_1]$ neurčitou x_2 atd.

Tiskové chyby si čtenář asi sám snadno opraví (na př. na str. 178, 6. ř. zdola, je na_nx^{n-} místo na_nx^{n-1}; na str. 227, 6. ř. zdola, je ,,Výpočet matice" místo ,,Výpočet hodnosti matice"; na str. 322, 2. ř. shora, je a_2^2 místo x_2^2 a pod.). Dále upozornil autor recensenty na chybu na str. 357, 17. ř. shora. Je psáno: „Je zároveň vidět, že dané nadtěleso **U** nad **T** může obsahovat různá kořenová tělesa polynomu $f(x)$." Dále pak: „Obsahuje jich právě tolik, kolik obsahuje různých kořenů rovnice $f(\xi) = 0$." V poslední větě má zřejmě být „nejvýš tolik" místo „právě tolik"; dva různé kořeny mohou vytvářet totéž kořenové těleso, jak ukazuje příklad kvadratického polynomu.

Konečně by snad bylo dobře upozornit začátečníka ještě na jednu věc. Na str. 15, 7. ř. shora je napsáno: „Budu předpokládat, že pravidla pro počítání s čísly racionálními jsou čtenáři známá." Ve skutečnosti se však předpokládá velmi málo; předpokládá se vlastně jen to, že čtenář ví, že množina celých čísel splňuje axiomy uspořádaného oboru integrity a axiom úplné indukce. Posluchač na vysoké škole pozoruje, že se vše zpřesňuje a vidí, že často se musí oprostit od představ, které si ze střední školy nebo z gymnasia přinesl, a není nadšen slovy: „předpokládám, že to znáte". Knihu by však („theoreticky") mohl studovat i člověk, který by o racionálních číslech nic nevěděl; za definici množiny celých čísel by mohl vzít uspořádaný obor integrity, pro jehož kladné prvky platí princip úplné indukce (jestliže by věřil, že takový obor existuje, event. že je jednoznačně určen — ovšem až na isomorfismus). Dále již se všechno definuje a dokazuje; od racionálních čísel k reálným nás dovede Jarník a s komplexními je to již snadné. Reálným číslům věnuje autor pěkný začátek § 12; dále podrobně vykládá o číslech komplexních. Bylo by snad třeba trochu více zdůraznit, že obdobná situace je i u čísel celých a racionálních. Tomu autor věnuje jen poznámku pod čarou na str. 23; tato poznámka je však důležitá pro čtenáře, který chce získat jakýsi přehled o základech analysy, a proto na ni recensenti zvláště upozorňují.

Jan Mařík a *Václav Vilhelm*, Praha.

Hugo Steinhaus: **Matematický kaleidoskop.*)** Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1953 stran 125, náklad 4400, cena váz. 28 Kčs.

Polský matematik *Hugo Steinhaus* napsal před několika roky knihu „*Kalejdoskop matematyczny*", která byla r. 1949 přeložena do ruštiny za přímého dohledu autora, který také provedl četné změny a doplňky v textu. Podle tohoto ruského vydání (které též bylo před časem možno dostat na našem knižním trhu) byl nyní pořízen český překlad. Steinhausova knížka se podstatně liší od běžných knih s thematikou z t. zv. „rekreační matematiky". Obvykle bývá v takových knihách matematika zabalována do různých historek a anekdot, které se k ní nijak nevztahují. Sovětské vydavatelství upozorňuje v předmluvě na tu přednost Steinhausova spisku, že je zde čtenáři předložen s vybraným vkusem pouze matematický materiál a tak se u něho přirozeně rozvíjí skutečný zájem a hloubavost. Autor sám nazývá své dílko obrázkovou knížkou; je tu tedy celkem 125 „obrázků", vzatých převážně z elementární matematiky. Některá themata z vyšších partií jsou už zpracována ve zjednodušené formě a tak, že jejich smyslu porozumí čtenář s minimálním matematickým vzděláním. Ovšem na důkazy předkládaných pouček nemůže začátečník ani pomyslet, autor se spokojí tím, že vzbudí čtenářův zájem.

Český překlad Steinhausovi uškodil, neboť se překladatel dopustil mnoha nepřesností, což dvojnásob těžce nese kniha, která je určena mládeži a která bude pro mnohého našeho studenta první samostatnou četbou.

