Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1921

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0050|log4

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Číslo 1.

ČASOPIS

PRO PĚSTOVÁNÍ

MATHEMATIKY A FYSIKY.

REDIGUJÍ

V ČÁSTI MATHEMATICKÉ
Ph. dr. **BOH. BYDŽOVSKÝ**, professor české university,

V ČÁSTI FYSIKÁLNÍ
dr. **BOH. KUČERA**, professor české university,

ÚLOHY POŘÁDÁ
dr. **K. RYCHLÍK**, s. docent české university a techniky,

A VYDÁVÁ

JEDNOTA ČESKÝCH MATHEMATIKŮ A FYSIKŮ.

ROČNÍK L.

V PRAZE
Tiskem B. Stýbla. — Nákladem Jednoty českých mathematiků a fysiků.
1920.

-4/5. T.J. — 8° Math. I 768

Předplatné 30·— Kč.

Obsah — Sommaire.

(Les resumés français seront réunis à la fin de l'année.)

Strana

August Žáček: O sesilovači stejnosměrného proudu (Sur l'amplificateur du courant continu) 1

K. Petr: O separaci kořenů rovnice algebraické dle reálných částí kořenů a o důkaze fundamentáln věty algebry (Sur la séparation des racines d'une équation algébrique selon les parties réelles des racines et sur une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre) 23

Vinc. Jarolímek: O určité imaginárné ploše stupně 2. druhu III. (Sur une quadrique imaginaire de la III. espece) 33

Zprávy. — Communications.

Šestý mezinárodní sjezd matematiků (Le VIe congrès international des mathématiciens) 45

Matematický ústav university v Strasburku (L'institut mathématique de l'université de Strasbourg) 47

Věstník literární. Recense knih. — Bibliographie. Analyses.

Jan Vojtěch: Základy mathematiky k studiu věd přírodních a technických. Referuje (analysé par) M. Lerch 42

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky. | Supplément à l'usage des élèves d'écoles secondaires.

K. Rychlík: O kvadratických tělesech číselných (Sur les corps quadratiques de nombres) 49

J. Klíma: Geometrické sestrojování stereoskopických obrázků (La construction géométrique des figures stéréoscopiques) 59

J. Zahradníček: Stroboskopická methoda ve fysikální praksi (La méthode stroboscopique appliquée dans la physique) 68

Astronomická zpráva (Bulletin astronomique) 77

Úlohy: *a*) z mathematiky (problèmes mathématiques) 1—15; *b*) z deskriptivní geometrie (p. de géométrie descriptive) 1—3 79

Příspěvky literární, jakož i zprávy týkající se *obsahu* »Časopisu« vůbec, přijímají redaktoři: Ph. Dr. Bohumil Bydžovský, Karlín, Riegrova 5, *(články mathematické)*, prof. dr. Bohumil Kučera, Praha II., »U Karlova«, Fysik. ústav *(články a úlohy fysikální)* a docent dr Karel Rychlík, Král. Vinohrady, Slezská ul. 66 *(úlohy mathematické a řešení všech úloh)*.

Přesahují-li příspěvky *dva* tiskové archy, jest třeba schválení výboru k jejich otištění. Recense knih cizojazyčných buďtež stručné. Themata úloh se přijímají k otištění jen, jsou-li opatřena řešením.

Rukopis budiž psán po 1 straně a náležitě upraven k tisku, obrazce schopné reprodukce buďtež ve *dvojnásobném* zvětšení, jinak se na náklad autorův zhotoví neb opraví. Rukopisy nepřijaté se nevracejí. Korrektury buďtež vráceny co nejdříve. Za obsah článku odpovídá jeho autor.

O sesilovači stejnosměrného proudu.

Napsal **August Žáček.**

Obsah:

I. Část teoretická.
Elektronové lampy o dvou elektrodách.
Elektronové lampy s mřížkou: 1. Vlastnosti lampy. 2. Konstanty lampy a jich měření
Teorie sesilovače stejnosměrného proudu.
Kompensační metody k určování S, D, R_i.
II. Část experimentální.
Jednolampový sesilovač.
Dvojlampový sesilovač.
Měření veličin S, D, R_i.

V Comptes Rendus pařížské Akademie (svazek 168, str. 1321 - 3, r. 1919) udávají Henry Abraham a Eugène Bloch konstrukci sesilovače stejnosměrného proudu těmito slovy: „Obsahuje-li anodový kruh lampy odpor velikosti vnitřního odporu lampy (ca 50.000 *ohmů*), způsobují variace napětí na mřížce variace anodového proudu a tím i variace napětí na koncích odporu. Tyto variace napětí lze přenášeti direktně na mřížku následující lampy, zařadíme-li do vedení pomocnou baterii, jež dává mřížce takové střední napětí, při kterém lampa pracuje nejlépe. Opakujeme-li toto uspořádání, dostáváme odporový sesilovač pro všechny frekvence, specielně i pro frekvence nejnižší, ba dokonce i pro proud stejnosměrný. Poněvadž napětí pomocné baterie mezi dvěma lampami se dá měniti pouze skokem (vždy o 2 *volty*, užíváme-li akumulátorů), takže není možno přesně naregulovati potenciál mřížky, odporučuje se zařaditi do anodového kruhu ještě malý, proměnlivý odpor, jímž možno žádané napětí na mřížce naregulovati úplně přesně. Ta okolnost, že vedle topné a anodové baterie je třeba ještě dalších baterií pomocných, způsobuje, že se toto uspořádání nehodí pro frekvence radiotelegra-

fické a akustické, za to jest užitečné při frekvencích velmi nízkých a nutné při sesilování stejnosměrného proudu pomocí lamp.“

Autoři neuvádějí, jakým způsobem měří variace napětí na odporu v anodovém kruhu poslední lampy, necitují žádných dat a pozorování, z nichž by bylo možno posouditi cenu popsaného sesilovače. Konečně postrádáme v jejich popisu údajů o tom, jaké vlastnosti mají míti užité lampy a jak má býti sesilovač konstruován, aby jeho účinnost byla co největší.

Lze očekávati, že tohoto sesilovače bude hojně používáno při fysikálních pracích a to hlavně pro proud stejnosměrný; nebude tedy od místa, všimnouti si blíže těch otázek, jimž jmenovaní autoři nevěnovali pozornosti.

Podám proto v prvním oddílu této práce teorii sesilovače stejnosměrného proudu, u něhož se měří výsledná změna napětí na koncích odporu poslední lampy galvanometrem v kompensačním uspořádání. Z odvozeného vzorce ihned vyplyne závislost citlivosti sesilovače na konstantách lamp, dále poznáme při tom směrnice pro konstrukci sesilovače; uvidíme konečně, kdy užití sesilovače jest výhodné a kdy nemá významu Při odvozování tohoto vzorce vycházíme z pojmu charakteristik a pojmů z nich odvozených, jež se tolik osvědčily při teoretickém projednávání ostatních aplikací lamp. Proto v úvodu tyto pojmy, jež zavedli Schottky a Barkhausen, krátce vyložíme.

Kompensační uspořádání, o němž jsme mluvili, dovoluje vypracovati velmi přesnou a jednoduchou metodu k měření charakteristických dat elektronových lamp. Podáme proto ku konci prvního oddílu popis této metody, pokud vím, dosud nepopsané a odvození příslušných vzorců.

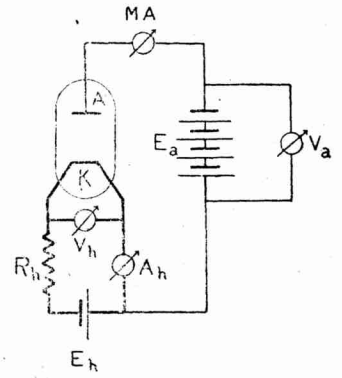
Druhý díl práce — experimentální — obsahuje nejprve měření se sesilovačem jednolampovým a dvojlampovým, z nichž je patrný souhlas odvozených formulí s měřeními. Další měření týkají se určování charakteristických dat lamp novou metodou.

I Část teoretická.

Elektronové lampy o dvou elektrodách.

Tak zvané elektronové lampy jsou vakuové trubice o extrémně vysokém zředění (ca 10^{-4} *mm*) se dvěma, třemi i více

elektrodami. Nejprve si všimneme případu nejjednoduššího, ale pro další výklady základního, totiž elektronové lampy o dvou elektrodách. První elektrodu — „katodu“ — z tenkého wolframového drátu možno „topnou baterií“ E_h zahřáti do bílého žáru. Kruh katody (viz obr. 1.), obsahující katodu K, topnou baterii E_h, ev. též reostat R_h a aparáty k měření intensity topného proudu (ampermetr A_h nebo ke katodě paralelně připojený voltmetr V_h), budeme nazývati „topným kruhem“. Druhá elektroda A — zvaná „anodou“ — mívá buď tvar pláště kruhového válce koncentrického s katodou, nebo bývá ve formě deštičky paralelní s katodou. Anoda jest udržována na určité potenciální diferenci vůči



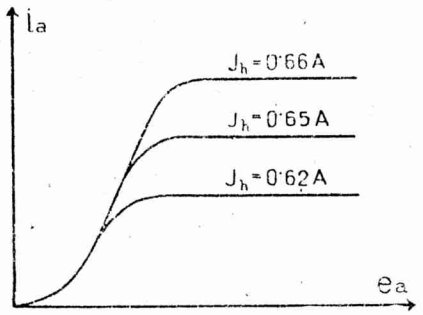
Obr. 1.

katodě a to tím způsobem, že je připojena k jednomu pólu anodové baterie E_a, jejíž druhý pól jest připojen k nějakému bodu topného kruhu; v této práci bude to, jako nejčastěji, negativní pól katody. Kruh, obsahující anodu, anodovou baterii, ev. miliampermetr a prostor v lampě mezi katodou a anodou, nazýváme „anodovým kruhem“. Veličiny, vztahující se na anodový kruh, označíme indexem a; tak na př. i_a značí proud protékající anodovým kruhem a pod.

Uvedeme-li katodu do bílého žáru, vysílá do okolního vzduchoprázdného prostoru elektrony; je-li anoda připojena k positivnímu pólu anodové baterie, je-li tedy na positivním potenciálu vůči katodě, přitahuje tyto elektrony, anodovým kruhem protéká „anodový proud“. Tento proud jest tvořen jediné negativními

elektrony vystupujícími z katody a má proto směr proti jejich pohybu, tedy v lampě od anody ke katodě. Je-li anoda připojena k negativnímu pólu anodové baterie, odpuzuje anoda nyní negativně nabitá negativní elektrony ke katodě zpět, lampou neprochází žádný proud. Vidíme tedy, že elektronová lampa o dvou elektrodách působí jako ventil, propouštějící proud pouze jedním směrem.

Tento elektronový proud vyznačuje se naprostou pravidelností a poměrnou jednoduchostí; jeť ovládán třemi zákony, z nichž každý platí pro jiný obor anodového napětí. Znázorníme-li graficky závislost intensity anodového proudu na anodovém napětí



Obr. 2.

a temperatuře vlákna (resp. intensitě topného proudu), při čemž intensitu anodového proudu volíme za ordinátu, anodové napětí za abscisu a temperaturu za parametr, dostáváme křivky, zvané „charakteristikami“ (viz obr. 2.).

Pozorujeme-li blíže tyto charakteristiky, vidíme toto: jakmile anodové napětí překročí určité napětí E_s, nezávisí již anodový proud na anodovém napětí, nýbrž nabývá maximální hodnoty J_s, závislé pouze na temperatuře a materiálu katody dle Richardsonova vzorce,

$$J_s = Aq\sqrt{T}\varepsilon^{-\frac{B}{T}},$$

(platného pro anodová napětí $e_a > E_s$); při tom značí q povrch žhoucí katody, T její absolutní temperaturu, A a B jsou konstanty závislé pouze na materiálu katody, ε exponenciela. J nazýváme „nasyceným proudem“, zjev sám „nasycením“, ono nej-

menší napětí E_s, při němž nasycení nastává, pak „sytícím napětím“. Nasycení nastává, jakmile elektrické pole v lampě nabude takové intensity, že všechny elektrony, vystupující z katody při dané temperatuře vlákna (resp. topném proudu), se odvádějí k anodě.

Je-li anodové napětí menší než napětí sytící, tu uplatňuje se vliv negativního prostorového náboje, pocházejícího od elektronů letících k anodě; tento vliv jeví se tím způsobem, že letící elektrony odpuzují a zahánějí do katody zpět část elektronů za nimi postupujících, takže všechny elektrony, jež katoda při dané temperatuře může vysílati, nedostihnou anody — anodový proud jest menší než proud nasycený. Tento „efekt prostorového náboje“ uplatňuje se tím více, čím větší jest hustota postupujících elektronů (čím je větší spec. emise a tedy i temperatura katody) a čím slabší jest elektrické pole, způsobené anodovým napětím.

Pro tento obor anodového napětí ($0 < e_a < E_s$) jest dán anodový proud Langmuirovou formulí

$$i_a = C e_a^{\frac{3}{2}}.$$

Konstanta C závisí pouze na dimensích lampy; tak na příklad u lamp s cylindrickou anodou délky l, poloměru r a katodou, nacházející se v ose anody, jest

$$C = 1{\cdot}465 \frac{l}{r} . 10^{-5},$$

takže můžeme v tomto případě intensitu anodového proudu přímo vypočítati dle formule

$$i_a = 1{\cdot}465 \frac{l}{r} e_a^{\frac{3}{2}} . 10^{-5} \textit{ amperu}.$$

Z tohoto vzorce vidíme, že anodový proud závisí pouze na dimensích lampy a anodovém napětí, nezávisí však, což jistě překvapuje, na temperatuře a průměru katody. Při sesilovačích (jak obvyklých tak i na stejnosměrný proud) pracujeme vždy v tomto oboru charakteristik.

V kapitole, pojednávající o teorii sesilovače, často se setkáme s pojmem koeficientu strmosti S (kratčeji budeme mluviti

prostě o strmosti), jejž můžeme již nyní definovati. Jako koeficient strmosti S charakteristiky definujeme směrnici tečné v daném bodě charakteristiky,

$$S = \frac{\partial i_a}{\partial e_a}.$$

Jak ze vzorce vidíme, má strmost rozměr vodivosti $\frac{amper}{volt}$. Derivováním Langmuirovy formule dostáváme pro strmost

$$S = \tfrac{3}{2} C e_a^{\frac{1}{2}},$$

specielně pak pro lampy cylindrické v praxi nejčastější jest

$$S = \tfrac{3}{2} \cdot 1{\cdot}465 \frac{l}{r} e_a^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{-5} \frac{amper}{volt}.$$

Jak později poznáme, mají míti dobré sesilovací lampy strmost pokud možno velikou. Z uvedené formule vidíme, jak nutno lampy dimensovati, aby bylo vyhověno této podmínce: nutno voliti dlouhou katodu, anodu pak rovněž dlouhou, ale s malým poloměrem. Z úvahy o vlivu prostorového náboje elektronů plyne dále, že nutno tento vliv snížiti co nejvíce, chceme-li dostati lampu s velmi strmou charakteristikou; toho se docílí, je-li hustota proudu ve vakuu pokud možno malá (srovn. Schottky-ho lampy s 2 mřížkami).

Pozorujeme-li celkový průběh charakteristiky, vidíme, že pro malá anodová napětí je také strmost malá, s rostoucím napětím roste, nabývá v inflekčním bodě charakteristiky maxima a při ještě dále rostoucím napětí opět neustále klesá, až při nasycení jest strmost opět nulová. Největší strmost má charakteristika v místech mezi $i_a = \frac{1}{2} J_s$ až $i_a = \frac{2}{3} J_s$. V okolí inflekčního bodu probíhá charakteristika jako přímka, t. j. v okolí inflekčního bodu jest strmost S v dosti značném oboru anodového napětí konstantní.

Z katody vystupují elektrony s konečnými, byť velmi malými rychlostmi, rozdělenými na jednotlivé elektrony dle Maxwellova zákona. Většina elektronů má sice při normální temperatuře katody tak nepatrnou rychlost, že již napětí anody rovné $-0{\cdot}3$ *voltu* jim brání doběhnouti k anodě. Některé z nich mají však rychlost větší, takže doběhnou i proti větším napětím; ovšem jest jich tím méně, čím postupujeme

k větším rychlostem. Pro anodová napětí negativní a malá positivní platí tedy třetí základní zákon:

$$i_a = i_{ao}\, \varepsilon^{-\frac{e_a}{e_0}};$$

při tom konstanta $e_0 = 8{\cdot}6.10^{-5}\, T$, takže pro obvyklou temperaturu $T = 2300^0$ jest $e_0 = 0{\cdot}2$ *voltu*. Z formule vidíme, že, stane-li se e_a o 0·2 *voltu* negativnější, klesne i_a vždy na $\frac{1}{2{\cdot}7}$-tou část své dřívější hodnoty; je-li tedy $e_a = -1$ *voltu*, jest anodový proud prakticky roven nule. Tato vlastnost hraje také u sesilovače stejnosměrného proudu značnou úlohu.

Elektronové lampy s mřížkou.

1. *Vlastnosti lampy.* Elektronové lampy, užívané nyní v praxi, mají vedle katody a anody ještě další elektrodu, zvanou „mřížkou"; u tak zvané cylindrické lampy má mřížka tvar pláště koncentrického válce, umístěného mezi katodou a anodou. Bývá buď tlačena z plechu nebo vinuta ve tvaru spirály z drátu. Je-li anoda rovinná, je také mřížka rovinná a s anodou rovnoběžná.

U elektronové lampy s mřížkou část elektronů, vycházejících ze žhavé katody, letí k anodě (tak zv. „anodový proud" i_a), část jich dopadá na mřížku a tvoří tak zv. „mřížkový proud" i_g. Úhrnný počet elektronů, jež katoda vysílá, tvoří tak zvaný „emisní proud" i_e, pro nějž patrně platí:

$$i_e = i_a + i_g.$$

O tom, jak se emisní proud rozděluje na své složky i_a, i_g, rozhodují potenciály anody a mřížky, jich vzdálenosti od katody, síla drátu a velikost ok mřížky. Pokud jest anodové napětí značné proti napětí mřížky, je také anodový proud značný proti proudu mřížkovému.

Pro další nemá tato otázka významu; budeme totiž vždy udržovati mřížku pomocným negativním napětím E_g na tak značném negativním potenciálu vůči katodě, že mřížka vůbec žádných elektronů neschytává, nýbrž je všechny propouští svými otvory k anodě. V tom případě je

$$i_g = 0,$$
$$i_e = i_a.$$

Všimněme si dále, na čem závisí intensita i_e emisního proudu; dá se čekati, že bude záviseti jak na napěti anody, tak i mřížky:*)

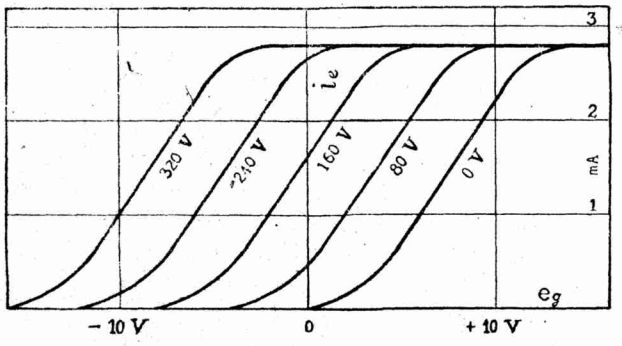
$$i_e = i_e\,(e_g,\ e_a),$$

podobně jest

$$i_a = i_a\,(e_g,\ e_a),$$

$$i_g = i_g\,(e_g,\ e_a).$$

Grafické znázornění emisního proudu v závislosti na obou napětích nazývá se „emisní charakteristikou". Podobně mluvíme o „anodové charakteristice" a o „mřížkové charakteristice"; při tom vždy nanášíme proud jako ordinátu, e_g jako abscisu, e_a je parametrem. Nakreslíme-li řadu emisních charakteristik pro různá



Obr. 3.

anodová napětí (obr. 3.), vidíme, že všechny mají týž tvar, pouze že jsou navzájem posunuty, a to paralelně s osou abscis. Charakteristiku pro parametr e_a dostaneme z charakteristiky pro anodové napětí rovné nule paralelním posunutím o De_a, kde D jest konstanta. Všimneme li si pak blíže oné charakteristiky pro $e_a = 0$, vidíme, že má týž tvar, jako má charakteristika lampy o dvou elektrodách, kde by mřížka fungovala jako anoda. Z těchto dvou poznatků, získaných pozorováním charakteristik, můžeme usuzovati, že vzorce, uvedené pro lampu o dvou elektrodách, podržují svoji platnost i u elektronových lamp s mřížkou, jen nutno za napětí klásti tak zvané „ekvivalentní napětí" e_{st}, jež jest vázáno s e_g, e_a jednoduchým vztahem:

$$e_{st} = e_g + De_a.$$

*) V následujících vzorcích značí i_e, i_a a i_g na pravých stranách funkční znamení.

Tak na př. zní Langmuirova formule pro lampu o třech elektrodách:

$$i_e = C\,(e_g + De_a)^{\frac{3}{2}}.$$

Změníme-li napětí mřížky o de_g a napětí anodové o de_a tak, aby se ekvivalentní napětí tím nezměnilo, t. j. aby

$$de_{st} = de_g + Dde_a = 0,$$

zůstává také intensita emisního proudu nezměněna. Z podmínky $de_{st} = 0$ vypočítáme

$$D = -\left(\frac{de_g}{de_a}\right)_{i_e}.$$

Koeficient D jest aspoň přibližně konstantní, závisí pouze na geometrických dimensích lampy: jest tím menší, čím menší jsou otvory v mřížce a čím jest anoda vzdálenější. Veličina D, již budeme nazývati koeficientem průniku (krátce také prostě „průnikem"), jest nám vhodnou měrou vlivu, jejž má anodové napětí vzhledem k napětí mřížky na emisní proud lampy. Bývá udáván pravidelně v procentech: tak u sesilovacích lamp bývá přibližně $D = 10\%$; to značí, že vzhledem k napětí mřížky uplatňuje se anodové napětí a jeho změny pouze deseti procenty, t. j. změna anodového napětí na př. o 2 *volty* jest ekvivalentní změně mřížkového napětí o 0·2 *voltu*. Název *) — průnik — (dle německého Durchgriff) jest volen proto, že D jest měrou toho, jak vliv anodového napětí proniká otvory mřížky ke katodě.

Z toho, co bylo nahoře řečeno, plyne ihned, že vhodnou volbou anodového napětí můžeme dáti charakteristice libovolnou polohu; tak na př. lze snadno docíliti, aby rovná část charakteristiky byla v oboru $e_g = -1$ *volt* až $e_g = -2$ *volty*, kde, jak jsme viděli, jest $i_g = 0$ a $i_e = i_a$, což jest u sesilovačů velmi důležité. Z toho, co bylo uvedeno o průniku, plyne dále, že k docílení předepsaného posunutí charakteristiky jest potřebí tím většího anodového napětí, čím menší jest průnik.

