Werk

Label: Article

Jahr: 1930

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0059|log49

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Petrova elementární metoda vyšetřování Fourierových řad.

Eduard Čech.

V listopadu 1929 konal prof. Petr na pozvání Masarykovy university v Brně tři přednášky, z nichž jednu věnoval Fourierovým řadám. V ní vyložil prof. Petr mimo jiné velmi zajímavou metodu elementárního vyšetřování Fourierových řad funkcí tvaru $\int_a^x F(t)\,dt$ (a funkcí poněkud obecnějších). Tuto metodu vyložil prof. Petr také v připravovaném novém vydání svého Integrálního počtu. Nalezl jsem, že metodu prof. Petra lze bez obtíží upraviti tak, že se aplikuje na libovolné funkce s konečnou variací.

1. Metoda prof. Petra opírá se podstatně o studium řady

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu}. \tag{A}$$

Odkazuje čtenáře na cit. Integrální počet (odst. 136b), uvedu zde bez důkazu věty, kterých je v dalších potřeba. Řada $\varphi(x)$ konverguje pro všecka reálná x. Mohu tedy klásti pro $n = 1, 2, \ldots$

$$\varphi(x) = s_n(x) + r_n(x), \tag{1}$$

kde

$$s_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu}. \tag{2}$$

Zřejmě

$$\varphi(x) = s_n(x) = r_n(x) = 0 \text{ pro } x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots; n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Dále jest

$$\varphi(x) = \frac{\pm \pi - x}{2} \text{ pro } -2\pi < x < 2\pi,\ x \neq 0, \tag{4}$$

při čemž znamení $\pm \pi$ souhlasí se znamením čísla x. Je-li $0 < \eta < \pi$,

pak pro $n = 1, 2, \ldots$ jest

$$|r_n(x)| \leqq \frac{2}{(2n+1)\sin\frac{\eta}{2}} \tag{5}$$

pro všecka x, která se od nejbližšího násobku 2π liší alespoň o η. Konečně jest pro $n = 1, 2, \ldots$ a pro všecka reálná x

$$|r_n(x)| \leqq \frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

2. Má-li funkce $f(x)$ v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ Riemannův integrál buďto vlastní nebo aspoň absolutně konvergentní, pak Fourierovou řadou funkce $f(x)$ nazýváme řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

kde

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos \nu x\, dx, \qquad b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin \nu x\, dx.$$

Tedy Fourierova řada funkce $f_1(x) - f_2(x)$ vznikne formálním odečtením z Fourierových řad funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$. Součet prvých $n+1$ členů Fourierovy řady funkce $f(x)$ v čísle u jest podle (2)

$$\sigma_n(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,.\, s'_n(x-u)\, dx. \tag{7}$$

3. Má-li funkce $f(x)$ konečnou variaci v $\langle a, b\rangle$, lze, jak známo, položiti $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, při čemž $f_1(x)$, $f_2(x)$ jsou neklesající funkce v $\langle a, b\rangle$, jež jsou všude tam spojité, kde $f(x)$ je spojitá. Z toho důvodu mohu se omeziti na neklesající funkce. Ostatně čtenář snadno shledá, že užitím elementárních vět o totální variaci bylo by lze zcela obdobně studovati přímo libovolnou funkci s konečnou variací.

4. Nechť tedy $f(x)$ neklesá v $\langle 0, 2\pi\rangle$ a nechť u je dané číslo z $\langle 0, 2\pi\rangle$. Pro $p = 2, 3, 4, \ldots$ nechť $\langle x_0, x_1, \ldots x_p\rangle$ je dělení intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, jehož norma $\mathrm{Max.}\,(x_k - x_{k-1}) = \delta$ pro $p \to \infty$ konverguje k nule. Mimo to nechť pro každé p bod u splyne s některým z bodů $x_k = x_k(p)$, třeba s bodem x_q.