Nejprve si všimneme thematiky spisu. Z elementární geometrie čerpá několik odstavců, týkajících se geometrie trojúhelníka (odst. 9 a 39), zlatého řezu (odst. 29), uvádí se ukázka konstrukce Mascheroniovy a Steinerovy (odst. 41 a 42) a Kochańského přibližná rektifikace kružnice. Tu často výkres je podstatným doplňkem textu. Slovní formulace je totiž

*) Nesprávně přeloženo *G. Steinhaus.*

mnohde tak stručná, že čtenář je nucen číst z obrázku (na př. označování geometrických objektů je obvykle patrné z obrázků). Několik odstavců je věnováno popisu některých rovinných křivek (na př. cykloidy, konchoidy, kuželoseček, sinusoidy, traktrix a j.). Do planimetrie spadají ještě známé úlohy o kulečníkovém stole, kde se má určitým způsobem volit dráha koule, jestliže předpokládáme, že úhel dopadu koule se rovná úhlu odrazu (odst. 25—27). Úloze o minimální vzdálenosti dvou bodů v rovině nebo na povrchu tělesa jsou věnovány odst. 28, 74 a 97. Stereometrie je zastoupena popisem některých jednoduchých těles, zvláště pravidelných mnohostěnů (odst. 70—85). Na tuto thematiku navazuje náčrtek projekčních method pro účely zeměpisné (projekce Mercatorova a stereografická).

Elementární aritmetika je zastoupena méně. Několik slov o velkých prvočíslech je v odst. 12, o dvojkové soustavě v odst. 23 a o posloupnosti Fibonacciho v odst. 30—31.

Šachová hra poutala vždycky zájem matematiků i laických zájemců. Ve Steinhausově knížce je několik odstavců věnováno šachovým problémům. R. 1850 byla položena otázka, kolika způsoby je možno na šachovnici rozestavit osm královen, aby ani jedna z nich nemohla vzít druhou. Problém — jímž se mimochodem zabýval i *Gauss* — je tu předložen spolu s podobnými jen informačně. Zájemci najdou řešení na př. v *Ahrensově* knize „*Matematische Unterhaltungen und Spiele*", Leipzig 1901. S šachovou hrou vzdáleně souvisí různé rekreační hry (na př. „vlk a ovce" — odst. 9, kdysi oblíbená hra „na patnáct" — odst. 17). S Eulerovou úlohou o 36 důstojnících, kteří patří do 6 různých pluků a k 6 různým hodnostem tak, že každý pluk je zastoupen právě jednou hodností (odst. 16), se čtenář blíže seznámí rovněž u Ahrense.

V některých odstavcích se Steinhaus dotýká topologie. V odst. 108 je známá Eulerova úloha o mostech v Královci (viz též Ahrens, str. 317). Otázka zní: Je možno (spojitě) přejít všech sedm mostů města Královce tak, abychom přešli každý jen jednou? Mosty vedou na ostrov podle obrázku v knize reprodukovaného. Do topologie patří též nauka o uzlech (odst. 110 a 111). Hříčky s Möbiusovým listem jsou thematem odst. 112 a 113. Z minulého století pochází otázka, zda je možno povrch globu vždycky položit čtyřmi barvami tak, aby sousední „státy" měly rozdílnou barvu (odst. 116).

Geometrie čísel je zastoupena v odst. 56 Minkowského poučkou, ovšem vyslovenou bez důkazu (o počtu mřížových bodů uvnitř konvexního rovinného útvaru souměrného vzhledem k počátku a s plochou, jejíž obsah je roven aspoň 4).

Z kombinatoriky a z theorie pravděpodobnosti seznamuje autor čtenáře s Pascalovým trojúhelníkem a Gaussovou křivkou (odst. 119—120). Kniha je zakončena třemi odstavci s thematikou spíše fysikální (mechanika, dva optické klamy).

Při čtení musí každého čtenáře zarazit nedokonalost překladu. Některé překladatelovy prohřešky jsou takového druhu, že je snadno postřehne každý maturant. Uvedu namátkově několik příkladů.