2. *Konstanty lampy S, D, R_i a jich měření.* U sesilovače budou napětí na mřížce a anodě volena tak, že ve velkém oboru

*) Pojmenování »průnik« vyjadřuje lépe význam veličiny D než Francouzy pro reciprokou hodnotu užívané »facteur d'amplification«.

mřížkového napětí všechny elektrony budou postupovati pouze k anodě, že bude tedy

$$i_g = 0 \quad \text{a} \quad i_e = i_a.$$

V tomto případě jest již dříve definovaná strmost S dána vzorcem

$$S = \left(\frac{\partial i_a}{\partial e_g}\right)_{e_a};$$

průnik jest potom v souhlase s dřívější definicí:

$$D = -\left(\frac{\partial e_g}{\partial e_a}\right)_{i_a}.$$

Vedle veličin S a D setkáme se v teorii sesilovače ještě s další veličinou lampu charakterisující, t. zv. „vnitřním odporem“ lampy, definovaným vztahem:

$$R_i = \left(\frac{\partial e_a}{\partial i_a}\right)_{e_g}.$$

Jak ze souhrnu charakteristik (obr. 3.) vidíme, není R_i konstantní; pracujeme-li v nejstrmějších místech charakteristiky, jest odpor lampy nejmenší (u sesilovacích lamp ca 30.000 až 50.000 *ohmů*); pro body charakteristiky po obou stranách inflekčního bodu R_i roste, a to tím více, čím více se vzdalujeme od inflekčního bodu.

Mezi veličinami S, D, R_i platí důležitá relace, zvaná „Barkhausenovou vnitřní rovnicí“ lampy; lze ji snadno odvoditi. Anodový proud i_a jest funkcí napětí e_g, e_a; je proto

$$di_a = \left(\frac{\partial i_a}{\partial e_g}\right)_{e_a} de_g + \left(\frac{\partial i_a}{\partial e_a}\right)_{e_g} de_a,$$

$$= S de_g + \frac{1}{R_i} de_a.$$

Jinak však jest dle dřívějšího také

$$i_a = F(e_{st}) = F(e_g + De_a),$$

z čehož vychází diferencováním

$$di_a = \frac{di_a}{de_{st}} \cdot (de_g + D de_a).$$

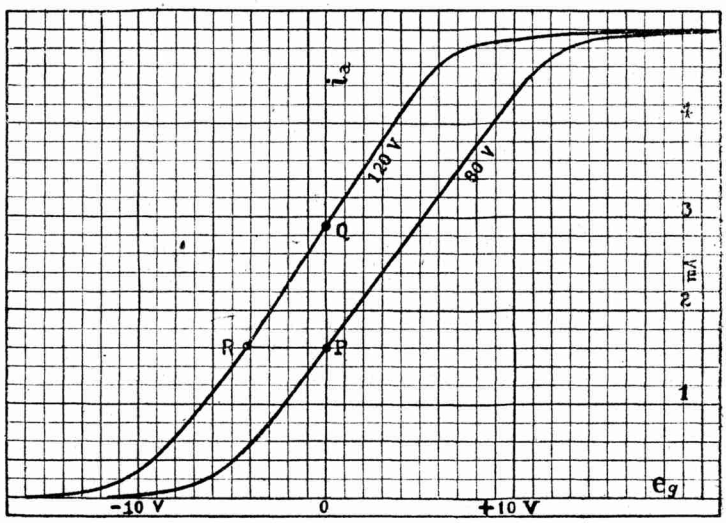
Srovnáním koeficientů v obou výrazech pro di_a dostáváme

$$S = \frac{di_a}{de_{st}}, \qquad \frac{1}{R_i} = D\frac{di_a}{de_{st}},$$

z čehož ihned vychází hledaná relace:

$$SDR_i = 1.$$

Při měření uvedených veličin, velmi důležitých pro teorii sesilovače, vycházíme z relací je definujících. Tak na př. pro bod R (obr. 4.) charakteristiky určíme strmost S takto: Ponechávajíce



Obr. 4.

e_a konstantní (120 V., t. j. zůstávajíce na téže charakteristice), změníme napětí mřížky z e_g na $e_g + de_g$ (tedy o $de_g = 4{\cdot}2$ *voltu*). Při tom se změní anodový proud o $di_a = 1{\cdot}31 \,.\, 10^{-3}\, A$. Strmost jest potom

$$S = \left(\frac{\partial i_a}{\partial e_g}\right)_{e_a} = \frac{PQ}{RP} = 3{\cdot}1 \,.\, 10^{-4}\,\frac{A}{V}.$$

Průnik D určíme takto: Změníme e_a o de_a (ze 120 *volt* na 80 *volt*) a pozorujeme, oč nutno změniti e_g, aby i_a zůstalo ne-

změněno (v našem případě o 4·2 *voltu*). Z toho máme ihned

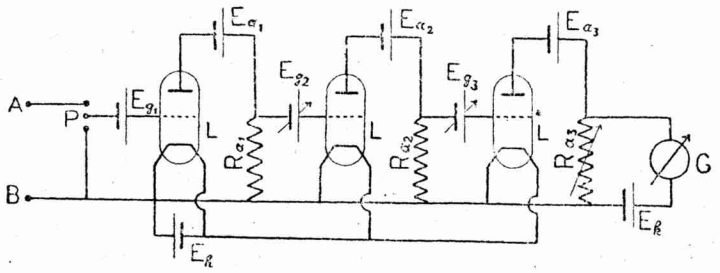
$$D = \frac{RP}{40} = 0{\cdot}105 = 10{\cdot}5\,\%.$$

A konečně při určování vnitřního odporu R_i měříme změnu di_a ($= 1{\cdot}3 . 10^{-3} A$) anodového proudu, způsobenou změnou anodového napětí o de_a ($= 40$ *volt*) při konstantním e_g. Pak jest

$$R_i = \left(\frac{\partial e_a}{\partial i_a}\right)_{e_g} = \frac{40\,V}{PQ} = 30.800 \text{ ohmů}.$$

Teorie sesilovače stejnosměrného proudu.

Lampový sesilovač stejnosměrného proudu je znázorněn schematicky v obr. 5. Hlavní jeho součástí jsou elektronové lampy L s mřížkou. Katody všech lamp jsou spojeny paralelně



Obr. 5.

a připojeny k topné baterii E_h; v případě, že pro jednotlivé lampy jsou předepsána různá napětí, dáme každé lampě resp. serii lamp vlastní baterii, pouze negativní póly katod všech lamp se spojí. Negativní pól katody a mřížka první lampy mohou býti přepínačem P buď spojeny na krátko, nebo připojeny k bodům A, B, jichž potenciální diference de_{g_1} se má sesilovačem sesíliti resp. změřiti. Jak jsme viděli v předešlém odstavci, jest počet elektronů, které doběhnou z katody na mřížku, velmi malý, má-li mřížka nepatrný potenciál proti potenciálu anody, jak skutečně je tomu v našem případě. Kdyby však přes to byla obava, že by i tento nepatrný mřížkový proud mohl snížiti potenciální diferenci de_{g_1}, zařadíme do vedení k mřížce jeden nebo dva suché články, čímž se mřížka uvede na napětí $E_{g_1} = -$ 1 až

— 2 *volty* — mřížkový proud zmizí, odpor lampy mezi katodou a mřížkou se stane nekonečným.

Anodový kruh každé lampy obsahuje vlastní anodovou baterii E_a a velký ohmický odpor R_a; u poslední lampy je tento odpor proměnlivý, u ostatních stálý. Napětí anodových baterií jsou volena tak, aby charakteristiky pro anodové napětí e_a (= napětí anodové baterie zmenšenému o spád na odporu: $E_a - i_a R_a$) měly svoji rovnou část asi mezi $e_g = -3$ až 0 *volt*. Počátek odporu v anodovém kruhu každé lampy, kromě poslední, jest připojen k mřížce lampy následující. Poněvadž na těchto odporech vzniká značný spád napětí $i_a R_a$, i když $de_{g_1} = 0$, byly by při tomto uspořádání mřížky na značném negativním potenciálu vůči katodě; pracovali bychom již v oboru charakteristik, kde anodový proud jest velmi malý, nebo se rovná nule. Naopak však je třeba, abychom pracovali v těch částech charakteristiky, kde je nejstrmější. Toho snadno docílíme tím, když do vedení k mřížkám zařadíme zvláštní pomocné baterie E_g, u nichž možno měniti počet zařazených článků. Napětí těchto baterií volíme tak, aby spád na odporech R_a byl téměř vykompensován, aby tedy napětí mřížek vzhledem ke katodám bylo kolem — 1 až — 2 *voltů*. Z okolnosti, že charakteristiky jsou kolem inflekčního bodu pro dosti značný rozsah mřížkového napětí přímkami, plyne, že stačí, měníme-li v pomocných bateriích počet článků, hlavně tehdy, užíváme li aspoň ku konci akumulátorů Edisonových, takže máme možnost měniti napětí pomocných baterií v skocích o 1 *voltu*. Proměnlivost odporů R_{a_1}, R_{a_2}..., jak ji doporučují Abraham a Bloch, je úplně zbytečná a činí sesilovač, jenž sám o sobě je složitý, ještě komplikovanějším, ačkoliv se tím ničeho podstatného nedocílí.

Paralelně k proměnlivému odporu R_{a_n} poslední lampy je připojen kompensační kruh, obsahující baterii E_k a galvanometr G resp. jiný aparát. Odpor R_{a_n} jest naregulován tak, aby proud v kompensačním kruhu byl aspoň přibližně roven nule, je-li mřížka první lampy na potenciálu negativního pólu katody první lampy. Vzroste-li potenciál mřížky první lampy o de_{g_1}, vzroste také anodový proud prvé lampy o di_{a_1}, tím spád napětí na R_{a_1} o $R_{a_1} di_{a_1}$. Tato změna napětí se přenese na mřížku lampy násle-

dující, kde se opakuje totéž, co u lampy první. V poslední lampě způsobí změna mřížkového napětí porušení kompensace, galvanometrovým kruhem procházející proud se změní o di_G.

Přistoupíme nyní k odvození vztahu mezi proudem di_G v kruhu galvanometru, změnou de_{g_1} napětí mřížky prvé lampy a konstantami sesilovače.

Budiž dán souhrn anodových charakteristik na př. prvé lampy v i_a—e_g-diagramu. Bod o koordinátách e_g, i_a nazýváme „pracovním bodem", neboť nám svojí polohou udává, za kterých podmínek lampa pracuje. Je-li anodový kruh lampy bez odporu, tu při spojité změně napětí mřížky probíhá pracovní bod charakteristiku, poněvadž anodové napětí jest v tomto případě rovno konstantnímu napětí anodové baterie. Je-li však do anodového kruhu zařazen ohmický odpor, tu „pracovní křivka" s charakteristikou nesplývá. Je to snadno pochopitelno: změní-li se totiž napětí na mřížce, na př. vzroste-li, vzroste také anodový proud, s ním však zároveň vzroste také spád napětí na odporu a naopak o týž obnos klesne anodové napětí lampy. Pracovní bod přejde tedy na charakteristiku příslušnou menšímu napětí, než bylo původní. A zase naopak: klesne-li napětí mřížky, klesne současně také anodový proud a s ním spád na odporu, ale o touž hodnotu vzroste zase anodové napětí, pracovní bod přejde na charakteristiku odpovídající vyššímu napětí.

Volbou napětí anodových baterií jsme upravili polohu charakteristik tak, že za nulového stavu ($de_{g_1} = 0$) mají charakteristiky všech lamp svoji rovnou část v oboru kol $e_g = -2$ *voltům*. Suponujeme-li dále, že změny napětí na mřížkách všech lamp jsou tak malé, že pracovní bod, i když přejde na charakteristiky sousední, zůstává na jich přímých částech, jsou veličiny S, D, R_i konstantami. Pozorujme nyní poměry v prvé lampě: anodový proud i_{a_1} za nulového stavu ($de_{g_1} = 0$) závisí na napětí mřížky E_{g_1} (od pomocné baterie) a napětí anodovém:

$$i_{a_1} = f(E_{g_1},\ E_{a_1} - R_{a_1} i_{a_1}).$$

Změní-li se napětí mřížky o de_{g_1}, změní se i anodový proud o di_{a_1}, a máme potom

$$i_{a_1} + di_{a_1} = f[E_{g_1} + de_{g_1},\ E_a - R_{a_1}(i_{a_1} + di_{a_1})].$$

Rozvineme-li pravou stranu podle Taylorovy řady, dostáváme

$$i_{a_1} + di_{a_1} = f(E_{g_1},\ E_{a_1} - R_{a_1} i_{a_1}) + S_1 de_{g_1} - \frac{R_{a_1}}{R_{i_1}} di_{a_1};$$

z toho jest dále

$$di_{a_1} = S_1 de_{g_1} - \frac{R_{a_1}}{R_{i_1}} di_{a_1},$$

z čehož vypočítáme

$$di_{a_1} = \frac{S_1}{1 + \frac{R_{a_1}}{R_{i_1}}} de_{g_1}.$$

Z této relace vidíme, že pracovní křivkou za učiněných suposic jest přímka o směrnici

$$\frac{S_1}{1 + \frac{R_{a_1}}{R_{i_1}}}.$$

Změna ohmického spádu de_{g_2} na odporu R_{a_1}, způsobená změnou di_{a_1} anodového proudu, jest

$$de_{g_2} = R_{a_1} di_{a_1} = \frac{S_1 R_{a_1}}{1 + \frac{R_{a_1}}{R_{i_1}}} de_{g_1},$$

$$= \frac{S_1 R_{i_1}}{1 + \frac{R_{i_1}}{R_{a_1}}} de_{g_1}.$$

Dle Barkhausenovy vnitřní rovnice lampy,

$$S_1 D_1 R_{i_1} = 1,$$

máme konečně

$$de_{g_2} = \frac{1}{D_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_{i_1}}{R_{a_1}}} de_{g_1}.$$

Tato změna napětí se přenáší na mřížku druhé lampy, proto jsme ji označili symbolem de_{g_2}. Při odvozování jsme předpokládali, že odpor druhé lampy mezi katodou a mřížkou jest nekonečný. Není-li tomu tak, nutno pokládati za odpor v anodovém kruhu prvé lampy $R_{a_1}{}^*$ (= odporu paralelně spojených větví: lampy a odporu R_{a_1}), pro nějž platí

$$\frac{1}{R_{a_1}{}^*} = \frac{1}{R_{a_1}} + \frac{1}{\varrho_2},$$

je-li ϱ_2 odpor druhé lampy mezi katodou a mřížkou v daném pracovním bodě. Naše formule zní tedy definitivně:

$$de_{g_2} = \frac{1}{D_1} \cdot \frac{1}{1+\frac{R_{i_1}}{R_{a_1}^*}} de_{g_1}.$$

Opakujeme-li touž úvahu pro lampu druhou, třetí, ... až $(n-1)$-ní, dostáváme řadu vztahů

$$de_{g_3} = \frac{1}{D_2} \cdot \frac{1}{1+\frac{R_{i_2}}{R_{a_2}^*}} de_{g_2},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$de_{g_n} = \frac{1}{D_{n-1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{R_{i_{n-1}}}{R_{a_{n-1}}^*}} de_{g_{n-1}},$$

z nichž eliminací vychází výsledný výraz pro změnu napětí na mřížce poslední lampy, způsobenou změnou napětí de_{g_1} na mřížce lampy prvé:

$$de_{g_n} = de_{g_1} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{D_k} \cdot \frac{1}{1+\frac{R_{i_k}}{R_{a_k}^*}}.$$

Zbývá ještě jenom studovati působení poslední lampy: napětí pomocné baterie budiž E_{g_n}, napětí anodové baterie E_{a_n}, napětí kompensační baterie E_k, velikost odporu v anodovém kruhu R_{a_n}, odpor galvanometru R_G. Proud, procházející za nulového stavu ($de_{g_n} = 0$) lampou, označme $i^0_{a_n}$, odporem R_{a_n} pak i^0_R, galvanometrem konečně i^0_G. Aplikujíce Kirchhoffovy zákony na kompensační kruh poslední lampy, dostáváme:

$$E_k = R_{a_n} i^0_R - R_G i^0_G, \tag{1}$$

$$i^0_a = i^0_R + i^0_G. \tag{2}$$

Změní-li se napětí na mřížce o de_{g_n}, bude procházeti lampou proud i_{a_n}, odporem R_{a_n} proud i_R, galvanometrem konečně i_G. Pak platí podobně jako nahoře:

$$E_k = R_{a_n} i_R - R_G i_G, \tag{3}$$

$$i_a = i_R + i_G. \tag{4}$$

Anodové napětí v prvém případě ($de_{g_n} = 0$) jest:

$$e^0_{a_n} = E_{a_n} - R_{a_n} i^0_R,$$

v druhém:

$$e_{a_n} = E_{a_n} - R_{a_n} i_R,$$
$$= e^0_{a_n} - R_{a_n} (i_R - i^0_R).$$

Anodový proud jest v prvém případě dán vztahem

$$i^0_{a_n} = f\,(E_{g_n},\ e^0_{a_n}),$$

v druhém

$$i_{a_n} = f\,[E_{g_n} + de_{g_n},\ e^0_{a_n} - R_{a_n}\,(i_R - i^0_R)].$$

Rozvineme pravou stranu poslední relace podle Taylorovy řady podržujíce prvé členy a odečteme relaci předcházející; dostáváme

$$i_{a_n} - i^0_{a_n} = S_n de_{g_n} - \frac{R_{a_n}}{R_{i_n}} (i_R - i^0_R). \tag{5}$$

Klademe-li pro krátkost

$$di_G = i_G - i^0_G,$$

dostáváme z rozdílů (3)—(1), (4)—(2):

$$R_{a_n}\,(i_R - i^0_R) - R_G di_G = 0, \tag{6}$$

$$i_{a_n} - i^0_{a_n} = i_R - i^0_R + di_G. \tag{7}$$

Z (6) a (7) vychází eliminací veličiny $i_R - i^0_R$:

$$R_{a_n}\,(i_{a_n} - i^0_{a_n}) = (R_{a_n} + R_G)\,di_G. \tag{8}$$

Z (8) vypočtěme $i_{a_n} - i^0_{a_n}$, z (6) pak $i_R - i^0_R$ a dosaďme vypočtené hodnoty do (5); dostáváme

$$di_G = \frac{S_n}{1 + \frac{R_G}{R_{a_n}} + \frac{R_G}{R_{i_n}}}\, de_{g_n}.$$

Dosaďme do tohoto vzorce již dříve vypočtenou hodnotu pro de_{g_n}; dostáváme potom definitivní formuli

$$di_G = \frac{S_n}{1 + \frac{R_G}{R_{a_n}} + \frac{R_G}{R_{i_n}}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{D_k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_{i_k}}{R_{a_k}^*}} \cdot de_{g_1} \equiv \frac{1}{R_s}\, de_{g_1},$$

jež nám udává, oč se změní proud v galvanometru, změní li se napětí na mřížce prvé lampy o de_{g_1}.

Diskuse: Faktor u de_{g_1} jsme označili $\frac{1}{R_s}$, převratnou jeho hodnotu R_s budeme nazývati zdánlivým odporem sesilovače. Dle definice je to poměr mezi změnou napětí na mřížce první lampy a jí způsobenou změnou proudu v kruhu galvanometru. Z uvedeného vzorce plyne, že R_s jest dáno pouze konstantami sesilovače. Od zdánlivého odporu sesilovače nutno dobře odlišovati odpor prvé lampy mezi mřížkou a katodou, kterážto veličina přichází v úvahu, ptáme-li se, kolik proudu odebírá sesilovač ze zdroje napětí (bodů A, B). Reciproká hodnota zdánlivého odporu $\frac{1}{R_s}$ jest vhodnou měrou účinnosti sesilovače.

Z výrazu pro di_G jest dále přímo viděti tento důsledek: Jsou-li anodová napětí lamp volena tak, že pracovní křivky všech lamp probíhají v oborech, kde charakteristiky jsou ještě přímkami a tedy veličiny S, D, R_i dle dřívějšího konstantami, jest proud di_G v galvanometru přímo úměrný změně napětí de_{g_1} na mřížce první lampy. Tento důsledek jest hlavně tehdy velmi důležit, užíváme-li sesilovače jako citlivého voltmetru k měření nepatrných změn napětí.

Účinnost sesilovače jest tím větší, čím větší jest $\frac{1}{R_s}$, t. j. čím menší jest jeho zdánlivý odpor. Vliv každé lampy na celkový efekt sesilovače jest ve výrazu pro $\frac{1}{R_s}$ dán jedním faktorem. Každé z $(n-1)$ prvních lamp odpovídá faktor tvaru:

$$\frac{1}{D_k} \cdot \frac{1}{1+\frac{R_{i_k}}{R_{a_k}^*}},$$

jejž možno psáti také ve tvaru:

$$\frac{1}{D_k R_{i_k}} \frac{1}{\frac{1}{R_{i_k}}+\frac{1}{R_{a_k}^*}} = \frac{S_k}{\frac{1}{R_{i_k}}+\frac{1}{R_{a_k}^*}}.$$

Z obou těchto ekvivalentních tvarů vidíme: Aby sesilovač měl pokud možno největší efekt, musí prvních $(n-1)$ lamp

míti velkou strmost S_k, nepatrný průnik D_k a velký vnitřní odpor R_{i_k}; anodový odpor $R_{a_k}^*$ musí býti velký proti vnitřnímu odporu R_{i_k} příslušné lampy. Avšak při velmi malém průniku jest (dle relace $de_g = -Dde_a$) třeba užiti velmi značného anodového napětí, abychom docílili potřebného posunutí charakteristiky. Vedle toho vzniká na $R_{a_k}^*$ spád napětí v obnosu $i_{a_k} R_{a_k}^*$; je-li tedy $R_{a_k}^*$ značné, musí býti jednak napětí pomocných baterií mezi anodovým odporem a mřížkou následující lampy velmi značné, jednak nutno opětně značně zvýšiti napětí anodových baterií, aby se vyvážila ztráta napětí na $R_{a_k}^*$. Proto volíme kompromis: spokojujeme se s lampami s průnikem rovným asi 10%, $R_{a_k}^*$ volíme pak přibližně rovno vnitřnímu odporu lampy R_{i_k}. Při tom nezapomínejme, že $R_{a_k}^*$ značí nám vlastně hodnotu odporu dvou paralelních větví: odporu R_{a_k} a $(k+1)$-ní lampy mezi mřížkou a katodou. Volbou pomocného, dostatečně vysokého negativního napětí na mřížce snadno docílíme toho, že tento odpor ampy jest nekonečně veliký a pak jest

$$R_{a_k}^* = R_{a_k}.$$

Zbývá ještě diskuse výrazu

$$\frac{S_n}{1+\frac{R_G}{R_{a_n}}+\frac{R_G}{R_{i_n}}},$$

vztahujícího se na poslední lampu. Ze vzorce přímo vidíme: má-li býti efekt lampy značný, nutno jednak voliti lampu o velké strmosti, jednak musí býti odpor galvanometru R_G malý jak proti vnitřnímu odporu lampy R_{i_n}, tak proti anodovému odporu R_{a_n}. Poněvadž odpor galvanometru mívá pravidelně pouze několik desítek nebo set *ohmů*, stačí užiti lampy o poměrně malém vnitřním odporu.

