VNOŘITELNOST SEMIGRUP

DT: 519.41/.47

(Referát o článku *Vlastimila Ptáka*, Praha: „*О включении семигрупп*", uveřejněném v časopisu Чехословацкий математический журнал T. 2 (77) 1952, str. 247—271).

V elementárních učebnicích algebry se dokazuje známá věta, podle níž každý komutativní okruh bez dělitelů nuly může být vnořen do tělesa. V prvém vydání své Moderní algebry VAN DER WAERDEN položil následující otázku: Je totéž možné i pro nekomutativní okruhy bez dělitelů nuly?[1])

Bylo zjištěno MALCEVEM [2], že na tuto otázku jest odpověděti záporně. Jeho práce [2] obsahuje příklad nekomutativního okruhu bez dělitelů nuly, který nelze vnořit do tělesa.

Známý, dosud neřešený problém spočívá v tom, najít nutné a postačující podmínky, aby daný nekomutativní okruh bez dělitelů nuly mohl být vnořen do tělesa. Tento problém jest obtížnější než se snad zdá na první pohled.

Jest proto účelné, zabývati se nejprve analogickou otázkou pro obory s jedinou operací. Takovým algebraickým útvarem, který odpovídá nekomutativnímu okruhu bez dělitelů nuly, jest semigrupa. Okruh bez dělitelů nuly můžeme charakterisovat také tím, že v něm je možno krátit (s obou stran) nebo, což je totéž, že v něm podíl dvou prvků (v daném pořadí) jest jednoznačně určen, existuje-li. Budeme se tedy zabývat algebraickými obory s jedinou operací, která splňuje vlastnosti krácení, totiž semigrupami. Neprázdnou množinu S, na níž je definována algebraická operace „násobení", nazveme *semigrupou*, jestliže násobení je associativní a má následující dvě vlastnosti:

$$ax = ax' \Rightarrow x = x' ,$$

$$ya = y'a \Rightarrow y = y' .$$

Problém, který se (mimo jiné) řeší v autorově práci, jest tento:

Nalézti nutné a postačující podmínky pro to, aby daná semigrupa S dala se vnořit do grupy. Tento problém je důležitý v algebře samé již proto, že každý okruh bez dělitelů nuly se stane po odstranění prvku 0 semigrupou vzhledem k násobení. Má však význam i v aplikacích. Díváme-li se na příklad na levé strany lineárních diferenciálních rovnic s analytickými koeficienty

[1]) Litereraturu viz v *Чехосл. мат. журнал*, T. 2 (77) 1952, str. 271.

jako na operátory, zjistíme snadno, že tvoří nekomutativní semigrupu. Jak ukázal WINTNER, jest tato semigrupa vnořitelná. Význam podobných výsledků pro analysu je nasnadě.

Ve své práci [2] uvádí Malcev následující nutnou podmínku pro vnořitelnost semigrupy:

(M) *Nechť S obsahuje osm prvků a, b, c, d, x, y, u, v takových, že jsou splněny následující tři relace:*

$$
\begin{aligned}
ax &= by\,, \\
cx &= dy\,, \\
au &= bv\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Potom musí být splněna také relace

$$cu = dv\,. \tag{2}$$

Naznačíme důkaz nutnosti podmínky (M): Snadno se zjistí, že v každé grupě relace (2) plyne z relací (1). Jestliže nyní existuje grupa G obsahující semigrupu S, potom relace (2) je splněna v G a tedy i v S, neboť násobení na S souhlasí s násobením v G.

Malcev sestrojil semigrupu S, obsahující osm prvků a, b, c, d, x, y, u, v takových, že tři relace (1) jsou splněny, avšak relace (2) nikoliv. Zřejmě taková semigrupa nemůže být rozšířena na grupu.

Autorova podmínka je zobecnění podmínky (M). Úvahou analogickou předešlé se snadno shledá, že následující podmínka je nutná, aby semigrupa byla vnořitelnou.

(M') *Obsahuje-li S několik prvků $a_1, a_2, \ldots, a_r$, které splňují několik relací, pak kterákoli relace v S mezi prvky $a_1, a_2, \ldots, a_r$, která může být odvozena z daných relací* v grupě, *musí být splněna též v S.*

Je-li tato podmínka porušena, semigrupa S zřejmě nemůže být vnořena do grupy.

Autor dokazuje, že tato podmínka je také dostačující. To znamená, že jediný způsob, jakým semigrupa může být nevnořitelnou, je následující: V semigrupě existuje konečně mnoho prvků $a_1, a_2, \ldots, a_r$, které splňují několik relací. Z těchto relací v grupě vyplývá další relace, která však v S není splněna.