Předně je to nesprávná terminologie. Překladatel soustavně zaměňuje pojem „rovina" (плоскост) za pojem „plocha". Tak na str. 44 místo „bod roviny" říká „*plošný bod*", na str. 62 „rovinný řez válce" nazývá „*plochým řezem*", na str. 48 mluví o „*plošné* křivce", na str. 95 rozvíjí kužel „*plošně*" atd. Závažnou chybou je dále na př. nesprávný překlad slova „грань", které znamená „stěna" mnohostěnu a které bylo přeloženo výrazem „hrana" (str. 74 překladu). Termín „сложение чисел" svedl překladatele k překladu „složení" místo samozřejmě správného „sčítání" (str. 31). Na téže stránce si plete posloupnost s řadou a na str. 21 nazývá jednu rovnici „výrazem".

Jsou i chyby jiného druhu. V odst. 24 na str. 25 se v ruské předloze mluví o hektogramech. Asi proto, že se takových závaží u nás neužívá, byl český text upraven na gramy, ale připojená tabulka zůstala v hektogramech.

Odst. 55 začíná těmito záhadnými slovy: ,,Obsah jakéhokoliv mnohoúhelníka (který se sám neprotíná) a leží v mřížových bodech...". Pohled do ruské předlohy nás však poučí, že v mřížových bodech nemá ležet ani obsah, ani mnohoúhelník, ale jeho vrcholy. I na jiných místech knihy vypadly z překladu některá slova, na štěstí to tak nekomolí smysl jako v prve uvedeném případě (na př. str. 116, řádek 1. zdola). Na str. 90 překladatel text naopak doplnil po svém. Orthodromu zde charakterisuje svými slovy jako kružnici, ,,která leží na povrchu koule a prochází oběma místy". Odchylky od předlohy jsou též jiného druhu. Souvětí na str. 115 patří až na str. 116 na konec odst. 119. Tímto přehozením vět vzniká divná situace, kdy se nejprve mluví o Gaussově křivce jako o známé a na další stránce se tento pojem teprve zavádí.

Snad stačí těchto několik ukázek, aby si čtenář udělal svůj názor. Jestliže chceme z řad naší mládeže vychovat zdatné matematiky, nestačí pro ni jen vybrat sebevýznamnější dílo ze světové literatury, nýbrž musíme věnovat velikou pečlivost jeho překladu. Obávám se, že vítězové druhého ročníku matematické olympiady, kteří dostali Steinhausovu knihu mezi knižními odměnami, budou k překladateli méně shovívaví, než byl recensent.

Jiří Sedláček, Praha.

O. A. Volberg: **Deskriptivní geometrie.** Z ruštiny přeložil *Miloslav Zelenka.* Vydalo nakladatelství Československé akademie věd ve sbírce ,,Věda všem", sekce matematicko-fysikální, sv. 3, Praha 1953, stran 346, obrázků 325, cena 37,20,— Kčs.

Volbergova učebnice Лекции по начертательной геометрии, která vyšla v roce 1947, byla u nás recensována *Emilem Kraemerem* v ,,Časopise pro pěstování matematiky", roč. 76, str. 149—151 (Praha 1951), kde se čtenář může dosti podrobně seznámit s jejím obsahem. Zde od podrobného popisu obsahu upouštím a stručně jen upozorňuji, že kniha je psána pro budoucí učitele matematiky, aby si při studiu dobře osvojili ty methody deskriptivní geometrie, které ve své učitelské praxi nejvíc potřebují. Hned z předmluvy poznáváme, že se této učebnice užívá na vyšších pedagogických učilištích (pedvuzech), jež jsou vysokými školami (tedy nikoli školami třetího stupně), a že je zaměřena k tomu, aby se čtenáři naučili rýsovat obrazy, které potřebují při vyučování stereometrii. Proto autor sleduje hlavně názornost zobrazení ve spojení s methodou jednoho obrazu a příslušným určením monogenního útvaru. Před tím ovšem vykládá všeobecné principy promítání a pomocné partie z projektivní geometrie, hlavně homologii v rovině, a nejdůležitější a nejrozšířenější methodu deskriptivní geometrie, totiž methodu dvou zobrazení. V dalším výkladu kombinuje tyto methody s methodou dvou stop a soustřeďuje pozornost na řešení metrických úloh jak v promítání středovém, tak i rovnoběžném (včetně axonometrie). Všude rozvádí podrobně methodickou stránku věci a vzájemnou souvislost různých method, kdežto technickým aplikacím se nevěnuje; tato učebnice není tedy určena pro techniky. Ve výkladu Volberg často dává přednost názornému podání před ryzí strohou matematickou formulací, u mnohých pojmů mu stačí jen objasnění místo definice. Elementární pojmy (bod, rovina, přímka) pokládá autor za známé a nedefinuje je.