Ku konci ještě oceníme na základě číselného příkladu výhody, jež nám může sesilovač poskytnouti. Jednolampovým sesilovačem budeme nazývati uspořádání s jedinou lampou (3. v obr. 5.), v jejímž anodovém kruhu jest zařazen ohmický odpor a k němu paralelně připojen kompensační kruh. Volíme-li sesilovací lampu fy C. H. F. Müller-Hamburg, jež má jak z německých tak francouzských lamp největší strmost

$$S = 3{\cdot}6 \,.\, 10^{-4} \frac{amper}{volt}, \quad D = 5\%, \quad R_i = 55.000 \text{ ohmů},$$

dostáváme

$$R_s = 2770 \text{ ohmů.}$$

Kdyby tedy uspořádání před sesilovačem dovolovalo užiti galvanometru (ev. jiného aparátu) o odporu menším než $R_s = 2770$ *ohmů*, pak by užití sesilovače nemělo smyslu. Kdyby naopak, vzhledem k poměrům před body A, B, bylo třeba k měření napětí de_g, užiti galvanometru o velmi velkém odporu $\gg R_s$, tu užití již jednolampového sesilovače je výhodné. Podobně je tomu u sesilovačů vícelampových. U sesilovače dvojlampového máme pro týž typ lamp

$$R_s = 277 \text{ ohmů,}$$

u trojlampového $R_s = 27{\cdot}7$ *ohmu*,

u čtyřlampového $R_s = 2{\cdot}8$ *ohmu* a t. d.

Vidíme z toho, že každým přidáním dalšího stupně klesne zdánlivý odpor sesilovače na $^1/_{10}$ předešlé hodnoty, současně však stoupne proud v galvanometru na 10-násobnou hodnotu; za to přibudou v uspořádání dvě další baterie.

Úkolem sesilovače stejnosměrného proudu je vyvolati malou potenciální diferencí na mřížce první lampy pokud možno silný proud v kruhu galvanometru. Při tom lze snadno docíliti toho, že z oné potenciální diference se neodebírá žádný proud, nýbrž že se jí pouze elektrostaticky nabíjí mřížka první lampy. Energii proudu v kruhu galvanometru dodává při tom anodová baterie. V tom tkví hlavní přednost a výhoda popsaného sesilovače podobně, jako je tomu i u sesilovačů proudu střídavého.

Kompensační metody k určování S, D, R_i.

Strmost určujeme dle definice obvyklou metodou tak, že měříme změnu anodového proudu, způsobenou malou změnou napětí na mřížce. Jaké přesnosti lze při tom docíliti, objasní příklad: U francouzské sesilovací lampy „Metax“ o strmosti ca $3.10^{-4} \frac{amper}{volt}$ jest intensita nasyceného proudu přes 5 miliamp Měřena byla miliampermetrem fy Siemens-Halske o odporu 10 *ohmů*, k němuž jako shunt připojeno dalších 10 *ohmů*; výchylka miliampermetru přes celou skálu (150 dílků) odpovídá potom proudu 9 miliamper, výchylka o jeden dílek proudu 6.10^{-5} *A*.

Změníme-li tedy napětí mřížky o 0·5 *voltu*, změní se tím při uvedené strmosti lampy anodový proud o $1{\cdot}5.10^{-4}A$, což odpovídá výchylce 2·5 skálového dílku. Chybí-li se při odečtení polohy ukazatele po každé o 0·1 dílku, jest maximální chyba, jíž se můžeme při určování strmosti touto metodou dopustiti, již 8%. Úplně stejné poměry jsou při určování průniku a vnitřního odporu lampy.

Jest tedy úplně pochopitelno, že se ohlížíme po jiné, dokonalejší metodě. Takové vskutku velmi jednoduché uspořádání, jímž možno uvedené veličiny měřiti s daleko větší přesností, představuje nám jednolampový sesilovač stejnosměrného proudu

Formule pro efekt jím způsobený (str. 17)

$$di_G = \frac{S}{1+\frac{R_G}{R_a}+\frac{R_G}{R_i}}\,de_g$$

obsahuje sice obě veličiny S a R_i, ale R_i mívá hodnoty tak značné (50.000 *ohmů* i více), že možno při malém odporu galvanometru člen $\frac{R_G}{R_i}$ úplně zanedbati proti 1 (s chybou $0{\cdot}1\%$, je-li $R_G = 50$ *ohmům*). Ostatně v dalším ihned odvodíme analogickou metodu pro určování R_i, takže potom možno užiti formule přesné, určíme-li napřed R_i.

Vraťme se ještě na okamžik k uvedenému číselnému příkladu: užijeme-li při popsané nové metodě galvanometru s citlivostí jistě nepatrnou — $3.10^{-6}A$ pro jeden skálový dílek — dostáváme při stejné změně napětí na mřížce (o 0·5 *voltu*) v galvanometru výchylku rovnou 50 dílkům; tato výchylka se dá volbou citlivějšího galvanometru ještě značně zvětšiti. Ovšem nedoporučuje se užívati přespříliš citlivého galvanometru, ježto se potom i malé, nahodilé změny v anodovém nebo kompensačním napětí jeví velkým neklidem galvanometru.

Průnik D určujeme takto: změníme anodové napětí o de_a, s tím současně se změní výchylka galvanometru v kompensačním kruhu; poté snažíme se změnou napětí mřížky o $-de_g$ uvésti výchylku galvanometru na původní hodnotu. Tím máme zaručeno, že anodový proud jest v obou případech týž, a tedy dle definice jest

$$D = -\frac{de_g}{de_a}.$$

Při určování vnitřního odporu lampy měříme změnu intensity proudu v galvanometru (di_G), způsobenou při stálém napětí mřížky změnou anodového napětí o de_a. Jak se z těchto dvou údajů vypočítá vnitřní odpor lampy R_i, odvodíme úvahou naprosto analogickou jako na str. 16. a 17. takto:

Budiž napětí mřížky E_g, napětí anodové baterie E_a, napětí baterie v kompensačním kruhu E_k, ohmický odpor v anodovém kruhu R_a, odpor galvanometru konečně R_G; proud protékající lampou budiž i_a^0, odporem R_a pak i_R^0, galvanometrem i_G^0 Potom jest

$$E_k = R_a\, i_R^0 - R_G i_G^0\,, \tag{1}$$

$$i_a^0 = i_R^0 + i_G^0\,. \tag{2}$$

Změníme-li, udržujíce napětí na mřížce konstantní, napětí anodové baterie o de_a, bude lampou procházeti proud i_a, odporem i_R, galvanometrem i_G; potom platí podobně jako dříve

$$E_k = R_a\, i_R - R_G i_G, \tag{3}$$

$$i_a = i_R + i_G. \tag{4}$$

Anodové napětí jest v prvém případě:

$$e_a^0 = E_a - R_a\, i_R^0,$$

v druhém

$$e_a = E_a + de_a - R_a\, i_R,$$

$$= e_a^0 + de_a - R_a\,(i_R - i_R^0).$$

Anodový proud v prvém případě jest

$$i_a^0 = f\,(E_g, e_a^0),$$

v druhém

$$i_a = f\,[E_g, e_a^0 + de_a - R_a\,(i_R - i_R^0)].$$

Rozvineme-li pravou stranu poslední rovnice v řadu, spokojujíce se prvními členy, dostáváme po odečtení relace předcházející

$$i_a - i_a^0 = \frac{1}{R_i}\, de_a - \frac{R_a}{R_i}\,(i_R - i_R^0). \tag{5}$$

Klademe-li opět $di_G = i_G - i_G^0$, vypočítáme z rovnic (1) až (5)

$$di_G = \frac{1}{R_i} \cdot \frac{de_a}{1 + \frac{R_G}{R_a} + \frac{R_G}{R_i}},$$

$$= \frac{de_a}{R_G + R_i\left(1 + \frac{R_G}{R_a}\right)},$$

z čehož plyne dále

$$R_i = \frac{\frac{de_a}{di_G} - R_G}{1 + \frac{R_G}{R_a}}.$$

Odpor R_G galvanometru jest pravidelně proti prvnímu členu tak nepatrný, že jej můžeme zanedbati a psáti

$$R_i = \frac{1}{1 + \frac{R_G}{R_a}} \cdot \left(\frac{de_a}{di_G}\right)_{e_g}.$$

Totéž, co jsme dříve uvedli o přesnosti při měření S a D, platí ve stejné míře i zde. (Dokončení.)

O separaci kořenů rovnice algebraické dle reálných částí kořenů a o důkaze fundamentální věty algebry.

Napsal K. Petr.

Jest obecně známo, že, provádíme-li separaci kořenů pomocí Sturmovy věty, dospíváme již při nízkém stupni rovnice ($n = 5, 6, \ldots$) z pravidla k číslům tak velikým, že separace jest jenom se značnou námahou proveditelna; ovšem za předpokladu, že se separace ona provádí přesně, takže jsme současně poučeni o tom, má-li rovnice daná kořeny mnohonásobné či ne. Ku vykonání separace kořenů dle reálných částí — t. j. ku přesnému výpočtu, kolik jest kořenů dané rovnice algebraické, jichž reálná část jest v intervalu (a, b) — lze však sestrojiti obdobné řady, říkejme jim také Sturmovy, jež jsou značně jednodušší než původní Sturmovy (lze ku př. při rovnicích stupně 8. vystačiti výrazy, jichž výpočet není o mnoho nesnadnější než původních Sturmových při rovnicích stupně 4.). Odvození těchto řad lze podati na základě věty Cauchyovy vztahující se na změnu argumentu čísla komplexního daného hodnotou $f(z)$, když z probíhá uzavřenou křivkou a lze ke konstrukci jich užiti rovněž postupného dělení — jakož známo.

V následujícím jsem podal konstrukci řady, v níž počet změn znaménkových se mění jednak tím, že proměnná prochází nullovým bodem koncového členu (jako jest tomu při původní řadě Sturmově), jednak tím, že proměnná prochází nullovým bodem středního členu řady, a jinak se počet ten měniti nemůže. Nullové body středního členu jsou dány poloviČními součty kořenů rovnice dané; nullové body koncového členu jsou kořeny dané rovnice. Řada ta pak řeší problém separace kořenů dle reálných částí a shoduje se, jak jsem ukázal, s řadou, ku které dospíváme postupným dělením.

Specielním případem tohoto úkolu zabýval se *A. Hurwitz**) odvodiv podmínky pro to, aby rovnice určitého stupně měla vesměs kořeny, jichž reálná část jest kladná; odvození to podal pomocí svrchu zmíněné věty Cauchyovy. Jeho výsledky algebraicky odvodil *L. Orlando***) na podkladě rovnice pro poloviční součet kořenů. Výsledky Hurwitzovy a to ještě zjednodušené***) vyplývají bezprostředně z řad níže odvozených.

Konečně jest vytknouti, že z vývodů následujících jako jednoduchý důsledek následuje algebraický důkaz fundamentální věty algebry (že každá rovnice má kořen). Postačí to, jak známo, dokázati pro rovnice stupně sudého a jest několik důkazů ryze arithmetických (algebraických). Pokud jsou mi známy, používají vesměs rovnice pro poloviční součet (anebo celý součet) kořenů. Jakožto jeden z nejznámějších uvádím důkaz *Cliffordův* reprodukovaný v Cesàro „Elem. Lehrbuch der alg. Analysis“ str. 377—380.

---

*) *A. Hurwitz*, Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt; Math. Ann., sv. 46 (r. 1895).

**) *L. Orlando*, Sul problema di Hurwitz relativo alle parti reali delle radici di un' equazione algebrica; Math. Ann., sv. 71 (r. 1912) a dříve v několika pojednáních nacházejících se v Atti della reale Accad. dei Lincei.

***) Tak ku př. pro rovnici 4-tého stupně uvádí Hurwitz jako podmínky, aby rovnice měla kořeny jenom se zápornými reálnými částmi tyto nerovniny

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0, \quad -a_4 a_1^2 + a_3 a_2 a_1 - a_3^2 a_0 = U > 0, \quad a_4 > 0;$$

jako důsledek mých výsledků plynou však nerovniny

$$a_1 > 0, \quad U > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0.$$

I.

1. Nejprve zabývati se budeme rovnicí, jejíž kořeny jsou poloviční součty dvou různých kořenů rovnice dané. Je-li daná rovnice

$$f(x) = 0$$

aneb obšírněji psáno:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

a její kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, budeme hledati rovnici, jejíž kořeny jsou $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$, $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3), \ldots$, což jest $\frac{1}{2} n (n-1)$ hodnot (obecně různých). K rovnici této lze dospěti tímto známým způsobem. Označme

$$\xi = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \eta = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2),$$

pak jest

$$f(\xi + \eta) = 0, \quad f(\xi - \eta) = 0$$

a také, jsou-li α_1, α_2 různé hodnoty a tudíž η od nully různo,

$$\tfrac{1}{2}[f(\xi + \eta) + f(\xi - \eta)] = 0, \quad \frac{1}{2\eta}[f(\xi + \eta) - f(\xi - \eta)] = 0. \quad (1)$$

To jsou dvé rovnice pro dvě neznámé ξ, η. Provedeme-li eliminaci veličiny η, dostaneme rovnici pro ξ, jež bude stupně $\frac{1}{2} n (n-1)$.

Eliminaci tu provedeme postupným dělením. Nejprve, užívajíce Taylorovy identity, klademe

$$f(\xi + \eta) = \eta^n + A_1 \eta^{n-1} + A_1 \eta^{n-2} + \ldots + A_n,$$

kdež

$$A_k = \frac{1}{(n-k)!} f^{(n-k)}(\xi)$$

jest mnohočlen v ξ (vždy) stupně k-tého. Předpokládejme dále pro jednoduchost, že n jest *číslo sudé*; $n = 2m$. Pak jde o eliminaci čísla η z rovnic

$$\begin{aligned} \eta^{2m} + A_2 \eta^{2m-2} + A_4 \eta^{2m-4} + \ldots + A_{2m} &= 0, \\ A_1 \eta^{2m-2} + A_3 \eta^{2m-4} + \ldots + A_{2m-1} &= 0. \end{aligned} \quad (1')$$

Značme krátce $\eta^2 = X$ a levou stranu prvé z posledních dvou rovnic $g(X)$, druhé z obou rovnic pak $h(X)$. Budeme nyní děliti mnohočlen $g(X)$ mnohočlenem $h(X)$, až dostaneme

zbytek stupně $(m-2)$; při tom, abychom se vyhnuli zlomkům, násobíme dělence výrazem A_1^2; zbytek označíme $-r_1(X)$. Koefficient nejvyšší mocniny proměnné X v $r_1(X)$, t. j. mocniny $(m-2)$-té budiž $\mathfrak{c}_1$. Dělíme-li nyní $\mathfrak{c}_1^2 h(X)$ mnohočlenem $r_1(X)$, obdržíme zbytek, jehož koefficienty jsou vesměs, jak známo, dělitelny A_1^2, což k vůli symmetrii znamenati budeme též $\mathfrak{c}_0^2$, takže zbytek můžeme napsati ve tvaru $-\mathfrak{c}_0^2 r_2(X)$, a t. d. Dostáváme takto postupně řetěz rovnic

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}_0^2 g(X) &= q_0(X)\, h(X) - r_1(X)\\
\mathfrak{c}_1^2 h(X) &= q_1(X)\, r_1(X) - \mathfrak{c}_0^2 r_2(X)\\
\mathfrak{c}_2^2 r_1(X) &= q_2(X)\, r_2(X) - \mathfrak{c}_1^2 r_3(X) \qquad (2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathfrak{c}_{m-2}^2 r_{m-3}(X) &= q_{m-2}(X)\, r_{m-2}(X) - \mathfrak{c}_{m-3}^2 r_{m-1}
\end{aligned}$$

Tu jest zbytek r_{m-1} již nezávislý na X; při tom jest ovšem mlčky předpokládáno, že $r_1(X)$ jest vskutku stupně $(m-2)$, $r_2(X)$ stupně $(m-3)$, . . . , kterážto okolnost při neurčitém ξ vskutku vždy nastává, jakož ostatně v pozdějším odstavci bude prokázáno, až podáme vyjádření polynomů $r_k(X)$.

Rovnice

$$r_{m-1} = 0$$

nám poskytuje výsledek eliminace čísla $\eta^2 = X$ z rovnic (1) a dává nám hledanou rovnici v ξ pro poloviční součet kořenů dané rovnice. Rovnice ta jest nutně stupně $\frac{1}{2}n(n-1)$ a kdybychom z řetězu rovnic (2) stupeň tento počítali, obdrželi bychom pro stupeň ten vskutku ono číslo (ovšem za jistých předpokladů úvahu tuto zjednodušujících). Dokážeme však i tento výsledek později obecně a nebudeme se odůvodňováním jeho nyní zdržovati.

Značíme-li dále

$$r_k(0) = \mathfrak{d}_k, \quad h(0) = A_{2m-1} = \mathfrak{d}_0, \quad g(0) = A_{2m} = \mathfrak{d}_{-1}$$

a *sestrojíme-li řadu* (polynomů v proměnné ξ)

$$1,\ \mathfrak{c}_0,\ \mathfrak{c}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{c}_{m-2},\ r_{m-1},\ \mathfrak{d}_{m-2},\ \mathfrak{d}_{m-3},\ \ldots\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{d}_0,\ \mathfrak{d}_{-1} \qquad (3)$$

pak, nejsou-li dva po sobě jdoucí členové této řady pro určité ξ rovny nulle, a je-li r_{m-1} a rovněž $\mathfrak{d}_{-1} = A_{2m} = f(\xi)$ od nully různo, řada ta počtem změn znaménkových nám udává počet kořenů rovnice dané, jichž reálná část jest větší než ξ.

Tento výrok jest platný i tehdy, je-li $r_{m-1} = 0$ a čísla $\mathfrak{c}_{m-2}$, $\mathfrak{d}_{m-2}$ jsou různa od nully a mají znaménka protivná.

Jestliže $r_{m-1} = 0$ a čísla $\mathfrak{c}_{m-2}$, $\mathfrak{d}_{m-2}$ jsou různa od nully a mají znaménka stejná, jest jeden pár kořenů komplexních rovnice dané, jehož reálná část jest rovna ξ. Jestliže $\mathfrak{d}_{-1} = A_{2m}$ jest rovno nulle, jest jeden kořen rovnice dané rovný ξ.

Nebylo by nesnadno podati důkaz těchto vět na základě definice dané čísel $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, kdybychom zavedli ještě zjednodušující předpoklady; omezím se však nejprve na to, že postup, jakého by bylo tu lze užiti, osvětlím na příkladech rovnice 6. stupně a také na příkladě rovnice 5. stupně, aby též bylo jasno, jak třeba svrchu uvedenou větu modifikovati pro rovnice lichého stupně. Obecně platný důkaz věty bude pak podán později při neodvislém vyjádření výrazů $\mathfrak{c}_k$, $\mathfrak{d}_k$ (viz odstavce II., III., IV., kde značeny tyto veličiny C_k, c_k), při čemž omezím se toliko na případ n sudého, jakožto důležitějšího a poněkud jednodušího, ponechávaje případ stupně lichého k podrobnému provedení mladším pracovníkům.

2. Při rovnici stupně šestého jest $g(X) = X^3 + A_2X^2 + A_4X + A_6$, $h(X) = A_1X^2 + A_3X + A_5$; dělením pak obdržíme pro první zbytek tvar $AX + B$, kde

$$A = A_5A_1 - A_4A_1^2 - A_3^2 + A_3A_2A_1,$$
$$B = -A_6A_1^2 - A_5A_3 + A_5A_2A_1,$$

zbytek poslední má pak očividně tvar

$$U = \frac{1}{A_1^2}(-A_1B^2 + A_3AB - A_5B^2)$$

a jde o to vyšetřiti počet změn znaménkových v řadě

$$1,\ A_1,\ A,\ U,\ B,\ A_5,\ A_6. \qquad (m)$$

Členové této řady jsou mnohočleny v ξ a jest snadno vyčísliti koefficienty při nejvyšší mocnině ξ, tím že vycházíme od rovnice šestého stupně tvaru $x^6 = 0$. Poznali bychom tak, že stupně v ξ jsou při členech řady dány čísly 0, 1, 6, 15, 8, 5, 6 a že koefficienty při nejvyšších mocninách jsou čísla vesměs kladná. Dostáváme (jelikož stupně v ξ střídají se v paritě), že řada (m) dává pro $\xi = -\infty$ šest změn znaménkových, pro $\xi = \infty$ pak žádnou. Ztrácí se tedy při přechodu od $-\infty$ do ∞ šest změn znaménkových. Bylo by dále snadno prokázati, že jenom při zvláštních podmínkách pro koefficienty dané rovnice (t. j. pro

čísla $a_1, a_2, \ldots, a_6$) stávati se mohou dva po sobě jdoucí členy řady (m) pro jednu hodnotu proměnné ξ nullou; omezím se pak jenom na takové rovnice, při kterých dva po sobě jdoucí členové v (m) nejsou pro žádné ξ současně rovny nulle.*) Pak vymizí li ku př. A_1 jest $A = -A_3^2$ a mají tedy členové sousedící s $A_1 = 0$ protivná znaménka; totéž platí pro hodnoty proměnné ξ, pro něž vymizí jeden ze členů A, B, A_5, jak z pouhého pohledu na rovnice definující členy řady (m) vyplývá. Může se tedy počet změn znaménkových v řadě (m) měniti jenom tenkrát, když ξ prochází nullovým bodem buď členu A_6, aneb členu U. Avšak, prochází-li ξ nullovým bodem členu A_6 (t. j. reálným kořenem dané rovnice) rostouc, ubude jedna změna znaménková (neboť $A_6 = f(\xi)$, $A_5 = f'(\xi)$). Nullové body rovnice $U = 0$ jsou poloviční součty kořenů rovnice dané; jestliže však $\xi = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$, jest dle svrchu uvedeného pro toto ξ $AX + B$ největší společnou mírou $g(X)$ a $h(X)$ a hodnota pro X činící tento výraz nullou jest $\frac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)^2$; jsou-li tedy α_1, α_2 kořeny reálné, mají A, B protivná znaménka, jsou-li komplexně sdružené, mají A, B stejná znaménka. Mění se tedy ještě počet změn znaménkových v řadě (m), když ξ prochází reálnou částí dvou komplexně sdružených kořenů, o dvě; má-li se však při přechodu od $-\infty$ do ∞ ztratiti celkem 6 změn, pak nutně, prochází-li ξ reálnou částí dvou kompl. sdruž. kořenů dané rovnice rostouc, *ztratí se* dvě změny znaménkové. *Jest tedy v řadě (m) tolik změn znaménkových, kolik v rovnici dané jest kořenů, jichž reálná část jest větší než ξ* (není-li ovšem $U = 0$ pro to určité ξ a zároveň A, B stejného znaménka, ve kterémžto případě čtenář snadno větu dle předcházejícího doplní). Rozšíření těchto výsledků na obecné rovnice stupně šestého (bez omezujících předpokladů) není obtížno, jelikož však obdobná úvaha později obecně bude provedena, opomíjím je na tomto místě.