Naznačíme v dalším stručně postup důkazu a dále některé další výsledky, týkající se relací v semigrupách a speciálně definice semigrup pomocí generátorů a definujících relací.

Nechť S je semigrupa, V systém generátorů S. Označme $\mathfrak{S}$ a $\mathfrak{G}$ volnou semigrupu, resp. grupu s V jakožto systémem volných generátorů. Označme E ekvivalenci na $\mathfrak{S}$ odpovídající přirozenému homomorfismu $\mathfrak{S}$ na S. Předpokládejme nyní, že S je obsažena v grupě G_0. Nechť G je průnikem všech podgrup G_0, obsahujících S. Je snadno dokázat, že přirozený homomorfismus $\mathfrak{S}$ na S může být rozšířen zřejmým způsobem na homomorfismus $\mathfrak{G}$ na G.

Odtud plyne, že ekvivalence na $\mathfrak{S}$, odpovídající přirozenému homomorfismu $\mathfrak{S}$ na S, jest indukována na $\mathfrak{S}$ regulární ekvivalencí $\mathfrak{G}$, t. j. normální podgrupou $\mathfrak{N}$ v $\mathfrak{G}$. (Z některých šetření Malcevových v [6] a [7] následuje, že normální podgrupa $\mathfrak{N}$ není jednoznačně určena ekvivalencí E.) Na druhé straně, máme-li semigrupu S takovou, že ekvivalence E na $\mathfrak{S}$ odpovídající přirozenému homomorfismu $\mathfrak{S}$ na S jest indukována na $\mathfrak{S}$ normální podgrupou $\mathfrak{N}$ v $\mathfrak{G}$, pak S jest vnořitelná. Vskutku lze snadno dokázat, že podmnožina grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, skládající se ze všech tříd tvaru $\alpha\mathfrak{N}$, $\alpha \in \mathfrak{S}$, tvoří semigrupu isomorfní s S. Tyto výsledky mohou být shrnuty takto:

S je vnořitelná, když a jen když pro libovolné dva prvky α, $\beta \in \mathfrak{S}$

$$\alpha E \beta \iff \alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{N},$$

kdež $\mathfrak{N}$ jest vhodná normální podgrupa v $\mathfrak{G}$.

Je-li S libovolná semigrupa, utvořme následující množinu:

$$\mathfrak{M} = \underset{x}{E}\,[x = \alpha\beta^{-1}, \quad \alpha \in \mathfrak{S}, \quad \beta \in \mathfrak{S}, \quad \alpha E \beta].$$

Nazýváme ji množinou relací, příslušnou ekvivalenci E.

Z některých dalších vyšetřování vyplývá, že následující podmínka je nutná a postačující pro vnořitelnost:

$$\alpha E \beta \iff \alpha\beta^{-1} \in [\mathfrak{M}].$$

Přitom $[\mathfrak{M}]$ znamená nejmenší normální podgrupu v $\mathfrak{G}$ obsahující $\mathfrak{M}$. To jest ohlášený výsledek.

Druhá část práce je věnována podrobné diskusi některých vlastností množiny relací.

Utvořme nejprve nejmenší podgrupu, obsahující $\mathfrak{M}$; označíme ji $\{\mathfrak{M}\}$. Dokážeme dále, že podgrupa $\{\mathfrak{M}\}$ má některé jednoduché vlastnosti. Užívajíce těchto vlastností, stanovíme nutnou a postačující podmínku, aby množina $\mathfrak{R}$ prvků tvaru $\alpha\beta^{-1}$, $\alpha \in \mathfrak{S}$, $\beta \in \mathfrak{S}$ byla množinou relací příslušnou nějaké regulární ekvivalenci s oběma kráceními. Ukazuje se, že tato podmínka je zajímavou modifikací normality podgrupy $\{\mathfrak{M}\}$.

Následující odstavec obsahuje vyšetřování, za jakých podmínek podgrupa $\{\mathfrak{M}\}$ je normální, t. j.

$$\{\mathfrak{M}\} = [\mathfrak{M}].$$

Ukazuje se, že se to může stát jen ve velmi speciálních případech.

Práce jest zakončena diskusí postačující podmínky pro vnořitelnost, pocházející od O. Ore [3]. Semigrupa S je vnořitelná, jestliže ke každým jejím dvěma prvkům a, b existují dva prvky a', b' tak, že $a'a = b'b$. To je možno dokázat přímo pomocí konstrukce zlomků. Užívajíce obecných výsledků předešlých vyšetřování, podáváme jiný krátký důkaz této věty, který nám zároveň osvětluje s jiné strany význam Oreovy podmínky.

Vlastimil Pták, Praha.