Při daných n, p podle věty o přírůstku[1]) existují čísla $y_k = y_k(n, p, u)$ $(1 \leqq k \leqq p)$ taková, že

[1]) Tento název zdá se mi vhodnější než název věta o střední hodnotě diferenciálního počtu.

$$x_{k-1} < y_k < x_k, \tag{8}$$

$$s_n(x_k - u) - s_n(x_{k-1} - u) = s'_n(y_k - u)\,(x_k - x_{k-1}). \tag{9}$$

Zvolme ještě y_0 tak, aby bylo

$$a = x_0 < y_0 < y_1. \tag{10}$$

5. Dokážeme nyní (za předpokladu, že $f(x)$ neklesá v $\langle 0, 2\pi\rangle$), že součet Fourierovy řady funkce $f(x)$ v každém vnitřním bodě u intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ jest roven $\frac{1}{2}[f(u+0) + f(u-0)]$.[2]) Při důkaze vyjde nám následující odhad zbytku: Nechť $|f(x)| \leqq M$ v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$. Při daném $\varepsilon > 0$ nechť kladné $\eta < u$, $\eta < 2\pi - u$ je tak malé, aby

$$f(u+\eta+0) - f(u+0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad f(u-0) - f(u-\eta-0) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

Pak pro všecka n tak veliká, že

$$\frac{8M}{(2n+1)\sin\frac{\eta}{2}} < \frac{\pi}{2}\varepsilon, \tag{12}$$

jest

$$|\sigma_n(u) - \tfrac{1}{2}[f(u+0) + f(u-0)]| \leqq \varepsilon. \tag{13}$$

Při důkaze vyjdeme od zřejmé identity

$$-\sum_{k=1}^{p}[r_n(x_k - u) - r_n(x_{k-1} - u)]\,f(y_k) = \tag{14}$$

$$= \sum_{k=1}^{p}[f(y_k) - f(y_{k-1})]\,r_n(x_{k-1} - u) - r_n(x_p - u)\,f(y_p) + r_n(x_0 - u)\,f(y_0),$$

kterou budeme studovati při pevném n pro $p \to \infty$. Ježto $x_0 = 0$, $x_p = 2\pi$, $0 < \eta < u$, $\eta < 2\pi - \eta$, podle (5) poslední dva členy napravo jsou absolutně

$$\leqq \frac{4M}{(2n+1)\sin\frac{\eta}{2}}.$$

V součtu na pravé straně člen $k = q + 1$ podle (3) je roven nule, neboť $x_q = u$. Ostatní členy rozdělíme ve tři skupiny

I: $u < x_{k-1} < u + \eta$; II: $u > x_{k-1} > u - \eta$; III: $|u - x_{k-1}| \leqq \eta$.

V I každý člen podle (6) jest absolutně $\leqq \frac{\pi}{2}[f(y_k) - f(y_{k-1})]$.

Mimo to v I jest v každém členu podle (8)

$$u = x_q \leqq x_{k-2} < y_{k-1} < y_k < x_k < x_{k-1} + \delta < u + \eta + \delta,$$

[2]) Existence těchto limit plyne, jak známo, z monotonnosti funkce $f(x)$.

takže

$$\left|\sum_{I}[f(y_k)-f(y_{k-1})]\,r_n(x_{k-1}-u)\right| \leqq \frac{\pi}{2}\sum_{I}[f(y_k)-f(y_{k-1})] \leqq$$

$$\leqq \frac{\pi}{2}[f(u+\eta+\delta)-f(u+0)].$$

Stejně vychází

$$\left|\sum_{II}[f(y_k)-f(y_{k-1})]\,r_n(x_{k-1}-u)\right| \leqq \frac{\pi}{2}[f(u-0)-f(u-\eta-\delta)].$$

Konečně v III mohu užíti (5), takže

$$\left|\sum_{III}[f(y_k)-f(y_{k-1})]\,r_n(x_{k-1}-u)\right| \leqq \frac{2}{(2n+1)\sin\frac{\eta}{2}}\sum_{k=1}^{p}[f(y_k)-f(y_{k-1})]$$

$$\leqq \frac{4M}{(2n+1)\sin\frac{\eta}{2}}.$$

Celkem tedy pravá a tudíž i levá strana ve (14) jest absolutně nejvýš rovna číslu

$$\frac{8M}{(2n+1)\sin\frac{\eta}{2}}+\frac{\pi}{2}[f(u+\eta+\delta)-f(u+0)]+$$

$$+\frac{\pi}{2}[f(u-0)-f(u-\eta-\delta)],$$

jež pro $p\to\infty$ má podle (12) limitu $<\pi\varepsilon$.