Pro rovnice 5. stupně klademe $g(X) = X^2 + A_2 X + A_4$, $h(X) = A_1 X^2 + A_3 X + A_5$. Dělíme nyní $h(X)$ výrazem $g(X)$; první zbytek jest $(-A_3 + A_2 A_1) X + (-A_5 + A_4 A_1)$; po-

*) Rovnice ty ani nemohou míti kořeny mnohonásobné ani rovnice pro poloviční součet kořenů dané rovnice, t. j. rovnice $U = 0$ nemá kořenů mnohonásobných.

slední pak zbytek jest $-(-A_5 + A_4A_1)^2 + A_2(-A_5 + A_4A_1)(-A_3 + A_2A_1) - A_4(-A_3 + A_2A_1^2)^2$; značíme-li jej U, můžeme za řadu základní voliti řadu (vynechávajíce A_1 na prvém místě)

$$1, \quad -A_3 + A_2A_1, \quad U, \quad -A_5 + A_4A_1, \quad A_4, \quad A_5. \qquad (n)$$

K ní lze přičiniti tytéž poznámky jako ku řadě (m) a dokázati, že v řadě (n) jest tolik změn znaménkových, kolik v rovnici $x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$ jest kořenů, jichž reálná část jest větší než ξ.

II.

Abych podal konstrukci obecných řad řešících náš problém, budu vycházeti od výrazů sestrojených v mém pojednání „O symmetrických soustavách čísel a větě Sturmově". Rozpravy XV., č. 12 (1906).

Označme

$$D_k(X) = \begin{vmatrix} \sigma_0, & \sigma_1, & \ldots & \sigma_{k-1} \\ \sigma_1, & \sigma_2, & \ldots & \sigma_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{k-1}, & \sigma_k, & \ldots & \sigma_{2k-2} \end{vmatrix} (X-\varepsilon_1)(X-\varepsilon_2)\ldots(X-\varepsilon_m),$$

při čemž

$$\sigma_k = \frac{\Theta_1\varepsilon_1^k}{X-\varepsilon_1} + \frac{\Theta_2\varepsilon_2^k}{X-\varepsilon_2} + \ldots\ldots + \frac{\Theta_m\varepsilon_m^k}{X-\varepsilon_m}.$$

Pak jest patrně dle známých vět o determinantech (o rozkladu determinantu aneb o násob. obdélníkových matic)

$$D_k(X) = \Sigma\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_k(X-\varepsilon_{k+1})(X-\varepsilon_{k+2})(X-\varepsilon_m)[1,2,\ldots,k]^2, \qquad (4)$$

kde součet jest bráti tak, že místo kombinace $(1, 2\ldots, k)$ dosazují se všecky možné kombinace k-té třídy z elementů $1, 2, \ldots, m$ a za $(k+1, k+2, \ldots, m)$ doplňkové kombinace tak, aby oběma kombinacemi se doplňujícími všecky prvky $1, 2, \ldots, m$ byly vyčerpány, a kde dále jest

$$[1, 2, \ldots, k]^2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2\ldots(\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k)^2.$$

Pro $D_k(X)$ jest platna tato relace — součin $(X-\varepsilon_1)(X-\varepsilon_2)\ldots$

$(X - \varepsilon_m)$ označme pro krátkost $g(X)$ —

$$D_k(\varepsilon_1) = \Sigma \Theta_1 \Theta_2 \ldots \Theta_k (\varepsilon_1 - \varepsilon_{k+1}) \ldots (\varepsilon_1 - \varepsilon_m)[1, 2, \ldots, k]^2$$
$$= \Theta_1 g'(\varepsilon) \Sigma' \Theta_2 \Theta_3 \ldots \Theta_k (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \ldots (\varepsilon_1 - \varepsilon_k)$$
$$[2, 3, \ldots, k]^2,$$

při čemž čárka u znaménka součtového poukazuje k tomu, že součet vztahuje se na všecky permutace $(k-1)$ třídy z elementů $2, 3, \ldots, m$, jež postupně jest dosazovati místo permutace $(2, 3, \ldots, k)$ za znaménkem součtovým vypsané. Označíme-li

$$H_k(X) = \Sigma \Theta_1 \Theta_2 \ldots \Theta_k (X - \varepsilon_1)(X - \varepsilon_2) \ldots (X - \varepsilon_k)[1, 2, \ldots, k]^2,$$

jest patrně v důsledku poslední rovnice

$$D_k(\varepsilon_1) = H_{k-1}(\varepsilon_1) \cdot \Theta_1 g'(\varepsilon_1). \tag{5}$$

Avšak mezi polynomy $H_k(X)$, jež lze psáti jako determinanty ve tvaru

$$H_k(X) = \begin{vmatrix} S_0 X - S_1, S_1 X - S_2, \ldots, S_{k-1} X - S_k \\ S_1 X - S_2, S_2 X - S_3, \ldots, S_k X - S_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{k-1} X - S_k, S_k X - S_{k+1}, \ldots, S_{2k-2} X - S_{2k-1} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} S_0, S_1, \ldots S_{k-1}, 1 \\ S_1, S_2, \ldots S_k, X \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_k, S_{k+1}, \ldots S_{2k-1}, X^k \end{vmatrix}, \tag{6}$$

$$S_k = \Theta_1 \varepsilon_1^k + \Theta_2 \varepsilon_2^k + \ldots + \Theta_k \varepsilon_m^k$$

jsou platny relace, jež snadno lze dokázati z pouček determinantních*)

$$C_{k-1}^2 H_k(X) + (C_{k-1} C'_k - C_k C'_{k-1} - C_{k-1} C_k X) H_{k-1}(X) +$$
$$+ C_k^2 H_{k-2}(X) = 0,$$

$$C_k = \begin{vmatrix} S_0, S_1, \ldots S_{k-1} \\ S_1, S_2, \ldots S_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{k-1}, S_k \quad\quad S_{2k-1} \end{vmatrix}$$

*) Viz ku př. *E. Pasca'*, I Determinanti, str. 91, 92, kdež uvedena příslušná literatura. Nejjednodušší důkaz relací uvedených jest pravděpodobně od *Netto*, Journal für r. u. a. Math. 116, str. 44 (1896).

a při čemž C'_k dostaneme z C_k nahradíme-li indexy v elementech posledního řádku čísly vesměs o jednu většími. Relace tyto jsou, klademe-li ještě $H_0(X) = 1$, platny $k = 2, 3 \ldots$

Než vztah (5) jest platen, ať ε_1 nahradíme kterýmkoliv z čísel $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, jež *pokládati budeme v následujícím za různá.* Jelikož pak $D_k(X)$ jsou polynomy pro $k = 1, 2, \ldots m$ stupně vesměs nižšího než m, následuje z (5) a (7) ihned tato relace

$$C^2_{k-1} D_{k+1}(X) + (C_{k-1} C'_k - C_k C_{k-1} - C_{k-1} C_k X) D_k(X) + \\ + C^2_k D_{k-1}(X) = 0 \quad (8)$$

pro $k = 2, 3, \ldots, m-1$ Avšak stanovíme li, že

$$D_0(X) = (X - \varepsilon_1)(X - \varepsilon_2) \ldots (X - \varepsilon_m),$$

a hledáme-li na základě (4) lineární vztah mezi $D_0(X)$, $D_1(X)$, $D_2(X)$, obdržíme po snadném počtu vztah

$$D_2(X) + (\Sigma \Theta_1 \varepsilon_1 - X \Sigma \Theta_1) D_1(X) + (\Sigma \Theta_1)^2 D_0(X) = 0,$$

který spadá do (8) jako zvláštní případ pro $k = 1$, volíme-li jenom $C_0 = 1$, $C'_0 = 0$; neboť jest $C_1 = S_0 = \Sigma \Theta_1$. $C'_1 = S_1 = \Sigma \Theta_1 \varepsilon_1$. V důsledku však relací (8) platných pro $k = 1, 2, \ldots m$ jest $D_0(X)$, $D_1(X), \ldots D_m(X)$ řada funkcí vznikajících užitím algorithmu Euklidova na polynomy $D_0(X)$, $D_1(X)$ a to způsobem vyloženým v předcházejícím odstavci, jsou-li jenom $C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$, jež jsou koefficienty nejvyšších mocnin X v $D_0(X)$, $D_1(X), \ldots D_{m-1}(X)$ (jak patrno z výrazů determinantních svrchu uvedených) vesměs od nully různá čísla. Má-li rovnice $g(X) = 0$, kde $g(X)$ jest mnohočlen předcházejícího odstavce, vesměs různé kořeny (což při libovolném ξ různém od konečného počtu pevných hodnot vskutku jest) můžeme klásti $D_0(X) = g(X)$ (to ostatně k vůli stručnosti bylo již svrchu zavedeno) a poněvadž

$$D_1(X) = \left(\frac{\Theta_1}{\xi - \varepsilon_1} + \frac{\Theta_2}{\xi - \varepsilon_2} + \ldots + \frac{\Theta_m}{\xi - \varepsilon_m} \right) g(X)$$

stačí k tomu, aby splněna byla rovnost $D_1(X) = h(X)$, kdež $h(X)$ jest opět mnohočlen definovaný v odstavci předcházejícím, voliti

$$\Theta_k = \frac{h(\varepsilon_k)}{g'(\varepsilon_k)}.$$

Jak souvisí polynomy $r_k(X)$ a čísla c_k odstavce předcházejícího s polynomy $D_k(X)$ a čísly C_k, jest na snadě a není třeba obšírněji se o tom zmiňovati (a rovněž tak o číslech b_k).

III.

1. V následujícím budeme zabývati se znaménky koefficientů při nejvyšší mocnině X, jakož i koefficientů při nejnižších mocninách X (t. j. členů nezávislých na X) v polynomech $D_k(X)$. Prvé označili jsme C_k, druhé označíme c_k a budeme tedy vyšetřovati, jaká znaménka mají členové řady

$$C_0 = 1, C_1 = A_1, C_2, \ldots C_m = D_m = c_m, c_{m-1}, c_{m-2}, \ldots c_1 = A_{2m-1}, \quad c_0 = A_{2m}. \tag{9}$$

Nejprvé vyšetřování to provedeme pro ten případ, že ξ má velmi velikou absolutní hodnotu (že $|\xi|$ jest větší než absolutní hodnota kteréhokoliv kořenu každé z rovnic $C_k = 0$, $c_k = 0$); k tomu cíli postačí nalézti znaménko nejvyšší mocniny proměnné ξ ve výrazech C_k, c_k. Z rovnic, které nám definují (postupným dělením) polynomy $D_k(X)$ dostáváme snadno, že stupně polynomů C_k resp. c_k v proměnné ξ jsou nejvýše rovny číslu $k(2k-1)$ resp. $2m + k(2k-3)$. Podržíme-li tudíž v koefficientech polynomů $g(X) = D_0(X)$, $h(X) = D_1(X)$, jež jsme značili A_k, toliko členy s nejvyšší mocninou čísla ξ (t. j. v A_k člen $\binom{2m}{k}\xi^k$), provedeme-li potom s těmito tak redukovanými mnohočleny $g(X)$, $h(X)$ výpočet výrazů C_k, c_k, pak součinitel při $\xi^{k(2k-1)}$ v C_k bude týž, jako kdybychom polynomy $g(X)$, $h(X)$ nebyli redukovali naznačeným způsobem. *Je-li tedy ten součinitel od nully různý, udává nám při $\xi = \infty$ svým znaménkem znaménko výrazu C_k vypočteného* pro neredukované $g(X)$, $h(X)$. Podržíme-li však v koefficientech polynomů $g(X)$, $h(X)$ v každém toliko člen s nejvyšší mocninou s ξ redukují se tyto polynomy na výrazy

$$\tfrac{1}{2}[(\xi+\eta)^{2m} + (\xi-\eta)^{2m}] \text{ resp. } \frac{1}{2\eta}[(\xi+\eta)^{2m} - (\xi-\eta)^{2m}], \quad \eta^2 = X, \tag{10}$$

Řešíme-li rovnici pro X

$$(\xi+\eta)^{2m} + (\xi-\eta)^{2m} = 0, \quad \eta^2 = X,$$

dostaneme snadným počtem kořeny ve tvaru

$$\varepsilon_k = -\xi^2 \operatorname{cotg}^2 \frac{2k-1}{4m}\pi\,; \quad k = 1, 2, 3, \ldots m$$

a pro Θ_k dostaneme rovněž snadným počtem

$$\Theta_k = \frac{\xi}{n \sin^2 \dfrac{2k-1}{4n}\pi}$$

Jsou tedy pro dostí velikou $|\xi|$ kořeny ε_k vesměs *reálné a záporné*, čísla Θ_k jsou pak téhož znaménka jako ξ; užijeme-li těchto výsledků ve výraze (4) pro $D_k(X)$ dostaneme ihned, že pro polynomy (10) čísla C_k, c_k nabývají těchto hodnot

$$C_k = \gamma_k \xi^{k(2k-1)}, \qquad c_k = \gamma' \xi^{2m+k(2k-3)},$$

při čemž $\gamma_k > 0$ i $\gamma'_k > 0$.

V případě obecném jest tedy

$C_k = \gamma_k \xi^{k(2k-1)}$ + členy v ξ stupně nižšího než $k(2k-1)$,

$c_k = \gamma'_k \xi^{2m+k(2k-3)}$ + členy v ξ st. nižšího než $2m + k(2k-3)$.

Poskytuje tudíž řada (9) pro $\xi = -\infty$ přesně $2m$ změn znaménkových, pro $\xi = \infty$ pak žádnou změnu znaménkovou a ztrácí se následkem toho, že ξ přechází spojitě od $-\infty$ do $+\infty$, při tomto přechodu celkem $2m$ změn znaménkových (aneb — obšírněji řečeno — o $2m$ více se jich ztratí než získá). Zároveň jest patrno, že počet hodnot ξ, pro které C_k a c_k mohou býti rovny nulle, jest konečný (kteroužto vlastnost mají i výrazy později zavedené a označené $\mathfrak{A}(r_1, r_2, \ldots r_k)$, $\mathfrak{a}(r_1, \ldots)$, jak stejně patrno). (Dokončení.)

O určité imaginárné ploše stupně 2. druhu III.

Podal prof. Dr. Vinc. Jarolímek.

I.

1. Dvě reálné kuželosečky A, B ležící ve dvou různých rovinách π, ϱ, ale na téže ploše 2 stupně φ^2,

a) mají dva společné body x, y, reálné nebo imaginárné;

b) indukují na průsečnici rovin $\overline{\pi\varrho} \equiv U$ touž involuci harmonických pólů, jejíž samodružné body jsou x, y;

c) leží na dvou kuželových plochách 2. stupně α, β, jsou tedy proniky kužele α (i β) s rovinami π, ϱ.

Plocha 2. stupně φ^2 může býti dána dvěma reálnými kuželosečkami A, B, jež mají dva společné body x, y, a jednou reálnou tečnou rovinou μ. Mohou pak tu nastat případy tyto:

2. Rovina μ seče obě křivky A, B v bodech reálných: křivku A v bodech t_1, t_2, křivku B v bodech u_1, u_2. Tečná rovina μ obsahuje čtyři reálné body plochy φ^2; tato musí tedy být sborcenou a spojnice $\overline{t_1 u_1}$, $\overline{t_2 u_2}$ (nebo $\overline{t_1 u_2}$, $\overline{t_2 u_1}$) jsou površky, ve kterých rovina μ plochu φ^2 seče. Průsečík $(\overline{t_1 u_1}, \overline{t_2 u_2}) \equiv z$ je bodem dotyčným; řídícími útvary A, B, $\overline{t_1 u_1}$ je plocha φ^2, obecně hyperboloid, určena s dostatek. Přímky $\overline{t_1 u_2}$, $\overline{t_2 u_1}$ dají druhý hyperboloid úloze hovící; oba jsou reálné a splynou v jedno, dotýká li se tečná rovina μ *jedné* z daných křivek, A nebo B. Dotýká li se rovina μ *obou* daných kuželoseček A, B, je li tedy tečnou k jedné z kuželových ploch α, β, jež křivkami A, B lze proložiti, plocha φ^2 stotožňuje se s kuželem α, resp. β.

3. Rovina μ nemá reálných bodů s křivkami A, B vůbec. Body t_1, t_2, u_1, u_2, ve kterých rovina μ seče křivky A, B, jsou tedy imaginárné, podvojně sdružené. Body $\begin{cases} t_1, t_2 \\ u_1, u_2 \end{cases}$ jsou samodružnými v elliptické involuci harmonických pólů křivky $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$, jejíž osou jest průsečnice $\begin{cases} \mu\pi \equiv P \\ \mu\varrho \equiv R \end{cases}$. Nicméně jsou průsečíky imaginárných sdružených spojnic $(\overline{t_1 \tau_1}, \overline{t_2 \tau_2}) \equiv z$, $(\overline{t_1 \tau_2}, \overline{t_2 \tau_1}) \equiv y$ reálné, i sestrojí se podle G. P. IV. str. 31. a 32.[1]), když prve stanovíme střed a potenci involuce na přímce P (resp. R) vytvořené křivkou A (B). Tečná rovina μ a dotyčný její bod z určují s křivkami A, B žádanou plochu φ^2 s dostatek; rovina δ proložená bodem z tak, aby protala A, B v reálných bodech 1, 2, 3, 4, protne plochu φ^2 v kuželosečce l, kterou proložíme pěti body z, 1, 2, 3, 4, načež plocha φ^2 je stanovena třemi kuželosečkami A, B, E. Že však rovina μ seče φ^2 v přímkách *imaginárných* $\overline{t_1 \tau_1}$, $\overline{t_2 \tau_2}$, je plocha φ^2 v tomto případě *nepřím-*

[1]) G. P. IV. značí spis „Jarolímek, Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru“, svazek IV.

ková. Totéž platí o ploše druhé, která jest určena bodem y a křivkami A, B [1]).

4. Rovina μ seče křivku A ve dvou reálných bodech t_1, t_2 (na přímce $\overline{\mu\pi} \equiv P$), křivku B ve dvou imaginárných bodech sdružených u_1, u_2 (na přímce $\overline{\mu\varrho} \equiv$ R), nebo naopak.

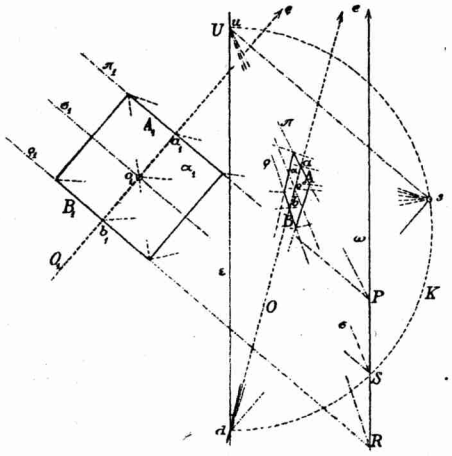
V tomto případě jsou přímky $\overline{t_1u_1}$, $\overline{t_2u_2}$ imaginárné, a nejsouce spolu sdruženy, mají i společný bod z pomyslný; a totéž platí i o spojnicích $\overline{t_1u_2}$ $\overline{t_2u_1}$. Žádaná plocha φ^2 je imaginárná [2]), majíc na reálné tečné rovině μ pomyslný bod dotyčný. Tato plocha φ^2 obsahuje však dvě reálné kuželosečky A, B, náleží tedy ke druhu *třetímu* (G. P. III. str. 101.), a má nutně také dvě reálné tečné plody kuželové 2. stupně. Že tato vlastnost přísluší imaginárné ploše stupně 2. druhu *II.* φ_1^2, dokázali jsme v G. P. V. na str. 62.; že však i na plochu druhu III. jí rozšířiti lze, jde na jevo z věty:

Imaginárnou plochu φ^2 stupně 2. druhu III. lze perspektivnou kollineací transformovati v imaginárnou plochu φ_1^2, stupně 2. druhu II. Pokládáme-li totiž A, B za podstavy kužele α (který danými kuželosečkami A, B podle odst. 1. c) lze proložiti), šikmo sříznutého, lze bráti *kužel α za relief válce přímého α_1*. Důkaz. Budiž U průsečnice rovin π, ϱ, ve kterých leží podstavy A, B (obr. 1., kdež nákresna postavena kolmo na U), d vrchol doplněného kužele α. Rovina ε položená vrcholem d a přímkou U budiž rovinou úběžnic (relief roviny ε_1 nekonečně vzdálené). Spusťme $\overline{du} \perp U$, opišme nad průměrem $\overline{du}$ kružnici K, zvolme na ní střed kollineace s (oko) a rovinu samodružnou (č. průmětnu) $\omega \parallel \varepsilon$ (roviny π, ϱ, ε, ω, jeví se v obraze přímkami). Aby kužel AB byl reliefem přímého válce A_1 B_1, musí U býti úběžnicí rovin $\pi_1 \parallel \varrho_1$, ve kterých leží pod-

[1]) Označíme-li průsečík $(PR) = x$, bude xyz společný polární trojúhelník svazku kuželoseček EK, jehož základní body jsou t_1, t_2, u_1, u_2. Tento svazek jest pak pronikem roviny μ se svazkem ploch 2. stupně $\Sigma\varphi^2$, jež procházejí kuželosečkami A, B (srovnej v G. P. III. str. 32; v našem případě bikvadratika L^4 rozpadá se v kuželosečky A, B).