Všimněme si nyní českého překladu. *Miloslav Zelenka* se pokusil o věrný (tedy nikoli volný) překlad a možno říci, že svůj nesnadný úkol zvládl dobře. Pokud to bylo možné, přidržoval se české terminologie (až na malé výjimky, jež uvedu). Pouze u nových pojmů byl nucen volit nové termíny; to se týká hlavně těch partií, kde v methodě dvou zobrazení se dává přednost jednomu obrazu před druhým; Zelenka tu užil vhodných názvů ***hlavní*** a ***vedlejší*** obraz. V těch místech byl překlad obtížný a přece se Zelenkovi zdařil. Výklad je naprosto jasný, názvosloví jednoduché a nenásilné. Pro překlad byla obtížná i kapitola IX, kde Zelenkou užité názvy ***absolutní polarita*** (to je polarita v nevlastní rovině, v níž nevlastní přímce obyčejné roviny odpovídá nevlastní bod kolmic k této rovině), dále ***hlavní polarita*** (tím se myslí obraz absolutní polarity při středovém promítání) a pod., nejsou ještě u nás obvyklé, ale zato výstižné. U termínů, jež jsou u nás běžné, nebál se Zelenka odchýlit od doslovného překladu. Tak na příklad Volbergův termín Бесконечноудаленные элементы překládá naším běžným termínem *nevlastní elementy*, a to v celém textu, což je jistě k prospěchu věci. Jenom na několika místech tomu tak není, na př. na obr. 316 a 317, kde je přímo zakreslena „nekonečně vzdálená rovina"; působí to spíše schematicky. Nebylo to snad nutné, uvážíme-li, že je to v poslední kapitole, která předpokládá u čtenáře hlubší znalosti projektivní geometrie než ostatní text, takže se lze domnívat, že tomuto pokročilejšímu čtenáři by nepůsobilo obtíže zvolit při přechodu od projektivní geometrie k afinní kteroukoli rovinu za nevlastní.

Odchylek od terminologie u nás vžité je málo. Na str. 194 nazývá Zelenka vzdálenost dvou po sobě následujících bodů, v nichž šroubovice protíná površku válce, *krokem* šroubovice, zatím co u nás je pro tento pojem běžným název *výška závitu*. Volbergův termín *vedlejší perspektiva* Zelenka rovněž převzal v souhlase s terminologií hlavního a vedlejšího obrazu, výše popsanou, což zajisté není závada, ale mohl místo nejasné poznámky pod čarou na str. 115 připomenout, že pro tento pojem užíváme u nás termínu *perspektivní půdorys*. V perspektivě důležitý termín *horizontála*, jejž užil Zelenka, je u nás méně vžitý než termín *horizont*, ale užívá se obojího. Poněkud nezvykle působí v perspektivě Volbergův pojem *viditelného prostoru*; je to vlastně rozšíření pojmu zorného kužele na celý poloprostor, který obsahuje perspektivní průmětnu (nákresnu) a je ohraničený rovinou s ní rovnoběžnou, procházející okem; to ovšem nespadá na vrub překladatele, který se naopak snažil objasnit význam zorného kužele připojením vhodné poznámky pod čarou na str. 20.

Pokud jde o symboliku, přizpůsobil se Zelenka v označování bodů velkými písmeny a přímek malými písmeny naší normalisaci (v ruském originálu je označení právě opačné) a myslím, že učinil dobře, když v překladu vynechal šest řádek, které na str. 6 originálu uvádí Volberg pod nadpisem Обозначения a kde činí úmluvu o označení bodů, přímek a rovin; v textu se totiž autor této úmluvy nedrží důsledně a při naší normalisaci je celkem zbytečná. Jinak zachoval překladatel autorovu symboliku až na jednu výjimku, když totiž na str. 10 symbol incidence $\sim$ nahradil znakem $\in$. Tato změna se mi nezdá právě vhodná, protože znak $\in$ je vžitý v jiném smyslu v theorii množin, kde symbolisuje vztah „býti prvkem množiny", který na příklad není symetrický, zatím co incidence je symetrická (z tvrzení, že bod A je incidentní s přímkou b plyne, že přímka b je incidentní s bodem A).

