Werk

Label: Article

Jahr: 1932

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0061|log50

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Příspěvek k teorii determinantů.

Karel Rössler.

(Došlo 28. ledna 1932.)

V tomto článku zobecňuji jednu známou větu z teorie determinantů.

Budiž dána n-řadová matice (a_{ik}). Utvořme matici $(A_{(i)(k)})$, kde $A_{(i)(k)}$ je q-řadový determinant z (a_{ik}), jehož indexy řádkové tvoří kombinaci $(i) \equiv (i_1, \ldots, i_q)$ čísel $1, \ldots, n$ a indexy sloupcové kombinaci $(k) \equiv (k_1, \ldots, k_q)$. Pak platí známá věta:[1]) Má-li matice (a_{ik}) hodnost q, má matice $(A_{(i)(k)})$ hodnost 1. Dokážeme větu obecnější:

Má-li matice (a_{ik}) hodnost p, má matice $(A_{(i)(k)})$ hodnost $\binom{p}{q}$.

Důkaz: V následujícím budeme předpokládati, že $p < n$, neboť případ $p = n$ jest důsledkem věty Sylvester-Frankeovy. V matici (a_{ik}) zaměňme řady tak, aby $\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1p} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{p1} \ldots a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$. Tím se v matici $(A_{(i)(k)})$ některé řady nejvýše znásobily (-1) a vyměnily. Její hodnost zůstala ovšem beze změny. V matici (a_{ik}) je po této úpravě prvních p řádků lineárně nezávislých a všechny ostatní řádky jsou jejich lineárními kombinacemi. Platí tedy pro každé a_{ik}:

$$a_{ik} = \sum_{r=1}^{p} c_{ir}\, a_{rk}. \tag{1}$$

Vyloučíme-li triviální případ $q > p$, máme:

$$A_{(i)(k)} = \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} \ldots a_{i_1k_q} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{i_qk_1} \ldots a_{i_qk_q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\Sigma c_{i_1r}\, a_{rk_1}) \ldots (\Sigma c_{i_1r}\, a_{rk_q}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (\Sigma c_{i_qr}\, a_{rk_1}) \ldots (\Sigma c_{i_qr}\, a_{rk_q}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{i_11} \ldots c_{i_1p} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{i_q1} \ldots c_{i_qp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1k_1} \ldots a_{pk_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1k_q} \ldots a_{pk_q} \end{pmatrix} = \sum_{[r]} \begin{vmatrix} c_{i_1r_1} \ldots c_{i_1r_q} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{i_qr_1} \ldots c_{i_qr_q} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{r_1k_1} \ldots a_{r_qk_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{r_1k_q} \ldots a_{r_qk_q} \end{vmatrix},$$

[1]) Viz B. Bydžovský: Základy teorie determinantů, odst. 52.