[2]) Přímky t_1u_2, t_2u_1 dají druhou plochu imaginárnou ψ^2; plochy φ^2 a ψ^2 jsou sdružené, pronikají se v *reálných* kuželosečkách A, B a jsou vepsány do dvou *reálných* kuželů 2 stupně γ, δ.

stavy válce A_1, B_1; stanovme tedy průsečnice rovin $\overline{\pi\omega} \equiv P$, $\overline{\varrho\omega} \equiv R$, proložme rovinu (sU), stopou P rovinu $\pi_1 \parallel (sU)$ stopou R rovinu $\varrho_1 \parallel (sU)$, a promítněme z bodu s podstavy A, B do A_1, B_1 na rovinách π_1, ϱ_1. Sestrojíme-li póly a, b kuželoseček A, B pro poláru U, budou a, b reliefy středů a_1, b_1 (jež obdržíme v průsečících paprsků $\overline{sa}$, $\overline{sb}$ s rovinami π_1, ϱ_1) podstav válce A_1, B_1, a protože spojnice pólů $\overline{ab} \equiv O$ jde vrcholem d kužele α, musí spojnice $\overline{a_1 b_1} \equiv O_1 \parallel sd$; že však $\overline{sd} \perp sU$



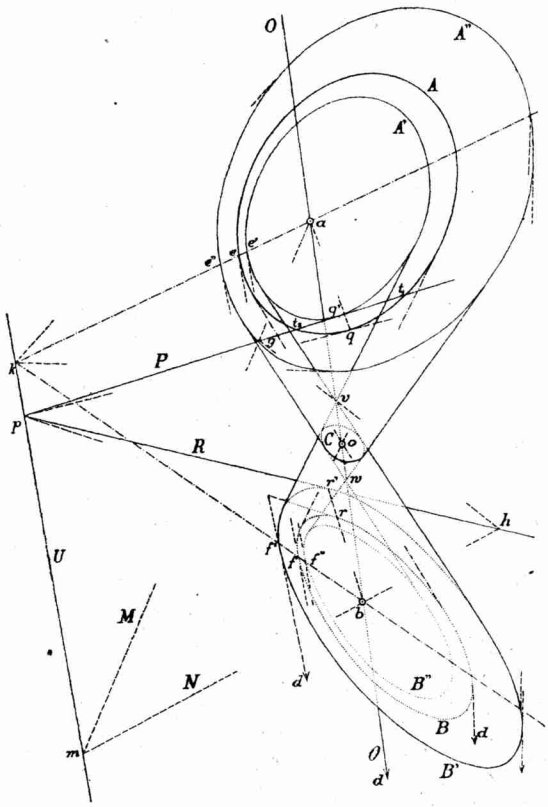
Obr. 1.

(v kružnici K), jest také $O_1 \perp \pi_1$, t. j. válec α_1 je *přímý*. Plocha φ^2 proložená křivkami A, B je reliefem plochy φ_1^2 druhu II., obsahující křivky $A_1 \cong B_1$. Stanovíme-li střed válce o_1, bude o_1 zároveň středem plochy φ_1^2, a rovina $o_1 \sigma_1 \perp O_1$ jednou hlavní její rovinou; ostatní dvě procházejí osou O_1 a osami křivky A_1.

5. Přikročme nyní k úloze:

Imaginárná plocha φ^2 stupně 2. druhu III. buď dána dvěma reálnými kuželosečkami A, B, jež ležíce v různých rovinách π, ϱ, mají dva společné body x, y, a jednou reálnou tečnou rovinou μ, která seče křivku A v reálných bodech t_1, t_2, křivku však B v imaginárných bodech u_1, u_2; sestrojiti jest obě reálné plochy kuželové 2. stupně γ, δ, které ploše φ^2 jsou

opsány. Buďtež v obr. 2. A, B obrazy daných kuželoseček, U obraz průsečnice rovin $\overline{\pi Q}$, který v našem případě A, B neseče, tudíž body x, y jsou pomyslné.



Obr. 2.

Křivky A, B leží na kuželi α, jehož vrchol zobrazíme průsečíkem d vnějších společných tečen obrazů A, B; tyto pak jsou perspektivně kollineárné na nákresně pro střed d a osu U. Póly a. b křivek A, B pro poláru U leží na přímce O jdoucí bodem d. Kužel α je reliefem přímého válce α_1, jehož osa je O_1; střed jeho o_1 má obraz svůj v bodě o, jejž obdržíme v průsečíku o vnitřních tečen obrazů A, B (nebo, jsou-li tečny pomyslné, druhém středu kollineačním křivek A, B), kdežto bod d_1 jest

úběžný na O_1. Je tedy O_1 jednou hlavní osou plochy φ_1^2, jejíž reliefem je daná imaginárná plocha q^2, a rovina $(o\ U) \equiv \sigma$ reliefem jedné hlavní roviny plochy q_1^2.

Tečná kuželová plocha γ_1, jejíž osa jest O_1, má vrchol v_1 v průsečíku osy O_1 s tečnou rovinou μ_1 plochy φ_1, jejíž reliefem je daná rovina μ; a každá rovina $\pi_1 \perp O_1$ seče kužel γ_1 v kuželosečce A'_1, která je homothetická [1]) s kuželosečkou A_1 (danou reliefem A), a má střed svůj na ose O. Obraz vrcholu v kužele γ obdržíme takto: proložme přímkou O libovolnou rovinu λ a stanovme její průsečnici s rovinou $\mu \equiv (PR)$; veďme stopu M roviny λ na rovině π bodem a směrem libovolným, průsečík $(MU) \equiv$ spojme s bodem b přímkou $N \equiv \overline{\mu Q}$; M seče P v bodě g, N přímku R v bodě h, $\overline{gh}$ je průsečnice rovin $\overline{\lambda\pi}$ a seče přímku O v žádaném vrcholu v. Rovina π seče pak kužel γ_1 v kuželosečce A'_1, jejíž reliefem A' bude kuželosečka homothetická, jež dána je pólem a, polárou U a tečnou P. Veďme bodem $(PU) \equiv p$ tečnu $\overline{pq}$ ke křivce A, dotyčný bod q spojme s pólem a, stanovme průsečík $(\overline{aq},\ A) \equiv q'$, a spojme $\overline{pq'}$ tečnou homologickou k A'; další body křivky A', jakož i sdružené průměry, z nichž jeden je $\| U$ a druhý sdružený k U, sestrojíme podle zákona kollineace křivek A, A' dle osy U a středu a.

Kužel γ, stanovený křivkou A' a vrcholem v protne rovinu δ v kuželosečce B' určené tečnou R, jejíž obraz sestrojíme tím, že vedeme bodem p tečnu $\overline{pr}$ k dané křivce B, dotyčný bod r spojíme s pólem b; $\overline{br}$ protne R v bodě r', načež sestrojíme kuželosečku B' kollineárnou ku B v soustavě (bU) pomocí homologických bodů r', r, Druhý kužel δ je reliefem kužele δ_1, souměrného s kuželem γ_1 centrálně podle středu o_1 i orthogonálně podle hlavní roviny $o_1\sigma_1 \| \pi_1$. Osa kužele δ_1 jest O_1, vrchol w_1; ježto $\overline{v_1o_1} = \overline{o_1w_1}$, jsou body v_1, w_1, o_1, d_1 (d_1 v nekonečnu) harmonické, což musí platit i o jejich obrazech; obraz vrcholu w (obr. 2.) obdržíme tedy jakožto čtvrtý harmonický bod k obrazům v, w, d. Kužel σ seče rovinu π v kuželosečce

[1]) Podle G. P. V. str. 61. Obrazy A, A', A'' homothetických křivek A_1, A'_1, A''_1 (obr. 2.) ovšem nejsou homothetické, nýbrž toliko perspektivně kollineárné podle obrazu osy U a obrazu středu a.

$A'' \cong B'$; obrazy těchto křivek jsou homologické podle středu d. Stanovme tedy na př. k bodu f' na B' homologický bod e'' na A'' [$\overline{bf'}, U) \equiv k$, $(\overline{ak}, \overline{df'}) \equiv e''$], a sestrojme kuželosečku A'' kollineárnou ku A v soustavě (aU) pomocí homologických bodů e'', e.

Kužel δ_1 protne posléze rovinu σ_1 v kuželosečce, jejíž obraz B'' obdržíme obdobně: stanovíme bod f'' homologický k bodu e' podle středu d, a sestrojíme kuželosečku B'' kollineárnou ku B v soustavě (bU) pomocí homologických bodů f'', f. Kužele γ a σ pronikají se ve dvou kuželosečkách C, D, jichž středy jsou o, d. Obraz křivky C jest kollineárný k obrazům A', a B' podle středu v a k obrazům A'', B'' podle středu w; osou kollineační v obou případech jest U, obraz středu o je pólem poláry U; a obdobné vlastnosti má obraz křivky D. Tato křivka D (jejíž obraz připadá mimo nákresnu) je reliefem kuželosečky D_1 nekonečně vzdálené na ploše válcové α_1, proložené křivkami $A_1 \cong B_1$. — Křivkami A, B a kuželi γ, δ je sestrojena *reálná kostra imaginárné plochy* φ^2 druhu III.

II.

6. Dva reálné kužele 2. stupně γ, δ, jež mají různé vrcholy v, w, ale jsou opsány téže ploše 2. stupně φ^2,

a) mají dvě společné tečné roviny ξ, η [1]), reálné nebo imaginárné;

b) na spojnici obou vrcholů $\overline{vw} \equiv O$ indukují touž involuci harmonických rovin polárných, jichž samodružné roviny jsou ξ, η;

c) pronikají se ve dvou kuželosečkách C, D, jsou tedy promítkami kuželosečky C (nebo D) ze dvou bodů v, w.

Abychom tedy stanovili dva kužele γ, δ tak, aby najisto měly dvě společné roviny tečné ξ, η (reál. č. imag.), zvolme rovinu σ, vytkněme v ní kuželosečku C, mimo rovinu σ dva body v, w, a z nich promítněme křivku C kuželovými plochami γ, δ; tyto pak budou se nutně pronikati v další reálné kuželosečce D, a v průsečících x, y křivek C, D budou kužele γ, δ míti společné roviny tečné. Body x. y, jsou-li reálné, obdržíme

[1]) Rovina ξ dotýká se kuželů podél přímek M, N a průsečík $(MN) \equiv p$ je dotyčným bodem roviny ξ na ploše φ^2; a obdobně stanoví se dotyčný bod q roviny η na φ^2.

takto: spojíme vrcholy $\overline{vw} \equiv O$, stanovíme průsečík p přímky O s rovinou σ, a bodem p vedeme tečny ke křivce C; body dotyčné jsou x, y.

Plocha 2. stupně φ^2 může býti dána dvěma k ní tečnými reálnými kuželovými plochami 2. stupně γ, δ, jež mají dvě společné tečné roviny ξ, η, a jedním reálným bodem m. Mohou pak tu nastati tyto případy:

7. Bod m nachází se *vně* daných kuželů; lze tedy bodem m položiti dvě reálné tečné roviny τ_1, τ_2 ke kuželi γ a dvě reálné tečné roviny ψ_1, ψ_2 ke kuželi δ. Průsečnice $\overline{\tau_1\psi_1}$, $\overline{\tau_2\psi_2}$ procházejí bodem m a jsouce površkami *sborcené* plochy φ^2, určují tečnou rovinu μ této plochy v bodě m; roviny μ, ξ, η s dotyčnými body resp. m, x, y určují s dostatek plochu φ^2, sborcený to hyperboloid. Průsečnice $\overline{\tau_1\psi_2}$, $\overline{\tau_2\psi_1}$, dají pak obdobně druhý hyperboloid úloze hovící. Oba splývají vjedno, je-li bod m na *jedné* z ploch γ, δ. Nachází-li se bod m na *obou* plochách kuželových γ, δ, tedy na jedné z kuželoseček C, D, v nichž γ a δ se pronikají, degeneruje plocha φ^2 v kuželosečku C, resp. D.

8. Bod m nachází se vnitř obou kuželů γ, δ, tudíž tečné roviny τ_1, τ_2, ψ_1, ψ_2 položené bodem m ke kuželům jsou imaginárné, podvojně sdružené. Roviny $\begin{cases}\tau_1, \tau_2\\ \psi_1, \psi_2\end{cases}$ jsou samodružnými v elliptické involuci harmonických polárných rovin kužele $\begin{cases}\gamma\\ \delta\end{cases}$ o vrcholu $\begin{cases}v\\ w,\end{cases}$ jejíž osou je spojnice $\begin{cases}\overline{mv} \equiv P\\ \overline{mw} \equiv R.\end{cases}$ Nicméně průsečnice imaginárných sdružených rovin $\overline{\tau_1\psi_1}$, $\overline{\tau_2\psi_2}$ leží v *reálné* rovině ζ a průsečnice rovin $\overline{\tau_1\psi_2}$, $\overline{\tau_2\psi_1}$ v reálné rovině η. Sestrojíme je takto: protneme involuce rovinové libovolnou rovinou ε v involucích paprskových I, J (v každé dvě družiny), stanovíme (podle G. P. IV. str. 32. a 33.) reálné spojnice Z, Y imaginárných bodů, ve kterých se protínají navzájem samodružné paprsky involucí I, J, a proložíme roviny $(mZ) \equiv \zeta$, $(mY) \equiv \eta$.

Bod m a tečná rovina jeho ζ určuje s tečnými kuželi γ, δ žádanou plochu φ^2 s dostatek. Vytkněme v rovině ζ kdekoli bod k, položme jím tečné roviny τ_1, τ_2, ψ_1, ψ_2 ke kuželům γ, δ, sestrojme kužel 2. stupně $\varkappa$, který se dotýká pěti rovin ζ,

τ_1, τ_2, ψ_1, ψ_2 protněme jej rovinou (mxy) [kdež x, y jsou dotyčné body kuželů γ, δ] v kuželosečce K, podél níž bude se kužel $\varkappa$ dotýkati plochy φ^2. A obdobně opatříme si druhou a třetí kuželosečku na ploše φ^2. Ježto tečná rovina ζ seče φ^2 v přímkách imaginárných, je plocha φ^2 *nepřímková*; totéž platí o ploše druhé, která je určena tečnou rovinou η a kuželi γ, δ.

9. Bod m nachází se vně kužele jednoho, na př. γ, ale vnitř kužele druhého δ. Tečné roviny τ_1, τ_2 položené bodem m ke kuželi γ, jsou tedy reálné, kdežto tečné roviny ψ_1, ψ_2 položené bodem m ke kuželi δ jsou imaginárné, spolu sdružené. V tomto případě jsou průsečnice $\overline{\tau_1\psi_1}$, $\overline{\tau_2\psi_2}$ imaginárné, ale nejsouce spolu sdruženy, neleží v jedné rovině reálné ζ; plocha φ^2 tudíž majíc reálný bod m, ale v něm tečnou rovinu ζ pomyslnou, nemůže býti reálná; a totéž platí o druhé ploše, k níž vedou průsečnice $\overline{\tau_1\psi_2}$, $\overline{\tau_2\psi_1}$. Avšak imaginárná plocha φ^2 majíc dvě reálné tečné plochy kuželové γ, δ, obsahuje také nutně dvě reálné kuželosečky A, B, z nichž jedna prochází daným bodem m. Vytkněme si tudíž úlohu, reciprokou k úloze 5.:

Imaginárná plocha φ^2 stupně 2. druhu III. buď dána dvěma reálnými tečnými kuželi γ, δ, jež mají různé vrcholy v, w, ale dvě společné tečné roviny ξ, η, a jedním reálným bodem m, který se nachází vně kužele γ a vnitř kužele δ; sestrojiti jest obě reálné kuželosečky A, B, které leží na ploše φ^2.

Kužele γ, δ pronikají se ve dvou kuželosečkách C, D, a roviny jejich v přímce U. Stanovme póly o, d kuželoseček C, D ku poláře U; spojnice jejich $\overline{od}$ je totožná se spojnicí vrcholů kuželů $\overline{vw} \equiv O$. Proložme dále rovinu $(mU) \equiv \pi$, v níž obsažena bude kuželosečka A; průsečík $(O\pi) \equiv a$. Rovina π seče kužel γ v kuželosečce A'; její kollineárná transformace, určená bodem m, pro střed a a osu U dá křivku A. K tomu bude třeba bodu m' na A' homologického ku m; spojnice bodů $\overline{ma}$ protne A' v bodě m', načež pomocí bodu m sestrojíme snadno kollineárnou křivku A. Druhou kuželosečku B obdržíme takto: na přímce O sestrojme bod b tak, aby dvojpoměr $(odab) = -1$, proložme rovinu $(bU) \equiv \varrho$ a sestrojme její průsek B s plochou kuželovou α, která jest určena křivkou A a vrcholem d. Konstrukce tyto jsou předchozími úvahami odůvodněny s dostatek.

Věstník literární.

Recense knih.

Základy mathematiky k studiu věd přírodních a technických. Napsal prof. Dr. *Jan Vojtěch.* Nákladem Jednoty Č. Mathematiků a Fysiků v Praze 1919. (Knihovna spisů math. a fys. svazek 2.)

Psáti učebnice počtu diferenciálního a integrálního jest úkol velmi málo vděčný; jednak tu velmi málo příležitosti k rozvinutí myšlenek původních v oboru tak všestranně propracovaném, takže namahavá fysická práce není výsledkem nijak odměněna; na druhé straně je to půda nebezpečná, na níž klopýtnutí je velmi snadné, a možno tu — mdle vyzbrojenému — blamovati se zcela nestřídmě.

Základní rys knihy p. V. tvoří domněnka, že se začátečníku studium usnadní, když se úskalí zastře a obtížné otázky základní zpola vynechají. Tak bychom v ní marně hledali poučení, *kdy* k dané funkci $y = f(x)$ existuje funkce inversní $x = \varphi(y)$, a zjištění její spojitosti; též věty o průběhu funkce (stoupání a klesání) nejsou dostatečně dokázány a rovněž věta o konstantní funkci (str. 122) vyžaduje zcela jiného aparátu. Funkce implicitní (str. 89) tu definována jen pro jednoduché tvary rovnic, ale otázka po *existenci* derivace se prostě přešla, a vyložen pouze početní proces mechanický. Důkaz spojitosti funkce a^x by uspokojil, kdyby byl dokázán jeho podklad $\lim a^x$ pro x nekonečně malé. Také důkaz existence omezeného integrálu vynechán; při integraci substitucí marně hledáme podmínky, na něž je volba subst. funkce vázána. A tu hned na samém začátku integrálního počtu zavádí se integrál v nekonečných mezích. Překvapuje naivní otázka 5. na str. 156, jež se týká integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^n}\, dx, \quad n < 1;$$

pro záporná x přece funkce x^n (s libovolným exponentem) v *reálném* oboru není definována (na př. $n = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$) a pomyslným veličinám se kniha až úzkostlivě vyhýbá.

Pravidlo Hôpitalovo zakládá autor na tvaru

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \frac{\varphi'(a+\vartheta_1 h)}{\psi'(a+\vartheta_2 h)},$$

a tím pozbývá možnosti důkazu obvyklé methody pro případ $\varphi'(a) = 0$, $\psi'(a) = 0$. Jeho tvrzení na začátku str. 204 je sice správné, ale není

tam dokázáno. (Důkazy v dobrých knihách vyložené spočívají na větě, dle níž v napsané rovnici je $\vartheta_2 = \vartheta_1$).

Případ neurčitého tvaru $\frac{0}{0}$ pro $x = \infty$ vynechán, a rovněž výklad tvaru $\frac{\infty}{\infty}$ nezbavuje nás pochybností. Obecné theorii řad věnováno všeho všudy půldruhé stránky a jest výklad držen zcela v duchu F. J. Studničky.

V témž duchu jako předešlé úvahy pokračují výklady o funkcích implicitních (str. 255) a o hodnotách extremních.

Zvláštní je, že kniha neobsahuje pravidla o derivování za znamením integračním (jakož se vůbec partie omezených integrálů jen letmo dotkne), ačkoli ho na str. 277 užívá.

O řadě Fourierově praví autor, že v ní lze rozvinouti každou (jednoznačnou, NB. jiné v reálném oboru se neuvažují) funkci a že »daná funkce ani její derivace nemusí býti ani spojitá«. Důkaz tohoto tvrzení byl by vědecký čin prvého řádu; bohužel vývody na str. 216—218 nedokazují nic a také by se případný důkaz minul s pochopením v prostředí, pro něž tato kniha určena. Mám také pochybnosti, že by se důkaz nějak zdařil, když věta je zajištěně mylná, jak o tom nikdo není v pochybnosti, kdo si poněkud všímá literatury. Na místě věty Pythagorovy tvoří v našem věku oslí most základní věta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Musí míti veliké zklamání za následek u čtenáře, který se poctivě snaží porozuměti věci, čte-li pod čarou na str. 250, že důkaz toho je jednoduchý. Neboť co tam stojí není ani jednoduché ani důkaz; bychom to stručně vyložili, zaveďme zkrácení

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 + \varepsilon'_4) = \eta;$$

pak by důkaz byl důkazem, kdyby bylo zajištěno, že

$$\lim \frac{\eta}{hk} (h,\ k \backsim 0) \text{ je } = 0.$$

Jednoduchý příklad veličiny 3. řádu $\eta = ah^3 + a'h^2k + a''hk^2 + a'''k^3$ ukazuje, že limita toho typu existuje toliko při $a = 0$, $a''' = 0$.

Vyšetření zbytku Taylorovy řady (a vůbec celá její theorie) by se stalo průzračnějším a stačilo by k tomu několik málo řádků, kdyby se přiměřeně užilo omezeného integrálu. Pojem funkce náhradní — věc to zcela jalová — mohl odpadnouti.

Podivná rovnice (str. 103) pod čarou) $\lim \frac{\sin \varepsilon^0}{\varepsilon^0} = \frac{\pi}{180}$ jen ukazuje nechuť, s jakou kniha psána.

M. Lerch.

Odpověď prof. Vojtěcha.

Moje odpověď na výtky pana L. může býti krátká: Jak jsem v předmluvě knihy uvedl, podávají Z. m. v podstatě obsah přednášek jednoročního kursu mathematiky na technice (docentských přednášek pro chemiky); nejsou tedy určeny ani pro delší normální studium techniků ani snad pro studující odborníky. Proto tam nemohou býti projednávány otázky existenční a jiné jemnější, ani mnohé důkazy, pro kteréž věci uvedení interesenti nemají porozumění ani času. Vzhledem k této předem vytčené povaze učebnice odpadá většina výtek p. kritika. Vždyť přece by nebylo těžko pojati do knížky obecně známé úvahy a důkazy, kdyby se právě (se zřetelem ke stupni chápavosti a potřebám studujících, jakož i k rozsahu knihy) do ní hodily. Ať se jen podívá p. kritik na obdobné spisy v cizích literaturách.