Předností Zelenkova překladu je řada poznámek pod čarou, kterými překladatel napravuje některé nepřesnosti autorovy, na něž upozornil Kraemer ve své recensi, výše citované. Jde na příklad o neúplně formulované předpoklady v některých větách. Systematičnost knihy tím Zelenka neporušil, pouze na str. 106 se mu do poznámky 18, vloudil termín *dvojpoměr*, který v rejstříku nenacházíme. Autor sice v petitu užívá pojmy, vyložené později (zde na str. 106 je to na příklad pojem úplného čtyřrohu, který je vyložen na str. 159, nebo involuce, jejíž objasnění je až na str. 272), ale pojmu dvojpoměru neužívá. Na štěstí naši čtenáři tento pojem většinou znají, takže toto nedopatření není vážné.

Obrázky v českém vydání byly velmi pečlivě narýsovány a jsou vytištěny lépe než v ruském originálu. Pouze obrázky 15, 25, 28, 321 a 323 jsou špatně skloněné. Horší chyba se přihodila na str. 125 a 126, kde obrázky 128 I a 128 II jsou zaměněny, ale čtenář to z textu snadno pozná. Překladatel však v obrázcích i v textu provedl jinou záměnu proti originálu, že totiž vyměnil čáry tečkované s čárkovanými. Tak došlo k tomu, že v českém vydání jsou pomocné čáry rýsovány tečkovaně a neviditelné hrany těles čárkovaně. Ani v naší literatuře to není obvyklé a myslím, že by bylo bývalo lépe, kdyby se právě v tomto ohledu byl překladatel držel věrně originálu. V textu pak překladatel nerozlišuje čárkování čar od tak zvaného šrafování (viz str. 133, řádek 12 zdola, kde se mluví o tom, že stíny se v hlavním obraze čárkují místo šrafují). Ostatně ve šrafování mohly být vržené a vlastní stíny výrazněji rozlišeny, což platí i pro ruský originál. Názornosti obrázků, kterou autor sleduje především, by to jen prospělo.

Shrnu-li v jedné větě celkový obraz o českém vydání, musím říci, že všechny výtky, jež jsem uvedl a z nichž leckteré snad jsou příliš subjektivní, nemohou ohrozit jinak velmi zdařilý český překlad, který je i tiskárnou a nakladatelstvím pěkně vypraven. Při velkém rozsahu knihy není divu, že došlo jen k malému vlastně počtu nedopatření. Jest si jen přáti, aby český překlad splnil svůj úkol, t. j. aby nezůstal na našich fakultách nevyužit. Při té příležitosti je pozoruhodné, že ze sovětské literatury o deskriptivní geometrii vychází u nás právě tato Volbergova kniha. V předmluvě totiž autor píše, že je to vlastně první pokus „v ruském jazyce osvětlit obecné methody deskriptivní geometrie s projektivního hlediska". O několik řádek výše praví, že znalost projektivní geometrie je přece jen nutná „pro dostatečně plné a hluboké proniknutí do method deskriptivní geometrie". Upozorňuje na to, že na západě se tento směr rozšířil už v druhé polovině minulého století, zatím co v SSSR se uplatňuje teprve v poslední době. U nás tato kniha vychází v době, kdy se snažíme ve svých osnovách pro vysoké školy projektivní geometrii značně omezit, zatím co sovětští odborníci rozšiřují projektivní geometrii mezi svými studenty. Přitom právě u nás byla skvělá tradice projektivní geometrie a každý znalec zajisté potvrdí správnost Volbergových názorů. I u nás bylo už dříve vyzkoušeno, že znalost projektivní geometrie podstatně usnadňuje studium deskriptivní geometrie. Končím tedy přáním, aby se Volbergova kniha u nás uplatnila i v tomto smyslu.