Obraťme se ke studiu levé strany. Podle (1) lze ji psáti

$$\sum_{k=1}^{p}[s_n(x_k-u)-s_n(x_{k-1}-u)]\,f(y_k)-$$

$$-\sum_{k=1}^{p}[\varphi(x_k-u)-\varphi(x_{k-1}-u)]\,f(y_k). \tag{15}$$

Tedy při pevných n, η zvolených podle (11) a (12) výraz (15) pro veliká p jest absolutně menší než $\pi\varepsilon$. Nyní prvý sčítanec v (15) podle (9) zní

$$\sum_{k=1}^{p}f(y_k)\,s'_n(y_k-u)\,(x_k-x_{k-1}),$$

což podle (8) pro $p\to\infty$ má limitu

$$\int_0^{2\pi}f(x)\,s'_n(x)\,dx.$$

Dále jest podle (3) a (4), ježto $x_q = u$

$$\varphi(x_k - u) - \varphi(x_{k-1} - u) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{x_k - x_{k-1}}{2} & \text{pro } k = q,\ q+1, \\ -\frac{x_k - x_{k-1}}{2} & \text{pro ostatní } k. \end{cases}$$

Tedy druhý sčítanec v (15) zní

$$-\frac{\pi}{2}[f(y_q) + f(y_{q+1})] + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} f(y_k)(x_k - x_{k-1}),$$

což podle (8) pro $p \to \infty$ má limitu

$$-\frac{\pi}{2}[f(u+0) + f(u-0)] + \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

Tedy podle (7) pro $p \to \infty$ výraz (15) konverguje k

$$\pi[\sigma_n(u) - \tfrac{1}{2}(f(u+0) + f(u-0))],$$

čímž podle předchozího nerovnost (13) jest odvozena.

6. Případy $u = 0$, $u = 2\pi$ neposkytují již ničeho nového. Cestou úplně stejnou jako v odst. 5 vyjde, že Fourierova řada má součet $\frac{1}{2}[f(0+0) + f(2\pi - 0)]$. Přesněji: při daném $\varepsilon > 0$ nechť kladné $\eta < \pi$ je tak malé, aby

$$f(\eta + 0) - f(0+0) < \frac{\varepsilon}{2},\quad f(2\pi - 0) - f(2\pi - \eta - 0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro všecka n tak veliká, že

$$\frac{4M}{(2n+1)\sin\frac{\eta}{2}} < \frac{\pi}{2}\varepsilon,$$

jest

$$|\sigma_n\binom{0}{2\pi} - \tfrac{1}{2}[f(0+0) + f(2\pi - 0)]| \leqq \varepsilon.$$

7. Z odhadů zbytků je zřejmé, že pro $0 \leqq \alpha < a < \beta < b \leqq 2\pi$ z předpokladu, že (neklesající) funkce $f(x)$ je v $\langle a, b\rangle$ spojitá, následuje v $\langle \alpha, \beta\rangle$ stejnoměrná konvergence Fourierovy řady k součtu $\frac{1}{2}[f(u+0) + f(u-0)] = f(u)$. Podle toho, co v odst. 3 bylo řečeno, máme tedy provedeno úplné vyšetření konvergence Fourierovy řady funkce $f(x)$, která v celém intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ má konečnou variaci. Případ, kdy $f(x)$ má konečnou variaci pouze v nějakém okolí vyšetřovaného bodu u, převede se na případ zde probraný užitím Riemannovy věty, podle níž chování se Fourierovy řady v místě u závisí pouze na hodnotách funkce $f(x)$ v okolí bodu u.