V ostatních případech zbytečně plýtvá p. L. efektními slovy a jizlivými »vtipy« (jež neodpovídají vážnosti věci a jeho osoby) na úkor správnosti svých tvrzení. Nekonečné řady jsou pro technika (chemika) věcí zcela vedlejší; proto (jako úvod k úvaze o řadě Taylorově) podány jsou v knize co nejstručněji některé názvy příslušné a jedno snadné kriterium konvergence, takže duch Studničkův se ani nemohl projeviti. Poznámka o řadě Fourierově má pouze za účel poukázat na veliký význam řady té a poměr její k řadě Taylorově; týká se přirozeně jen funkcí, jež se vyskytují v aplikacích (jak to souhlasí s určením knihy). Mluviti o podmínkách rozvinutelnosti a podávat nějaké důkazy příslušné bylo by (zde zvláště) pro jejich délku, obtíž a nezvyklost nemístné. Podobně poznamenává o téže věci na př. Zoretti ve své učebnici Leçons de mathématiques générales 1914, p. 619: »... la continuité de $f(x)$ dans l'intervalle où l'on veut la représenter est parfaitement inutile pour le calcul des coefficients et pour que le développement soit valable. L'existence ou la continuité des dérivées l'est encore moins. Cela ajoute naturellement à l'importance de ces séries«; nebo Czuber (Vorlesungen über D. u. J. R. II. 1912, p. 233—4). Snad tedy jen stylisace měla tu býti opatrnější. Věta o záměnnosti pořadu v derivování funkce dvou proměnných podle těchto proměnných je (v stručné poznámce pod čarou, zajistá jednoduché) správně dokázána se samozřejmým předpokladem, že přírůstky h a k jsou nekonečně malé téhož řádu (důkaz této věty nemá ostatně pro knihu valného významu).

Zbývá několik drobností. Důkaz spojitosti funkce a^x a rozšíření pravidla de l'Hospitalova si studující snadno sám doplní; pojem funkce náhradní u vzorce Taylorova pokládám spolu s jinými učiteli za vhodný pro pochopení významu vzorce toho; otázka jednoho příkladu o integrálu omezeném (vytknutého z počtu aspoň 450 příkladů k cvičení) není naivní, protože existuje v reálném oboru dost funkcí (pro n celá záporná a některá lomená), jichž se týká; rovnice o limitě

$\sin \varepsilon : \varepsilon$ vyjadřuje krátce důležitou okolnost, v poznámce řádně vyloženou. Tvrzení páně kritikovo o nechuti autorově je jeho (ovšem nesprávný) výmysl.

Jsou tedy všechny výtky p. kritika — třebas některé jsou nestřídmě přehnány — neoprávněné.

Konečně mi budiž dovolena ještě malá poznámka. Bylo by zajisté zajímavé, kdyby p. L. sám vydal učebnici (třeba jen) vyšší analyse pro techniky, aby ukázal, jak má podobná kniha vypadat, aby byla ve všem bezvadná, správná i srozumitelná; a ovšem aby obsahovala věci technikům potřebné a neobsahovala věcí pro ně nepotřebných. Měl k tomu jako pěstitel analyse blíže než ten, kdo se zabývá geometrií. Tím více se takový čin jeho (třebas »velmi málo vděčný«) mohl očekávat, že bylo přímo povinností p. L. jako učitele techniky, aby za 14 let své činnosti na škole podal svým posluchačům nutnou pomůcku k úspěšnému studiu. Dr. *Jan Vojtěch.*

Zprávy.

Vypsání ceny Studničkovy.

V r. 1920. bude udělena Jednotou čes. mat. a fysiků cena Studničkova (Kč 500·—) za nejlepší zpracování tematu:

»Buďtež podrobně oceněny Šimerkovy zásluhy, jež si získal svou činností o teorii čísel, zvláště o teorii forem kvadratických.«

Lhůta k podání spisu do 31. prosince 1921.

Šestý mezinárodní sjezd matematiků, jenž byl ohlášen v minulém ročníku našeho Časopisu, konal se ve dnech 22.—28. září t. r. ve Štrasburku, v místnostech tamější university. V zahajovací schůzi, konané 22. září dopol., zvoleni: za čestného předsedu senior francouzských matematiků, C. Jordan, který přes svých 82 let se sjezdu velmi činně účastnil; za předsedu E. Picard; za generálního tajemníka G. Koenigs. Práce sjezdová byla organisována stejně jako na dřívějších kongresech, obsahujíc jednak hlavní přednášky (conférences) vynikajících matematiků o větších oborech vědy, jednak zprávy (communications) podrobnější a jednající zpravidla o tematech omezených, přednášené v některé ze čtyř ustavených sekcí (I. sekce: aritmetika, algebra a analyse; II. sekce: geometrie; III. sekce: mat. applikovaná; IV. sekce: otázky filos,, pedagogické a j.). Přednášky konali:

Larmor: Questions in physical indetermination.

Dickson: Relations between the Theory of numbers and other branches of Mathematics.

de la Vallée-Poussin: Sur les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent.

Volterra: Sur l'enseignement de la Physique, Mathématique et de quelques points d'analyse.

Nörlund: Sur les équations aux différences finies.

Zpráv předložených v jednotlivých sekcích bylo: v první 33, ve druhé 12, ve třetí 23, ve čtvrté 10.

Vedle vlastní vědecké práce konány exkurse (do ústavů universitních, muzeí, katedrály, rýnských přístavů a j.) a výlety (do okolí města, po skončení sjezdu na alsaská bojiště). O společenskou stránku, důležitou pro seznamování a styk členů, bylo hojně postaráno; členové kongresu byli uvítáni na večírcích a recepcích organisačním výborem, alsaským místodržitelem (»commissaire général de la République«), jenž mimo to pozval delegáty vlád a korporací na snídaní, obcí štrasburskou a spolkem »Société des amis de l'Université«; mimo to byli členové kongresu pozváni na slavnostní schůzi místního spolku »Société des sciences, d'agriculture et arts du Bas-Rhin«, pořádanou na počest kongresu a spojenou s koncertem; konečně v poslední den trvání kongresu pořádal organisační výbor banket na rozloučenou.

Účast na kongresu nebyla ovšem taková jako na sjezdech dřívějších; proti počtu 574 členů na V. sjezdu konaném 1912 v Cambridgi, přihlásilo se ke sjezdu ve Štrasburku necelých 200 členů. Ale příčiny toho jsou jasné a uváží-li se dobře, shledá se, že tento počet je v daných poměrech zcela uspokojivý. Značný podíl na snížení počtu účastníků mělo to, že Němci (spolu s Maďary a Bulhary) a Rusové (s výjimkou Rusů žijících v cizině) nebyli pozváni na kongres. Účastníků těchto národností na sjezdu cambridgském bylo 118 (Němců z Německa samotných 53), takže přesně vzato je třeba s počtem členů kongresu VI. srovnávati počet $574 - 118 = 456$; snížení tohoto počtu na udanou míru lze pak velmi snadno vysvětliti obtížemi v cestování a nákladností cesty, jakož i neustálenými dosud poměry politickými.

Vědecký úspěch sjezdu je nepopíratelný; přesně bude možno jej oceniti, až budou uveřejněny podrobné zprávy kongresové.

Proti dřívějším sjezdům měl ovšem kongres tentokráte velmi vyslovený ráz politický; hold vítězné Francii a radost z osvobození Alsaska a Lotrinska projevovaly se při všech příležitostech a dodávaly schůzi zahajovací a závěrečné, jakož i schůzkám společenským ráz manifestační.

Příští sjezd matematiků má se konati v r. 1924 v Novém Yorku.

Účast českých matematiků byla značná (11 členů) a byla umožněna štědrostí ministerstva školství a nár. osvěty. Čeští matematikové

litovali, že nemohl býti při prvém samostatném kroku na poli mezinárodních styků jejich vůdcem prof. M. Lerch, jak bylo původně určeno; bohužel nemohl prof. Lerch zúčastniti se pro nepředvídanou překážku sjezdu, na němž měl zastupovati vládu naší republiky a kde by přítomnost našeho předního matematika byla jistě nad jiné bývala vítána. Čeští matematikové účastnili se značnou měrou prací kongresových, přednesli pět zpráv (v sekci I. Rádl, v sekci II. Sobotka, Hostinský a Bydžovský, v sekci III. Hostinský) a obnovili a navázali hojně styků. Zvláště srdečný byl styk s matematiky štrasburské university, naší nejbližší spřátelené vysoké školy na západě. Zájem, který jevili o naše poměry vědecké, studijní i jiné veřejné, zdá se býti zárukou, že ve vzájemných stycích bude pokračováno, jistě na prospěch naší vědy.

Na sjezdu daly se zastupovati: ministerstvo škol. a nár. osvěty (del. Bydžovský) a »Jednota českých matem. a fysiků« (del. Sobotka).

Za zmínku stojí, že spolek německých matematiků »Deutsche Mathematiker-Vereinigung«, protestuje prohlášením uveřejněným v jeho »Jahresbericht« (sv. 29., seš. 1.—6.) proti tomu, že nebylo dbáno usnesení V. sjezdu, podle něhož příští kongres (určený na r. 1916, což v protestu není uvedeno) měl se konati ve Stokholmu; rovněž protestuje proti tomu, že »vyloučením matematiků středních států a volbou místa shromáždění byla porušena mezinárodnost kongresu.«*)

Současně se sjezdem konala se schůze mezinárodní »Union mathématique«, k níž někteří národové již přistoupili, utvořivše (jak stanovy předpisují) svoje »Comité national«. Ze schůze, jíž se zúčastnili jako hosté také zástupci ostatních národů, vyšla výzva k dalšímu přistupování; není pochybnosti, že toto vyzvání bude míti značný účinek. Zvláště doufáme, že také čeští matematikové co nejdříve utvoří svůj »národní výbor«, jímž přistoupí k mezinárodní vědecké organisaci. *B.*

Mathematický ústav university v Strasburku.

Seznam přednášek v roce 1920—21.

Mimo úvodní přednášky z mathematiky, racionální mechaniky a astronomie, jež jsou určeny pro posluchače prvních tří ročníků, konají se tyto přednášky pro pokročité:

1. běh 1920—21 (od 1. listopadu do 21. února):

Bauer: Theorie kvant. Konstituce atomů (3 přednášky týdně).

Fréchet: Začátky počtu pravděpodobnosti (2). — Základní pojmy o integrálních rovnicích (1).

*) Ostatně se se li němečtí matematikové v době, kdy se konal sjezd, v Nauheimu na shromáždění něm. přírodozpytců a lékařů.

2. běh 1921 (od 1. března do 20. června):

Bauer: Statistické aplikace nauky o kvantech (3).

Fréchet: Aplikace počtu pravděpodobnosti (1). — Funkce čar (2).

Villat: Výzkumy o pohybu tuhého tělesa ve viskosní kapalině (2).

Pérès: Transformace ploch, jež lze jedny ve druhé převésti deformací (2).

Valiron: Dirichletovy řady a řady faktoriální (2).

Mimo to sejdou se profesoři se studenty nejméně jednou měsíčně k mathematickým koloquiím (třetí úterý v měsíci o $8^1/_2$ hod. večerní). ***H.***

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O kvadratických tělesech číselných.

Dr. Karel Rychlík.

§ 1. Kvadratické těleso číselné.

Těleso číselné je soustava čísel, v níž možno prováděti čtyři základní početní úkony: sčítání, odčítání, násobení a dělení. Výsledek těchto operací, až na dělení nulou, provedeme-li je s libovolnými čísly oné soustavy, dá zase čísla z ní.

Tak na příklad čísla racionálná tvoří těleso: součet, rozdíl součin a podíl (je-li dělitel $\neq 0$) dvou čísel racionálných je zase číslo racionálné. Toto těleso označíme R. V pojednání tomto budeme se zabývati dalšími jednoduchými tělesy číselnými, totiž tělesy kvadratickými a budeme se snažiti definovati pro ně též pojem celistvosti a dělitelnosti.

Uvažujme všechna čísla, která možno vyjádřiti ve tvaru $a + b\sqrt{m}$, kdež m značí pevné číslo racionálné, však $\sqrt{m}$ je irracionálná, a, b pak libovolná čísla racionálná. Číslo takové $a + b\sqrt{m}$ je tehdy a jen tehdy $= 0$, když současně $a = b = 0$. Lze snadno dokázati, že souhrn čísel toho tvaru tvoří těleso. Jsou-li totiž $a_1 + b_1\sqrt{m}$ a $a_2 + b_2\sqrt{m}$ libovolná dvě taková čísla, tedy a_1, b_1, a_2, b_2 čísla racionálná, je součet $a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\sqrt{m}$, rozdíl $a_1 - a_2 + (b_1 - c_2)\sqrt{m}$ a součin jich $a_1 a_2 + m b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\sqrt{m}$ zase číslo z onoho souhrnu. Platí to i pro podíl $(a_1 + b_1\sqrt{m}) / (a_2 + b_2\sqrt{m})$, kdež $a_2 + b_2\sqrt{m} \neq 0$ tak že není současně $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, uvážíme-li, že lze jej uvésti na tvar

$$\frac{(a_1 + b_1\sqrt{m})(a_2 - b_2\sqrt{m})}{a_2^2 - b_2^2 m} = \frac{a_1 a_2 - m b_1 b_2}{a_2^2 - b_2^2 m} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 - b_2^2 m}\sqrt{m}$$

Speciální těleso právě definované nazývá se *tělesem kvadratickým*. Je určeno číslem $\sqrt{m}$ a proto je označíme $R(\sqrt{m})$. Obsahuje v sobě všechna čísla z tělesa R. Racionálná funkce $\sqrt{m}$

s racionálnými koefficienty a obecněji racionálná funkce libovolného konečného počtu čísel z $R(\sqrt{m})$ s racionálnými koefficienty, nemá-li jmenovatele $=0$, je zase číslo z $R(\sqrt{m})$. Je-li m kladné, je $\sqrt{m}$ číslo reálné; všechna čísla z tělesa $R(\sqrt{m})$ jsou reálná, *těleso* nazývá se *reálné*; je-li m záporné, tu jsou v tělese $R(\sqrt{m})$ všechna čísla, která nejsou racionálná, kompleksní, *těleso* nazývá se pak *imaginárné*.

Je ihned jasno, že, označíme-li k libovolné číslo racionálné, je $R(k\sqrt{m}) = R(\sqrt{m})$, Na základě toho lze nahraditi m číslem celým. Je-li totiž $m = m'/m''$, kdež m' a m'' jsou čísla celá, je $R(\sqrt{m}) = R(m''\sqrt{m}) = R(\sqrt{m'm''})$. Dokonce *lze* pak *nahraditi m číslem celým, které není dělitelno čtvercem žádného prvočísla* (od § 4. budeme o m předpokládati, že jest již tak zvoleno).

§ 2. Čísla sdružená, stopa, norma, diskriminant čísla a dvojice čísel.

Kořeny kvadratické rovnice $a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$ jsou patrně oba čísla z tělesa $R(\sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2})$, není-li $\sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}$ číslo racionálné.

Je-li α číslo z tělesa kvadratického $R(\sqrt{m})$, $\alpha = a + b\sqrt{m}$ nazývá se $\alpha' = a - b\sqrt{m}$ *číslem* s ním *sdruženým* v tělese $R(\sqrt{m})$. Naopak je α číslem sdruženým s α'. Čísla spolu sdružená jsou si rovna jedině jsou-li to čísla racionálná.

Součet a součin obou čísel sdružených α, α' jsou čísla racionálná. Součet $S\alpha = \alpha + \alpha' = 2a$ nazývá se někdy *stopou*, součin $N\alpha = \alpha\alpha' = a^2 - b^2 m$ *normou*. Je patrně $S\alpha = S\alpha'$, $N\alpha = N\alpha'$, $N\alpha_1\alpha_2 = N\alpha_1 N\alpha_2$, $N\alpha_1/\alpha_2 = N\alpha_1/N\alpha_2$ pro $\alpha_2 \neq 0$. Jediné číslo z tělesa kvadratického, jehož norma $= 0$, je 0. Norma všech čísel $\neq 0$ z tělesa imagimárného je kladná.

Diskriminant čísla α, $D(\alpha)$ nazývá se výraz $D(\alpha) = (\alpha - \alpha')^2 = 4b^2 m$. Zase je $D(\alpha) = D(\alpha')$. Diskriminant je $= 0$ pouze pro čísla racionálná.

Čísla spolu sdružená α, α' jsou kořeny kvadratické rovnice $(x - \alpha)(x - \alpha') = x^2 - S\alpha\, x + N\alpha = x^2 - 2a x + a^2 - b^2 m = 0$. Její diskriminant je diskriminantem α.

Diskriminantem soustavy dvou čísel $\alpha_1 = a_1 + b_1\sqrt{m}$, $\alpha_2 = a_2 + b_2\sqrt{m}$ nazývá se výraz $D(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 \end{vmatrix}^2 = 4(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 m$.*)

Je patrně $D(\alpha_1, \alpha_2) = D(\alpha_2, \alpha_1) = D(\alpha'_1, \alpha'_2)$.

Dále je $D(\alpha) = D(1, \alpha)$.

O diskriminantu dvojice čísel z $R(\sqrt{m})$ lze snadno dokázati větu:

Je-li $\beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2$, $\beta_2 = c_{21}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2$, platí

$$D(\beta_1, \beta_2) = \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{22} \\ c_{21}, & c_{22} \end{vmatrix}^2 D(\alpha_1, \alpha_2).$$

Je totiž $\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta'_1 & \beta'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2, & c_{21}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 \\ c_{11}\alpha'_1 + c_{12}\alpha'_2, & c_{21}\alpha'_1 + c_{22}\alpha'_2 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{12} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 \end{vmatrix}$$

a utvořením čtverců dostaneme ihned větu uvedenou.

§ 3. Čísla lineárně neodvislá.

Čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ z tělesa $R(\sqrt{m})$ nazveme *lineárně neodvislými*, jestliže rovnice $c_1\alpha_1 + \ldots + c_k\alpha_k$, kdež koeficienty $c_1, c_2, \ldots c_2$ jsou čísla racionálná, může platiti pouze tehdy, když všechny tyto koeficienty jsou $= 0$. V tělese $R(\sqrt{m})$ jsou jistě dvě čísla lineárně nezávislá, totiž 1 a $\sqrt{m}$.

Aby čísla $\alpha_1 = a_1 + b_2\sqrt{m}$, $\alpha_2 = a_2 + b_2\sqrt{m}$, *byla lineárně nezávislá, je nutno a stačí, aby jich diskriminant byl různý od 0.*

Rovnice $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0$ je splněna racionálnými čísly pouze tehdy, když platí současně rovnice $c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0$, $c_1 b_1 + c_2 b_2 = 0$. Těm lze však vyhověti čísly c_1, c_2, jež nejsou obě $= 0$ tehdy a pouze tehdy, když $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, t. j když

*) Determinant $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 \end{vmatrix}$ je zkrácené označen výrazu $\alpha_1\alpha'_2 - \alpha'_1\alpha_2$ ať jsou $\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_1, \alpha'_2$ čísla ja á oliv. Dá'e se vyskytujíci vzor c pro součin determinantů lze jednoduchým výpočtem verifikovati.

$D(\alpha_1, \alpha_2) = 0$. Je-li tedy $D(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$, jsou čísla α_1, α_2 jistě lineárně nezávislá.

Z výrazu pro diskriminant vidíme pak ihned, že *pro všechny dvojice lineárně neodvislých čísel z tělesa* $R(\sqrt{m})$ *má diskriminant totéž znamení a sice jako* m.

Jsou-li $\alpha_1 = a_1 + b_1\sqrt{m}$, $\alpha_2 = a_2 + b_2\sqrt{m}$ *libovolná dvě lineárně nezávislá čísla z* $R(\sqrt{m})$, *lze znázorniti libovolné číslo* $\alpha = a + b\sqrt{m}$ *z* $R(\sqrt{m})$ *ve tvaru* $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ *s racionálnými koeficienty* c_1, c_2. *Toto znázornění je jednoznačné.*

Aby totiž $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$, je nutno a stačí, aby $a = c_1 a_1 + c_2 a_2$, $b = c_1 b_1 + c_2 b_2$. Rovnice ty lze splniti, je-li $a_1 b_2 - c_2 b_1 \neq 0$, t. j. $D(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$ a určují pak c_1 a c_2 jednoznačně.

Tři čísla α_1, α_2, α_3 *z tělesa* $R(\sqrt{m})$ *jsou vždy lineárně odvislá* (t. j. *nejsou lineárně nezávislá*).

Jsou li čísla α_1, α_2 lineárně závislá, je rovnice $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0$ splněna pro $c_3 = 0$. Jsou li však α_1, α_2 lineárně nezávislá, lze dle předešlé věty určiti c_1, c_2 tak, aby $\alpha_3 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$, tak že rovnice $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0$ je splněna pro $c_3 = -1$.

Jsou-li α_1, α_2 lineárně nezávislá čísla z $R(\sqrt{m})$, dají se libovolná dvě čísla β_1, β_2 znázorniti ve tvaru $\beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2$, $\beta_2 = c_{21}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2$ s racionálnými koeficienty c. Snadno lze rozhodnouti, kdy pak budou čísla β_1, β_2 lineárně neodvislá. Ježto $D(\beta_1, \beta_2) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}^2 D(\alpha_1, \alpha_2)$, patrně tehdy a jen tehdy, když $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{12} \end{vmatrix} \neq 0$.

§ 4. Čísla celá.

Číslo α z tělesa kvadratického $R(\sqrt{m})$ nazývá se *celé*, je-li kořenem rovnice druhého stupně $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$ s racionálnými celými koeficienty a_1, a_2.

Ihned lze dokázati, že *libovolné číslo* β *z tělesa* $R(\sqrt{m})$ *je podílem dvou čísel celých*, a dokonce, že *lze za jmenovatele zvoliti číslo celé racionálné.*

Nechť β hoví rovnici $b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0$, kdež b_0, b_1, b_2 jsou čísla celá racionálná. Rovnici té lze dáti, násobíme-li ji b_0, tvar $(b_0 x)^2 + b_0 b_1 (b_0 x) + b_0^2 b_2 = 0$, z čehož je viděti, že $b_0 \beta = \alpha$ je číslo celé, tak že skutečně $\beta = \alpha / b_0$.

Celé číslo z kvadratického tělesa, které je racionálné, je racionálné celé číslo.

Budiž α celé číslo z tělesa hovící rovnici $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$ s racionálnými celými koeficienty. Dejme tomu, že je α číslo racionálné. Vyjádřeme je ve tvaru $\alpha = a/b$, kdež a, b jsou celá čísla nesoudělná, Platí tedy rovnice $\frac{a^2}{b^2} + a_1 \frac{a}{b} + a_2 = 0$, $\frac{a^2}{b} = -(a_1 a + a_2 b)$, tak že musí býti a^2/b celým číslem. Ježto a, b jsou čísla nesoudělná, není to jinak možno než že $b = \pm 1$. Musí tedy býti α celé číslo racionálné.

Číslo α' sdružené s celým číslem α je zase celé, ježto α a α' jsou kořeny téže rovnice kvadratické.