Závěrem vypisuji seznam tiskových chyb, ovšem s výjimkou těch, které jsem už uvedl výše, aby si je čtenář mohl opravit:

Na titulním listě a vzadu v tiráži místo A. O. Volberg má být O. A. Volberg.

Str. 66, řádek 15 shora: ve slově promítání vypadla písmena o, m.
Str. 75, řádek 3 shora: místo znaku $=$ ve formuli (2) má být $\equiv$.
Str. 106, poslední řádek (před poznámkou pod čarou): místo znaku $=$ má být znak $\equiv$.
Str. 123, řádek 21 zdola: místo znaku $=$ má být znak $\equiv$.
Str. 124, řádek 3 shora: místo znaku $=$ má být znak $\equiv$.
Str. 132, řádek 15 shora: místo znaku $=$ má být znak $\equiv$.
Str. 140, řádek 9 zdola: spojka *a* na konci řádku je vytištěna vzhůru nohama.
Str. 161, řádek 12 shora: místo ε má být ϵ.
Str. 228, řádek 6 shora: místo $M^*1 = M_\mu 2$ má být $M^*_\nu 1 = M^*_\mu 2$.
Str. 309, poslední řádek: místo znaku $=$ má být znak $\equiv$.
Str. 318, řádek 21 shora: místo znaku $=$ má být znak $\equiv$.
Str. 319, řádek 5 zdola: místo $\boldsymbol{\delta}$ má být $\boldsymbol{\sigma}$.
Str. 320, řádek 11 zdola: v závorce místo $A \boldsymbol{\epsilon} e_2$ má být $A \epsilon e_2$.
Str. 334, řádek 4 shora: místo *se středem p* má být *se středem P*.
Str. 338, řádek 10 shora: v druhém řádku matice vypadla písmena, správně tento řádek začíná r: t'_∞, ...

Karel Havlíček, Praha.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 78 (1953)

REFERÁTY

O ANALYTICKÝCH VLASTNOSTECH HOMEOMORFNÍCH ZOBRAZENÍ V ROVINĚ

(Výtah z přednášky prof. Dr *Kazimierze Kuratowského*, proslovené dne 1. června 1953 v matematické obci pražské.)

Budiž F uzavřená množina na kulové ploše S_2 a $R_0 + R_1 + R_2 + \dots$ rozklad množiny $S_2 - F$ na konečný nebo spočetný součet komponent. Budiž $p_i \neq \infty$ nějaký bod komponenty R_i. Je známo, že pro každou komplexní funkci $w = f(z)$ spojitou a různou od nuly a od nekonečna na množině F existuje spojitá komplexní funkce $\varphi(z)$ a konečný počet celých exponentů $k_0, k_1, \dots, k_n$ tak, že

$$f(z) = e^{\varphi(z)}(z - p_0)^{k_0} \dots (z - p_n)^{k_n}$$

(při tom $k_0 + k_1 + \dots + k_n = 0$) na množině F. Exponenty k_i závisí toliko na funkci $f(z)$ a na F, nezávisí však na volbě bodů p_i v komponentě R_i.

Prof. Kuratowski se zabýval problémem, jak lze charakterisovat systémy $\sigma_f = (k_0, k_1, \dots, k_n)$ těchto exponentů, jestliže předpokládáme, že f je netoliko spojité, nýbrž i prosté (tedy homeomorfní). V případě, že F je množina lokálně souvislá, dokázal (v přednášce byl důkaz v hlavních rysech naznačen) toto:

Je-li $f(z)$ spojitá a prostá komplexní funkce různá od nuly a od nekonečna na lokálně souvislé a uzavřené množině $F \subset S_2$, pak systém σ_f je přípustný (jistého řádu $n \geqq 0$) a naopak, je-li σ přípustný systém (nějakého řádu $n \geqq 0$), pak existuje lokálně souvislá kompaktní množina F na S_2 a spojitá, prostá komplexní funkce $f(z)$ na F (různá od nuly a od nekonečna) tak, že $\sigma_f = \sigma$. (Dokonce dokázal prof. Kuratowski o něco více.) Při tom přípustný systém n-tého řádu ($n \geqq 0$) skládající se z $n + 1$ celých čísel je definován indukcí takto: systém řádu 0 skládá se pouze z 0. Systém celých čísel je řádu n-tého, když vznikne z nějakého systému řádu $(n - 1)$-ho odečtením čísla ν ($\nu = -1$ nebo 0 nebo 1) od některého čísla tohoto systému a přidáme-li k takto vzniklému systému číslo ν.

Ke konci prof. Kuratowski položil tento problém:

Budiž dán přípustný systém $\sigma = (k_0, k_1, k_2, \dots, k_n)$ a navzájem různé body

$p_0, p_1, \ldots, p_n$ *na* S_2. *Existuje uzavřená křivka* F, *oddělující každé dva z bodů* p_i, *tak, že*

$$(z - p_0)^{k_0} \ldots (z - p_n)^{k_n}$$

je na F *funkce prostá?*

Tato přednáška thematicky úzce souvisela s cyklem přednášek, které prof. Kuratowski proslovil v Praze v březnu a dubnu 1951.

Vladimír Knichal, Praha.

NEURČITÁ DVOUHODNOTOVÁ BOOLEOVA FUNKCE

Autorova zpráva o práci, která se týká konstrukce hradlových (relátkových a pod.) obvodů, jež mají realisovat dané booleovské funkce; z laboratoře matematických strojů ČSAV.

(Došlo dne 16. června 1953.)

1. Neurčitá dvouhodnotová Booleova funkce vznikla při výzkumu methody na synthesu jednotaktních hradlových schemat s jedním vstupním a m výstupními póly pro stroj. Pro informaci uveďme, že hradlových obvodů konstruovaných na základě hradlových schemat se používá při konstrukci telefonních nebo signálních zařízení, zařízeních pro automatické ovládání na dálku, v zabezpečování vlakové dopravy, při konstrukci jednotek strojů na zpracování informací a jinde. Nejobyčejnějším typem hradla je elektromagnetické relátko nebo hradlová elektronka a pod. Hradlová funkce je název pro dvouhodnotovou Booleovu funkci ve fysikální interpretaci v theorii hradlových obvodů.

2. Booleovu dvouhodnotovou funkci „určitou" můžeme vyjádřit mimo jiné dvěma možnými symbolickými tvary: jeden je sestaven pomocí proměnných „$\tilde{x}_i$", kde $\tilde{x}_i$*) je buď $\bar{x}_i$ nebo x_i, operací „ . ", „+" a „—" a pomocí závorek „)", „(" [1], druhý je sestaven pomocí „0" a „I"; hodnoty 0 a I jsou uspořádány podle možných vyhodnocení proměnných x_i Booleovy funkce (funkce o n proměnných má 2^n možných vyhodnocení).

Příklad: Mějme dvouhodnotovou Booleovu funkci X definovanou tabulkou na obr. 1. Tuto tabulku čteme takto: je-li $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, je funkce $X = 0$ atp.

Na obr. 1 máme tabulkový tvar funkce X. Její algebraický tvar v úplném normálním tvaru zní takto:

$$X = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 .$$

Z tohoto úplného normálního tvaru můžeme odvodit různým přetvářením různé tvary téže funkce. Na příklad vytknutím společných proměnných

*) Toto označení proměnných použil Jablonskij [3] ve dvouhodnotových Booleových funkcích při důkazu některých vět. Za jistých okolností se můžeme dívat rovněž na algebraické tvary funkcí obsahující některé ze symbolů $\tilde{x}_i$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$, jako na neurčité funkce.

z prvého a druhého členu. V závorce dostaneme $x_3 + \bar{x}_3$, což je rovno I. Dostáváme tvar:

$$X = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 .$$

x_1	x_2	x_3	X
0	0	0	0
0	0	I	0
0	I	0	I
0	I	I	I
I	0	0	0
I	0	I	I
I	I	0	0
I	I	I	I

Obr. 1.