Budeme se nyní zabývati otázkou, v jakém tvaru lze vyjádřiti celé číslo z tělesa $R(\sqrt{m})$. Za účelem zjednodušení dalších úvah budeme předpokládati, že m je celé číslo bez dělitelů kvadratických.

Každé číslo α z tělesa $R(\sqrt{m})$ lze psáti ve tvaru $\alpha = (a + b\sqrt{m})/c$, kdež a, b, c jsou čísla spolu nesoudělná a c kladné. α je kořenem rovnice druhého stupně $x^2 - \frac{2a}{c} x + \frac{a^2 - b^2 m}{c^2} = 0$. Aby bylo α celé číslo musí býti $2a/c$, $(a^2 - b^2 m)/c^2$ celá čísla. I budeme rozeznávati dva případy:

1. c liché. Pak musí býti a dělitelno c a aby bylo $a^2 - b^2 m$ dělitelno c^2, musí býti $b^2 m$ dělitelno c^2. Ježto není m dělitelno čtvercem žádného prvočísla, musí býti b dělitelno c. I je nutně, ježto čísla a, b, c mají býti nesoudělná a $c > 0$, $c = 1$. V tomto případě má celé číslo z tělesa $R(\sqrt{m})$ tvar $a + b\sqrt{m}$, kdež a, b jsou celá čísla racionálná. Naopak čísla tohoto tvaru jsou celá, ježto hoví rovnici s celými koeficienty $x^2 - 2ax + a^2 - mb^2 = 0$.

3. Je-li c sudé, $c = 2c_0$ pak musí býti a/c_0 celé číslo a též $(a^2 - m b^2)/c_0^2$ celé číslo, z čehož plyne nejprve, že musí býti mb^2/c_0^2 celé číslo a tedy jako dříve $c_0 = 1$, $c = 2$. Dále pak musí býti $(a^2 - mb^2)/c^2 = (a^2 - mb^2)/4$ celé číslo, t. j. $a^2 \equiv mb^2 \pmod 4$. Této kongruenci lze vyhověti při $m \equiv 2$ neb 3 jen tak, že a i b

je sudé, což není přípustno, ježto a, b, c jsou dle předpokladu čísla nesoudělná. V tom případě mají tedy všechna celá čísla z $R(\sqrt{m})$ tvar $a + b\sqrt{m}$. Je-li však $m \equiv 1 \pmod 4$, lze korgruenci $a^2 \equiv mb^2 \pmod 4$ splniti též tak, že a i b jsou čísla lichá a v tomto případě jsou v $R(\sqrt{m})$, vedle celých čísel tvaru $a + b\sqrt{m}$ též celá čísla tvaru $\frac{1}{2}(a + b\sqrt{m})$ s a i b lichým. Naopak lze tvrditi, že pro $m \equiv 1 \pmod 4$ jsou čísla tvaru $\frac{1}{2}(a + b\sqrt{m})$ celá, ať jsou a, b jakákoliv čísla lichá. Hoví totiž rovnici $x^2 - ax + \frac{a^2 - mb^2}{4} = 0$ v níž je i prostý člen celý. Možno tedy říci, že pro $m \equiv 1 \pmod 4$ celá čísla z $R(\sqrt{m})$ jsou tvaru $\frac{1}{2}(a + b\sqrt{m})$, kdež a, b jsou čísla celá současně sudá neb současně lichá, t. j. $a \equiv b \pmod 2$. Píšeme-li $b = a + 2\alpha$, vidíme, že pak jsou celá čísla z $R(\sqrt{m})$ tvaru $\alpha + b\frac{1 + \sqrt{m}}{2}$, značí-li, α, b čísla celá racionálná.

Položíme-li $\omega = \sqrt{m}$ *pro* $m \equiv 2$ *neb* $3 \pmod 4$

$\omega = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{m})$ *pro* $m \equiv 1 \pmod 4$,

vidíme, že všechna celá čísla z tělesa $R(\sqrt{m})$ *jsou zahrnuta ve tvaru* $a + b\sqrt{m}$, *značí-li* a *i* b *čísla celá racionálná.*

Nyní můžeme snadno dokázati větu:

Součet, rozdíl a součin dvou celých čísel z tělesa kvadratického je zase celé číslo téhož tělesa.

Součet a rozdíl celých čísel $\alpha_1 = a_1 + b_1\omega$ a $\alpha_2 = a_2 + b_2\omega$, $\alpha_1 \pm \alpha_2 = a_1 \pm a_2 + (b_1 \pm b_2)\omega$ hoví jistě podmínkám celistvosti. Abychom to dokázali v součinu $\alpha_1\,\alpha_2$, rozeznávejme případy

1. $m \equiv 2$ neb $3 \pmod 4$, $\omega = \sqrt{m}$;

$\alpha_1\,\alpha_2 = a_1\,a_2 + b_1\,b_2\,m + (a_1\,b_2 + c_2\,b_1)\,\omega$, z čehož vidno, že je to číslo celé.

2. $m \equiv 1 \pmod 4$, $\omega = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{m})$, $\omega^2 = \frac{1}{4}(m - 1) + \omega$

$$\alpha_1\,\alpha_2 = a_1\,a_2 + (a_1\,b_2 + c_2\,b_1)\,\omega + b_1\,b_2\,\omega^2$$

$$= a_1\,a_2 - b_1\,b_2\frac{m-1}{4} + (a_1 b_2 + c_2 b_1 + 1)\,\omega$$

takže zase $\alpha_1\,\alpha_2$ je číslo celé.

Jako důsledek plyne ihned věta:

Racionálná celá funkce s racionálovými celými koeficienty utvořená z celých čísel z tělesa je zase celé číslo z téhož tělesa kvadratického.

Dále je patrno, že *stopa, norma, diskriminant čísla celého z* $R(\sqrt{m})$ *je celé číslo racionálné. Stejně je tomu s diskriminantem dvou čísel celých.*

§ 5. Base tělesa kvadratického.

Čísla 1, ω mají diskriminant $d = (\omega' - \omega)^2$. I je pro $m \equiv 2$ neb 3 (mod 4) $d = 4m$ a pro $m \equiv 1$ (mod 4) $d = m$. Jsou tedy čísla 1, ω lineárně neodvislá.

Každá dvojice ω_1, ω_2 čísel lineárně neodvislých z tělesa $R(\sqrt{m})$ (pomocí této dvojice lze tedy znázorniti všechna čísla z tělesa jednoznačně ve tvaru $a\,\omega_1 + b\,a_2$, kdež a, b značí čísla racionálná), která nad to má tu vlastnost, že čísla celá jsou znázorněna ve tvaru $a\,\omega_1 + b\,\omega_2$ s racionálovými celými koeficienty a, b, nazývá se *basí tělesa*. Čísla 1, ω tvoří tedy basi tělesa $R(\sqrt{m})$.

Basí je v tělese kvadratickém nekonečně mnoho a lze z jedné z nich odvoditi každou jinou $\overline{\omega_1}$, $\overline{\omega_2}$.

Patrně *musí býti* $D(\omega_1, \omega_2) \neq 0$, $D(\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}) \neq 0$.

1.) $\overline{\omega_1} = c_{11}\omega_1 + c_{12}\omega_2$, $\overline{\omega_2} = c_{21}\omega_1 + c_{22}\omega_2$ a též naopak

$\omega_1 = \overline{c_{11}}\,\overline{\omega_1} + \overline{c_{22}}\,\overline{\omega_2}$, $\omega_2 = \overline{c_{21}}\,\overline{\omega_1} + \overline{c_{22}}\,\overline{\omega_2}$, kdež *koefficienty c i c' jsou racionálné celé.*

Položíme-li

$$\begin{vmatrix} c_{11} c_{12} \\ c_{21} c_{22} \end{vmatrix} = C, \quad \begin{vmatrix} \overline{c_{11}}, \overline{c_{12}} \\ c_{21}, c_{22} \end{vmatrix} = \overline{C},$$

bude $D(\omega_1, \omega_2) = \overline{C}^2 D(\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2})$, $D(\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}) = C^2 D(\omega_1, \omega_2)$,

a tedy $C^2\overline{C}^2 = 1$, t. j. $C = \pm 1$, $\overline{C} = \pm 1$

Podmínka $C = \pm 1$ *je nejen nutná, nýbrž také dostačující.* Pak totiž z rovnice 1.)

plyne $\pm\omega_1 = c_{22}\overline{\omega_1} - c_{12}\overline{\omega_2}$, $\pm\omega_2 = -c_{21}\overline{\omega_1} + c_{11}\overline{\omega_2}$, zase s celými koefficienty. Celé číslo $\alpha = a\omega_1 + b\omega_2$, kdež a, b jsou

celá čísla racionálná, jest znázorněno pak ve tvaru

$$\alpha = \pm (ac_{22} - bc_{21})\,\overline{\omega_1} \pm (-ac_{12} + bc_{22})\,\overline{\omega_2},$$

při čemž koefficienty u $\overline{\omega_1}$ a ω_2 jsou opět čísla celá racionálná.

Zároveň je patrno, že *pro všecky base má diskriminant tutéž hodnotu d*, která nazývá se *diskriminantem* (*základním číslem*) *tělesa*.

Lze dokázati snadno, že za basi tělesa lze vždy zvoliti dvojici 1, $\frac{1}{2}(d + \sqrt{d})$.

Dvě celá čísla α_1, α_2 z tělesa $R(\sqrt{m})$ lze vyjádřiti ve tvaru $\alpha_1 = a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2$, $\alpha_2 = a_{21}\omega_1 + a_{22}\omega_2$ s celými racionálnými koefficienty a. Jsou-li α_1, α_2 čísla lineárně neodvislá, netvoří li však basi, je determinant $\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}$ celé číslo $\neq \pm 1$. Z toho plyne, že pak $|D(\alpha_1, \alpha_2)| > |D(\omega_1, \omega_2)|$. Uvažujeme li tedy všechny dvojice lineárně nezávislých čísel z tělesa kvadratického, má diskriminant pro base nejmenší absolutní hodnotu.

§ 6. Dělitelnost, jednotky, čísla associovaná v kvadratickém tělese.

Jsou-li α, β dvě celá čísla z kvadratického tělesa $R(\sqrt{m})$, $\beta \neq 0$, řekneme, že α je *dělitelno* β, je-li α/β číslo celé. Pak lze snadno nahlédnouti platnost vět: *Je-li celé číslo α dělitelno celým číslem $\beta \neq 0$, β dělitelno celým číslem $\gamma \neq 0$, je α dělitelno γ. Jsou-li α, $\varkappa$, β celá čísla, $\beta \neq 0$ a α dělitelno β, je též $\alpha\varkappa$ dělitelno β. Jsou-li čísla celá α, β dělitelna celým číslem $\delta \neq 0$, je $\alpha \pm \beta$ dělitelno δ a obecněji $\lambda\alpha + \mu\beta$ dělitelno δ, značí-li λ, μ libovolná čísla celá.*

Číslo celé ε z $R(\sqrt{m})$ nazývá se *jednotkou*, je-li $1/\varepsilon$ též celé číslo. Z čísel racionálných jsou jednotkami pouze ± 1. *Převratná hodnota jednotky je zase jednotka. Součin a podíl dvou jednotek je zase jednotka. Každé číslo celé je pak dělitelno všemi jednotkami.*

Číslo celé ε z $R(\sqrt{m})$ je jednotkou tehdy a jen tehdy, je-li jeho norma ± 1.

Z $N\varepsilon = \pm 1$ plyne totiž $\varepsilon\varepsilon' = \pm 1$, $1/\varepsilon = \pm \varepsilon'$. Ježto zároveň s ε je ε' celé, je $1/\varepsilon$ celé, tak že je ε skutečně jednotka.

Naopak, je-li ε jednotka, t. j. ε i $1/\varepsilon = \eta$ celé, pak $1 = \varepsilon\eta$ a utvoříme li normy $1 = N\varepsilon N\eta$, kdež $N\varepsilon$ a $N\eta$ jsou celá čísla racionálná. Z toho plyne $N\varepsilon = \pm 1$.

V tělesech kvadratických imaginárných lze snadno jednotky ustanoviti. Dokážeme platnost věty:

V tělese $R(\sqrt{-1})$ *jsou 4 jednotky* ± 1, $\pm i$, *v tělese* $R(\sqrt{-3})$ *je 6 jednotek* ± 1, $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \sqrt{-3})$, *v ostatních tělesech kvadratických imaginárních pouze dvě jednotky* ± 1.

Ježto v imaginárných tělesech jsou normy všech čísel $\neq 0$ kladné, mají všechny jednotky normu $+1$.

Uvažujme nejprvé $R(\sqrt{-1})$. Poněvadž base je zde 1, i, $(i = \sqrt{-1})$, musí býti jednotky tvaru $x + iy$, kdež x, y jsou racionálná celá čísla a $N(x + iy) = x^2 + x^2 = 1$. Tomu lze vyhověti jen tak, že $x = \pm 1$, $y = 0$; $x = 0$, $y = \pm 1$, čemuž odpovídají jednotky $+1$, $\pm i$.

Pro těleso $R(\sqrt{-3})$ je base 1, $\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$, tak že lze jednotky vyjádřiti ve tvaru $x + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})y$ a $N(x + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})y) = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$, t. j. $x^2 + xy + y^2 = 1$. Řešení této rovnice jsou $x = \pm 1$, $y = 0$; $x = 1$, $y = -1$; $x = -1$, $y = 1$; $x = 0$, $y = \pm 1$. I dostáváme jako jednotky skutečně ± 1, $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \sqrt{-3})$; jsou mezi nimi třetí kořeny z jednotky 1, $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$.

Pro každé jiné těleso imaginárné $R(\sqrt{m})$ bude celé číslo tvaru $x + \sqrt{m}\,y$ pro $m \equiv 2, 3 \pmod 4$ neb $x + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{m})y$ pro $m \equiv 1 \pmod 4$, tak že bude jednotkou, jestliže $x^2 - my^2 = 1$ resp. $(x + \frac{1}{2}y)^2 - \frac{1}{4}my^2 = 1$, t. j. poněvadž $m = -|m|$, jestliže $x^2 + |m|y^2 = 1$, resp. $x^2 + my + \frac{1}{4}(1 + |m|)y^2 = 1$. Při tom je v prvém případě $|m| \geqq 2$, v druhém $|m| \geqq 7$. I musí býti nutně $y = 0$. Neboť kdyby $|y| \geqq 1$, byl by v prvém případě člen $|m|y^2 > 1$, v druhém člen $\frac{1}{4}(1 + |m|)y^2 > 1$.

Pak $x^2 = 1$, tak že jediné jednotky dostáváme pro $x = \pm 1$, $y = 0$, a jsou to ± 1.

Později dokážeme, že v tělesech kvadratických reálných je jednotek nekonečně mnoho a udáme způsob, jak je lze pomocí jedné z nich vyjádřiti.

Dvě čísla α, β z tělesa $R(\sqrt{m})$, jichž podíl je jednotka z tělesa $R(\sqrt{m})$, nazveme spolu *associovanými*, což označíme $\alpha \sim \beta$. I platí vztahy $\alpha \sim \beta$; *z* $\alpha \sim \beta$ *plyne* $\beta \sim \alpha$; *z* $\alpha \sim \beta$,

$\beta \sim \gamma$ *plyne* $\alpha \sim \gamma$; *z* $\alpha_1 \sim \beta_1$, $\alpha_2 \sim \beta_2$ *plyne* $\alpha_1\alpha_2 \sim \beta_1\beta_2$, $\alpha_1/\alpha_2 \sim \beta_1/\beta_2$. Poněvadž čísla associovaná s čísly celými jsou zase celá, *plyne z té okolnosti, že* α_1 *je dělitelno* α_2, $\alpha_1 \sim \beta_1$, $\alpha_2 \sim \beta_2$ *též že* β_1 *je dělitelno* β_2.

§ 7. Čísla nerozložitelná v kvadratickém tělese; v $R(\sqrt{-5})$ neplatí věta o podstatně jednoznačné rozložitelnosti.

Budiž π číslo celé z kvadratického tělesa $R(\sqrt{m})$, které není jednotkou a je dělitelno pouze samo sebou a jednotkami. Takové číslo nazveme *nerozložitelným*.

Mysleme si, že jsme celé číslo α z $R(\sqrt{m})$ rozložili na nerozložitelné činitele. I můžeme si položiti otázku: Je ten rozklad možný v podstatě jediným způsobem? Rozklad je možný v podstatě jediným způsobem, znamená pak, že eksistuje-li vedle rozkladu $\alpha = \pi_1\pi_2 \ldots \pi_k$ v nerozložitelné činitele ještě podobný rozklad $\alpha = \varkappa_1\varkappa_2 \ldots \varkappa_l$, je nutně každý činitel $\varkappa$ associován s jistým činitelem π, tak že pak nutně $l = k$.

Ukážeme, že tomu tak není pro každé těleso kvadratické na tělese $R(\sqrt{-5})$.

$R(\sqrt{-5})$ má basi 1, $\sqrt{-5}$. Je to těleso imaginárné, tak že jednotky jsou pouze ± 1.

Pro číslo 6 platí rozklady $6 = 2.3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$. Čísla celá 2, 3, $1+\sqrt{-5}$, $1-\sqrt{-5}$ jsou *a*) nerozložitelná, *b*) žádná dvě nejsou spolu associována.

a) Dejme tomu, že by bylo $2 = \alpha\beta$, kdež α, β jsou čísla celá nejednotková. Pak by pro normy musilo platiti $4 = N\alpha N\beta$, $N\alpha > 1$, $N\beta > 1$, a tedy $N\alpha = N\beta = 2$. Kdyby $\alpha = a + b\sqrt{-5}$, kdež a, b jsou čísla racionálná celá, musilo by býti $a^2 + 5b^2 = 2$ čemuž nelze vyhověti. Je tedy 2 skutečně číslo nerozložitelné. Podobně by se to dokázalo o 3.

Kdyby bylo $1 + \sqrt{-5} = \alpha\beta$, pak by pro normy musilo platiti $6 = N\alpha N\beta$, $N\alpha \neq 1$, $N\beta \neq 1$ a tedy $N\alpha = 2$, $N\beta = 3$ neb naopak. To však není možno. Podobně při $1 - \sqrt{-5}$.

b) Že není 2 associováno ani se 3, ani s $1+\sqrt{-5}$, ani s $1-\sqrt{-5}$, plyne z toho, že by pak musilo býti $N2 = N3$ resp. $= N(1+\sqrt{-5})$, $= N(1-\sqrt{-5})$, jest však $N2 = 4$, $N3 = 9$, $N(1+\sqrt{-5}) = N(1-\sqrt{-5}) = 6$. Podobně se do-

káže o 3, že není associováno ani s $1+\sqrt{-5}$ ani s $1-\sqrt{-5}$ Čísla $1+\sqrt{-5}$, $1-\sqrt{-5}$ mají sice stejnou normu 6, nejsou však spolu associována: jich podíl $\frac{1+\sqrt{-5}}{1-\sqrt{-5}} = 1+\frac{1}{3}\sqrt{-5}$ není celé číslo.

Uveďme další příklady rozkladu téhož čísla v nerozložitelné činitele podstatně různé:

$$9 = 3.3 = (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$$
$$21 = 3.7 = (4+\sqrt{-5})(4-\sqrt{-5}) =$$
$$= (1+2\sqrt{-5})(1-2\sqrt{-5}).$$

Abychom pravidla dělitelnosti mohli v kvadratických tělesech pohodlně vyjádřiti, zavedeme pojem divisorů. Za tím účelem budeme nejprvé definovati pojem dělitelnosti vzhledem k prvočíslu v tělesech racionálných a pak kvadratických.

(Dokončení.)

Geometrické sestrojování stereoskopických obrazců.

Dr. **Klíma Josef.**

Při vyučování deskriptivní geometrii v sedmé třídě reálky možno jako vhodnou a žáky zajímající aplikaci perspektivního zobrazování sestrojovati stereoskopické obrazce, čehož lze na př. na ryse použíti.

Perspektivné obrazy, jež sestrojují se z jediného centra S, bylo by třeba pozorovati též jediným okem, které je nad hlavním bodem ve vzdálenosti příslušné distance. K tomuto správnému dívání se na perspektivní obraz buď sestrojený geometricky neb pořízený fotografickou cestou slouží přístroj mající jen jedinou čočku.

Ježto však obyčejně předmět pozorujeme oběma očima současně dostáváme pro každé oko jiný zorný kužel t. j. jiný obrys na tělese a tudíž pro každé oko jiný perspektivní obraz Rozdíly jsou tu tím patrnější, čím předmět je bližší. Nejjasněji se o tom přesvědčíme pozorujeme-li současně s tělesem předměty za ním jsoucí t. zv. pozadí; tu pokaždé jiná část pozadí je zakryta

při pohledech z různých očí. Tudíž zření z každého oka je jiné, ale pozorujeme-li předmět současně oběma očima, obě částečná zření slučují se v jediné úplné prostorové zření t. zv. *stereoskopické*.

Povšimněme si nyní souvislostí perspektivních průmětů téhož bodu z obou očí ${}^1S$, ${}^2S$ na průmětnu π, již myslíme si rovnoběžnou se spojnicí $\overline{{}^1S\,{}^2S}$ (obr. 1.) a vertikálnou, takže distance pro obě oči je táž a označme ji d. *Oční vzdálenost* $\overline{{}^1S\,{}^2S}$ je normálně 65*mm* a označme ji o. Dán-li nyní bod A v nekonečnu určitým směrem, pak jeho centrálné průměty ${}^1A$ a ${}^2A$ z center ${}^1S$ a ${}^2S$ jsou tak položeny, že $\overline{{}^1A\,{}^2A} \parallel \overline{{}^1S\,{}^2S}$. Vidíme tedy, že pole úběžníků u jednoho centra promítání je shodné s polem úběžníků u druhého centra a jedno vznikne z druhého posunutím směrem oční vzdálenosti o délku o.