3. Již od počátku vývoje matematických pomůcek na synthesu hradlových schemat až po současnou dobu se používá výlučně algebraického tvaru Booleovy dvouhodnotové funkce. Tento má pro výstavbu sítí principiální nevýhodu. Zkonstruujeme-li totiž podle tohoto tvaru schema, podle zásad popsaných na příklad v pramenu [I], str. 50—56, je toto schema „serioparalelní". Za jistých okolností mohou však být vhodnější někdy schemata „neserioparalelní". Chceme-li tato „neserioparalelní" schemata získat, musíme zavést buď jiné operace do algebry hradlových schemat vedle operací základních, jako na př. GAVRILOV [I], nebo zavést jako LUNC operace na charakteristické funkci matice schematu [2] a pod. Jiná cesta vede přes neurčitou dvouhodnotovou Booleovu funkci v tabulkovém tvaru.

4. Neurčitá dvouhodnotová Booleova funkce má alespoň jednu hodnotu „neurčitě definovánu", t. j. alespoň jedna hodnota je rovna „$\sim$". Za tento symbol můžeme dosadit buď 0 nebo I.

Příklad:

x_1	x_2	x_3	χ	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	I	I	I	I	I	I
0	I	0	I	I	I	I	I
0	I	I	$\sim$	0	I	0	I
I	0	0	$\sim$	0	0	I	I
I	0	I	0	0	0	0	0
I	I	0	0	0	0	0	0
I	I	I	I	I	I	I	I

Obr. 2.

Z příkladu na obr. 2 vidíme, že neurčité funkci χ vyhovují 4 „určité" funkce $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$.

Na neurčitou dvouhodnotovou Booleovu funkci se můžeme dívat jako na formulář, který můžeme několika různými předepsanými způsoby vyplnit. Uvědomme si, co to znamená, když neurčitá funkce má na r funkčních místech ($r \leqq 2^n$) neurčitou hodnotu $\sim$. Kdyby platilo $r = 1$, potom té funkci vyhovují 2 „určité" funkce: jedna z nich má na místě neurčité hodnoty neurčité funkce hodnotu 0 a druhá má na tomto místě hodnotu I. Na ostatních místech mají obě „určité" funkce stejné funkční hodnoty jako neurčitá funkce. Z příkladu jsme viděli, že je-li $r = 2$, vyhovují neurčité funkci 4 funkce „určité". Obecně potom platí, že jakmile má neurčitá funkce r neurčitých míst, vyhovuje jí 2^r „určitých" funkcí.

Poznámka: Jedním z charakteristických rysů úloh v theorii hradlových obvodů je nesmírný počet jejich možných řešení a postupů, jak dojít k jednomu a témuž tvaru řešení. To se dá právě vyjádřit velmi výstižně a přehledně neurčitými hradlovými funkcemi.

5. Závěrem poznamenejme, že neurčité Booleovy funkce jsem použil v methodě neurčitých hradlových funkcí na synthesu jednotaktních hradlových schemat s jedním vstupním a m výstupními póly pro stroj. Její popis bude uveřejněn v dalším článku. Methoda má název podle toho, že se při ní provádějí operace hlavně pomocí neurčitých funkcí. Methoda je určena stroji, t. j. může být navržen stroj, který touto methodou provádí úplně automaticky návrh hradlových schemat.

LITERATURA

[1] *M. A. Gavrilov:* Theorie reléových kontaktových schemat, Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1953 (překlad z ruského originálu: *М. А. Гаврилов:* Теория релейно-контактных схем, Издательство Академии наук СССР, Москва 1950 Ленинград);

[2] *А. Г. Лунц:* Алгебраические методы анализа и синтеза контактных схем, Известия Академии наук СССР, сер. мат. т. **16**, № 5 (1952), 405—426;

[3] *С. В. Яблонский:* О суперпозициях функций алгебры логики, Математический сборник, новая серия, т. **30** (72):2 (1952). 329—348.

František Svoboda, Praha.

Redakce: Matematický ústav Československé akademie věd Praha II, Žitná 25, tel. 241193. — Administrace: Nakladatelství Československé akademie věd, Praha II, Vodičkova 40, tel. 236375. — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 48,—, cena jednotlivého sešitu Kčs 12,—. Novinové výplatné povoleno Okrskovým poštovním úřadem Praha 022: j. zn. 309-38-Ře-52. — Dohlédací poštovní úřad Praha 022.— Tisknou a expedují Pražské tiskárny n. p., provozovna 05 (Prometheus), Praha VIII, Tř. Rudé armády 171.— Náklad 1200 výtisků.