Je-li nyní bod B v konečnu, pak jeho k sobě patřící perspekt. průměty ${}^1B$, ${}^2B$ jsou opět na horizontální přímce v průmětně (předpokl. v dalším, že $\overline{S\,{}^2S}$ je horizontální), ale jejich vzdálenost je menší než oční vzdálenost o. Délku, o kterou je $\overline{{}^1L\,{}^2B}$ kratší než oční vzdálenost o jmenujeme *stereoskopickou paralaxou* bodu B a označme ji p. Označme dále vzdálenost bodu B od vertikální roviny středové σ jdoucí oběma očima z t. zv. *hloubku* bodu B. I je patrno, že tato paralaxa stereoskopická pro všechny body roviny $\varrho \parallel \pi$ jdoucí bodem B je stejná a určíme ji pro bod B', který je na hlavním paprsku $\overline{{}^1S\,{}^1C} \perp \pi$ jako délku ${}^2B'\,{}^2C$ z podobnosti:

$$\triangle\, {}^1S\,{}^2S\,B' \sim \triangle\, {}^2C\,{}^2B'\,{}^2S, \text{ a tudíž}$$

$$o : z = p : d,$$

$$p \,.\, z = o \,.\, d \quad (1) \; a$$

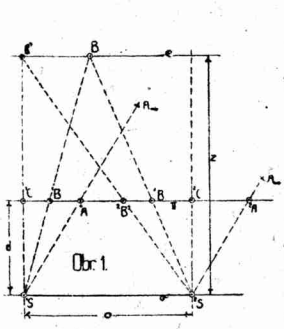
$$p = \frac{o \,.\, d}{z} \quad (2)$$

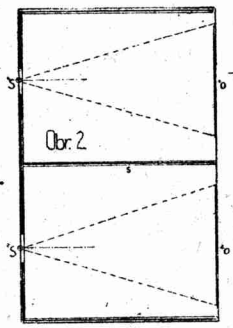
Délky o a d jsou pro určité zobrazení konstatní a tudíž z (2) plyne že *paralaxa je nepřímo úměrná vzdálenosti zobrazovaného bodu od středové roviny σ, čili hloubce bodu.* Když $z = \infty$, je patrně $p = o$, pro $z = d$ je $p = o$, což značí, že body v průmětně mají splývající oba stereoskopické obrazy, což zřejmo.

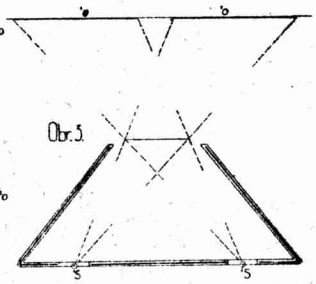
Dříve než přistoupíme ke geometr. sestrojování stereosk. obrazců, třeba upozorniti na to, jak nutno na tyto obrazce hleděti,

abychom dostali prostorové zření. Ježto obrazy pro obě oči jsou různé, třeba docíliti, by každý z nich byl pozorován jen z toho oka, pro nějž byl sestrojen. To dociluje se obyčejně dvojím způsobem:

1.) *vložením stěny s* (obr. 2) mezi oba perspekt. obrazy ^1o, ^2o, kterážto stěna musí ale sahati před průsek obou zorných kuželů. Aby též oči byly správně umístěny, doporučuje se skřínka s otvory pro oči ^1S a ^2S, kde bývají čočky; přístroj ten jmenuje se *stereoskop**). Z těchto nejznámější jsou *Brewster-ův* (jistě v každém kabinetě fysikálním) a *americký*. Zvláštního tvaru je stereoskop *Steinhauserův* dle obr. 3, u něhož obrazy stereoskop.







^1o, ^2o a tudíž i průmětna π jsou za předmětem, jak ukazuje obraz 3. Výhoda zde je ta, že příslušné obrazy perspekt. jsou větší, což při konstrukt. provedení je výhodné.

2.) *rytažením* každého obrazce *jinou barvou*, což poprve učinil *Ducos du Hauron*. Ku př. pro levé oko obraz vytáhne se červeně a pro pravé oko modře a tyto obrazce pozorují se brýlemi, které mají skla pro levé oko modré a pro pravé červené a to stejného tónu jako obrazce. Tu levé oko vidí jen levý obraz a pravé jen pravý, takže tato parciální zření spojí se v jediné prostorové. Graficky toto dá se snadno provésti barevnými tušemi.

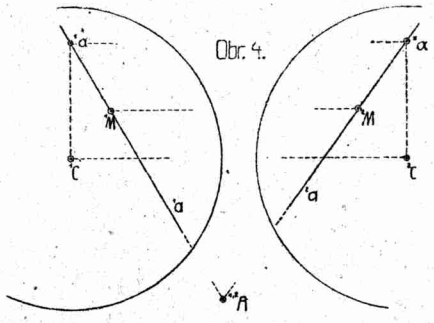
---

*) Pěkné dílko o tomto pojednávající je od Th. Hartwiga „Das Stereoskop und seine Anwendungen“ r. 1907.

Nyní přistupme ke konstrukci a vzajemnému vztahu obou stereoskopických obrazců některých základních útvarů.

1.) *Stereoskopické průměty přímky.* Obr. 4.*)

Budiž pro persp. střed ${}^1S$ a hlavní bod ${}^1C$ dán persp. obraz ${}^1a$ přímky a a to stopou A a úběžníkem ${}^1\alpha$. Příslušný persp. obraz ${}^2a$ pro střed ${}^2S$ a bod hlavní ${}^2C$ (${}^2C\,{}^1C = o = 65\,mm$) dostaneme, sestrojíme-li $\overline{{}^1\alpha\,{}^2\alpha} \nparallel {}^1C\,{}^2C$ a ježto bod A je v π, je ${}^2a \equiv \overline{{}^2\alpha\,{}^{1,2}A}$. Libov. bod M této přímky má své persp. obrazy ${}^1M$ a ${}^2M$ tak položeny, že $\overline{{}^1M\,{}^2M} \parallel \overline{{}^1C\,{}^2C}$. Z paralaxy $p_M = o - \overline{{}^1M\,{}^2M}$ a ze známé distance d možno snadno z rovnice (1)



stanoviti hloubku z_M bodu M. Kdyby stereoskopické průměty nahrazeny byly fotograf. snímky**) ku př. terénu, tu patrno, jak stereoskopicky možno z paralax určovati vzdálenosti bodů terénu ze známé konstanty fotograf. aparátu $d = f =$ ohniskové vzdálenosti, na čemž zakládá se t. zv. *stereofotogrametrie*, část to zeměměřičství.

Díváme-li se na obr. 4. stereoskopem, neb zadíváme-li se očima jsoucími ve vzdálenosti $d =$ v obraze 240 *mm* nad ${}^1C$ a ${}^2C$, tu splynou oba obrazy v jediný, jenž nám velice pěkně ukazuje jak přímka a v prostoru je položena. V obr. našem jde od bodu A ku předu a stoupá. Patrno na tomto jednoduchém příkladě,

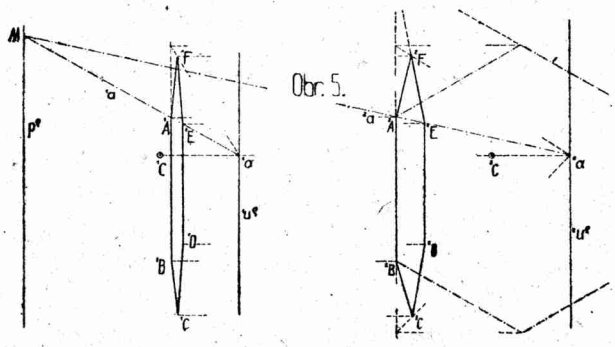
*) Z technických důvodů byly stereosk. obr. 4., 5., 8. a 9b) zmenšeny na $\frac{2}{3}$ a obr. 7. na $\frac{1}{2}$ skut. veliko ti a proto nechť lask. čtenář zvětší si je na skut. velikost.

**) K pořizování takových snímků je zřízena zvláštní stereokamera se dvěma objektivy, jichž osy mají vzdálenost $o = 65\,mm$.

jak stereoskopicky dostáváme prostorové zření, jehož jediný obraz perspekt. neskýtá.

2.) *Sdružené obrazy rovinného obrazce.*

Obr. 5. Pro střed promítání ^1S budiž stopa roviny ϱ toho obrazce p^ϱ a úběžnice $^1u^\varrho$. Pro střed ^2S je táž stopa, ale úběžnice $^2u^\varrho \parallel {}^1u^\varrho$ a sice tak, že vzdálenost hlavního bodu ^2C od $^2u^\varrho$ je táž jako vzdálenost ^1C od $^1u^\varrho$ (v obr. 5 zvoleny kolmo k $\overline{{}^1C\,{}^2C}$, což obecnosti není na újmu). Zobrazme některým známým způsobem v rovině ϱ pro střed promítání ^1S třeba pravidelný šestiúhelník. V obráze 5. zvolen tak, by dvě strany byly rovnoběžny s průmětnou Distance zvolena 240 *mm*. Zobrazme nyní příslušný perspekt obraz pro střed ^2S. Bychom zobrazili sdružené body



k bodům ku př. ^2A a ^2E, spojme je, čímž dostáváme v rovině ϱ přímku a mající stopník M na p^ϱ a úběžník α na u^ϱ ($^2\alpha$ je na $^2u^\varrho$). Průmět ^1a této přímky z centra ^1S má týž stopník M, ale úběžník $^1\alpha$ je na úběžnici $^1u^\varrho$ tak položen, že $^2C\,{}^2\alpha \parallel\!\!\!\parallel {}^1C\,{}^1\alpha$. Sdružené body ^1A a ^1E jsou pak na této přímce ^1a tak položeny, že $\overline{{}^2A\,{}^1A} \parallel \overline{{}^2E\,{}^1E} \parallel \overline{{}^2C\,{}^1C}$, a podobně obdržíme další vrcholy sdruženého persp. průmětu ze středu ^1S. Dle konstrukce patrno: *„Stereoskopické průměty rovinného obrazce jsou affinní a sice osou affinnity je stopa roviny obrazce toho a směr affinnity je rovnoběžný se spojnicí hlavních bodů ^1C a ^2C.*

V případě, že by stopa p^ϱ a úběžnice $^1u^\varrho$ a $^2u^\varrho$ byly mimo nákresnu, mohli bychom z hloubek z tří bodů roviny ϱ sestrojiti *)

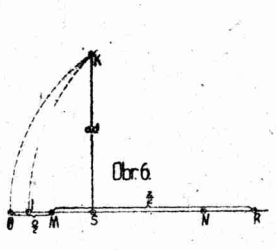
*) Ježto o a d je známé, je rovnice (1) rovnicí rovnoosé hyberpoly uvažujeme li z jako úsečky a p jako pořadnice. Tak sestrojuje paralaxy Th. Hartwig

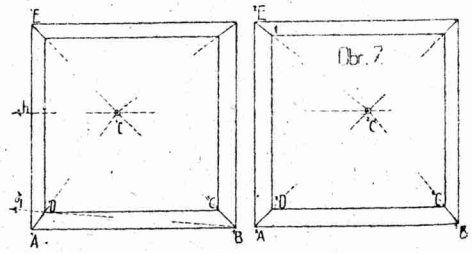
neb vypočítati dle rovnice (1) paralaxy a tak dostati tři sdružené body a další již odvoditi affinnitou.

Kdybychom chtěli dostati stereoskopické obrazy jakéhokoliv rovinného obrazce, aniž nám jde o polohu jeho roviny, je možno jeden obraz zvoliti jakýkoliv a pro druhý zvoliti tři vrcholy odpovídající třem vrcholům prvého tak, že jsou na rovnoběžkách se spojnicí hlav. bodů ${}^1C$, ${}^2C$; ovšem jich vzdálenosti musí býti menší než oční vzdálenost o.

Další vrcholy sdruženého obrazu sestrojíme výše zmíněnou affinnitou. To odpovídá též tomu, že rovina je určena třemi body.

Kdyby obrazec ten byl v rovině rovnoběžné s průmětnou, pak všechny vrcholy měly by tutéž paralaxu a oba stereosk.





obrazce byly by shodné a jeden vznikl by z druhého posunutím o délku $\overline{{}^1C\ {}^2C}$ zmenšenou o příslušnou paralaxu.

3.) *Stereoskopické průměty těles.*

K sestrojení těchto třeba užíti odst. 2) a zákona o paralaxe vyjádřené rovnicí (1). Ukážeme to na některých příkladech. V obr. 7. sestrojeny stereosk. obrazy drátěné krychle, jež je v poloze průčelné. Pro střed ${}^1S$ zobrazen persp. průmět čtverce podstavného

---

v díle „Die Kristallgestalten der Mineralogie in stereosk. Bildern“ a pak podal v sezení vídeňské akademie, viz Akademischer Anzeiger Nr. XV. r. 1906.

Paralaxy možno též sestrojovati jako čtvrtou měř. úm. délek s, o, d. Nebo dle obr. 6. použitím věty Eukl. Učiníme $\overline{SM} = \overline{MO} = \frac{o}{2}$, $\overline{MN} = \frac{d}{2}$. Kružnice o středu N a poloměru $\overline{NO}$ protne kolmici $\overline{KS} \perp \overline{ON}$ v bodě K a je patrně $\overline{KS} = o.d$. Chci-li sestrojiti paralaxu p k hloubce z, učiníme $\overline{MR} = \frac{z}{2}$ a kružnice o středu R jdoucí bodem K vytne na $\overline{OR}$ délku $\overline{PS} = p$ dle rovnice (1).

$A\,B\,C\,D$, což je lichoběžník ${}^1A\,{}^1B\,{}^1C\,{}^1D$. Spojnice $\overline{{}^1B\,{}^1D}$ vytíná na horizontu h levý distanční bod δ_l, jehož vzdálenost od hlavního bodu ${}^1C$ dává distanci $d = \overline{\delta_l\,{}^1C}$ (v obraze $d = 240\ mm$). Průčelné stěny promítají se jako čtverce. Hrany kolmé k průmětně sbíhají se v bodě hl. ${}^1C$. K takto sestrojenému persp. obrazu můžeme nyní sestrojiti snadno sdružený stereskop. obraz pro střed promítání ${}^2S$. Třeba jen k bodu ${}^1A$ zvoliti sdružený bod ${}^2A$ tak, by $\overline{{}^2A\,{}^1A} \parallel \overline{{}^1C\,{}^2C}$, ale aby $\overline{{}^1A\,{}^2A} < \overline{{}^1C\,{}^2C}$ a to o paralaxu p, již možno určiti z hloubky z bodu A anebo možno ji přiměřeně zvoliti, běží li jen o obraz prostorový a nezáleží-li nám na tom, kde krychle ta v prostoru je*). Další vrcholy již snadno dle odst. 1) a 2) určíme.

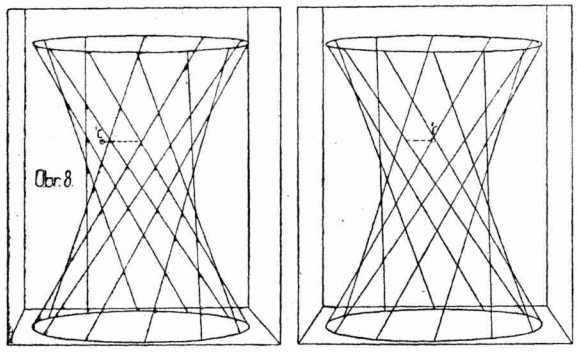
Oba obrazy by mohly býti souměrny též dle osy souměrnosti úsečky $\overline{{}^1C\,{}^2C}$, kdyby krychle byla v prostoru tak položena, že rovina souměrnosti základny $\overline{{}^1S\,{}^2S}$ by byla rovinou souměrnosti krychle. Stereoskop. průmětů s výhodou lze užiti k zobrazení a prostorovému znázornění tvarů krystalových, jak učinil Th. Hartwig v díle uvedeném na str. 63 v poznámce. Ale obrazů těch možno též použíti v stereometrii k ukázání prostorových vlastností.**) Jako příklad zobrazil jsem v obr. 8. rotační hyperboloid vytvořený rotací přímky, jejíž polohy možno si představovati jako z nití Distance $d = 240\ mm$ Obraz persp. pro střed ${}^1S$ sestrojen snadno oklopením kruhové podstavy kol hlavní přímky. Podstavy rozděleny na 12 shodných dílů. Sdružený obraz pro střed ${}^2S$ sestrojen

*) V obr. 7 zvoleno $\overline{{}^1A\,{}^2A} = 60\ mm$, tudíž $p = 5\ mm$, z čehož $z_A = \frac{65mm\ 240mm}{5mm} = 3120\ mm = 3{\cdot}12\ m$. Hrana krychle té se určí z délky persp. průmětu $\overline{{}^1A\,{}^1B} = 40mm$ z úměry $\overline{AB} : \overline{{}^1A\,{}^1B} = z_A : d$ jako $\overline{AB} = 520\ mm$

**) Díla, která se zabývají užitím stereosk. obrazců v stereometrii je velké množství; z nich uvádíme násl.: *Brude A.* „Stereoskopische Bilder aus der Stereometrie", *D. Schlotke*: „Stereoskopische Figuren als Hilfsmittel zum Studium der Stereometrie, sphärischen Trigonometrie und darstellenden Geometrie". Hamburk 1870. *Saint — Loup* „La géometrie au stéréoscope", Paris, Hachette 1886. *Chr. Wiener* vydal u Teubnera v Lipsku dva stereosk. obrazy plochy 3^0 s 27 přímkami. Pěkné dva obrazce stereosk. uveřejnil *S. Stiner* v L'enseignement mathématique roč. 1906 str. 387, kde též uvedena různá díla. U nás sestrojil řadu stereoskop. obrazců pro vyuč. deskr. geom. pan ing. st. František Havelka z Kr. Vinohrad a snad dočkáme se jich vydání.

užitím uvedených vztahů. Obraz sám zhotoven ve dvojnásobné velikosti a reprodukcí zmenšen na $\frac{1}{2}$.*)

Ježto v 7dmé tř. na reálkách u nás pravidelně perspekt. průměty sestrojují se pouze methodou průsečnou, ukázáno v obraze 9., jak zde si počínati, bychom dostali stereosk. obrazy objektu určeného půdorysem a nárysem v obr. 9*a*. Průmětnu ϱ persp. nejlépe voliti kolmo k ose souř. x a středy promítání na kolmici k nárysně. Ježto distance d má býti nejméně $= 250\,mm$**) a oba průměty nesmí se přes sebe překládati, bylo by třeba velké nákresny k přímému obdržení správných stereosk. průmětů. Postup možno zaříditi však takto, při čemž vystačíme

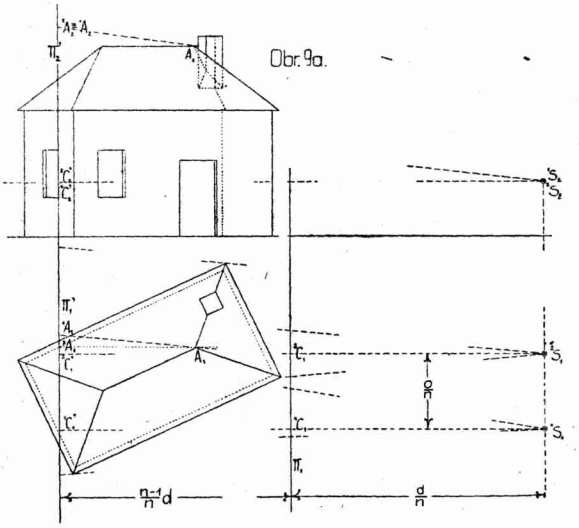


s nákresnou délky $d = 250\,mm$. Zvolíme totiž vzdálenost středů promítání ${}^1S, {}^2S$ rovnu n-tému dílu (v obraze pětině) normální oční vzdálenosti $o = 65\,mm$ a zobrazíme nyní zorné krajní paprsky k objektu v půdoryse. Průmětnu π zvolíme tak, by oba obrazy byly vedle sebe a nekryly se. Obrazy takto obdržené na průmětně π byly by n-kráte menší než obrazy při normální vzdálenosti oční o. Ježto n-násobné zvětšování takto obdržených obrazů zvětšovalo by n-kráte případné nepřesnosti, je lépe zaříditi věc takto. Průmětnu π posuneme rovnoběžně ještě o $\frac{n-1}{n} . d$ (v obraze 9*a* o $\frac{4}{5}\,d$) do polohy π', na niž promítáme objekt ze

*) Viz pozn. na str. 62.

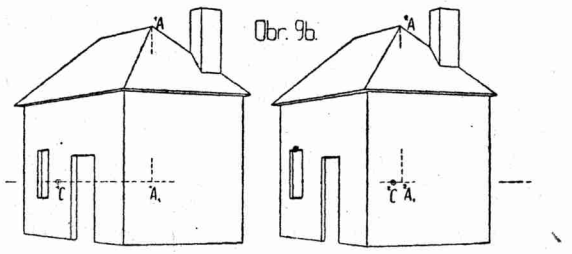
**) Chceme-li obrazce pozorovati jen očima bez čoček vložením stěny. Při stereoskopu je distance = ohniskové vzdálenosti. Proto zde zhotovené obrazce stereskop. třeba pozorovati stereoskopem o ohniskové vzdálenosti $\doteq 25\,cm$.

středu ${}^1S$, ${}^2S$ a dostaneme patrně obrazy shodné s obrazy stereoskopickými. Označíme-li kolmé průměty středu ${}^1S$ a ${}^2S$ na π' jako body ${}^1C'$ a ${}^2C'$, přenášejí se centrálné průměty ob-



Obr. 9a.

držené na π' tak do obr. 9*b*, že body ${}^1C'$ a ${}^2C'$ obr. 9*a*) splynou s body ${}^1C$ a ${}^2C$ obr. 9*b*, kde $\overline{{}^1C\,{}^2C} = o = 65\,mm$.



Obr. 9b.

V obraze vyznačena konstrukce sdružených průmětů vrcholu hřebenu A. Délky $\overline{{}^1C\,{}^1A_1}$, $\overline{{}^1A_1\,{}^1A}$, $\overline{{}^2C\,{}^2A_1}$, $\overline{{}^2A_1\,{}^2A}$ obrazu 9*b* rovnají se postupně délkám $\overline{{}^1C_1'\,{}^1A_1}$, $\overline{{}^1C_2'\,{}^1A_2}$, $\overline{{}^2C_1'\,{}^2A_1}$, $\overline{{}^2C_2'\,{}^2A_2}$.

Ovšem příslušný stereoskopický prostorový obraz je shodný, s modelem objektu sestrojeného v n-násobném měřítku, v němž je zobrazen půdorys a nárys.

Kdybychom chtěli stereosk. průměty objektu ve skutečnosti lišily by se příslušné sdružené průměty tak málo, že v grafickém provedení by byly skoro stejné. Tak při vzdálenosti 30 m nejbližšího bodu objektu je paralaxa $p = \frac{65.250}{30.000} = \frac{1}{2} mm$, tedy nepatrná. Konstrukce takových persp. stereosk. průmětů nebyla by nikterak obtížná, sestrojen-li jeden persp. průmět.

Stroboskopická methoda ve fysikální praksi.

Dr. **Josef Zahradníček.**

Časový průběh některých pohybů fysikálních bývá tak rychlý, že jednotlivé podrobnosti oněch pohybů pro nás mizí a tím přímé pozorování a měření je znesnadněno nebo dokonce znemožněno. Proto sdružujeme pohyby takové s jinými pohyby rychlými, ale známými, a z výsledku, jakož i z jedné složky známé, soudíme na složku druhou. Na př. volný pád na malé dráze studujeme pomocí ladičky, nebo pružného péra známého kmitočtu,*) nebo skládáme jej s rovnoměrným pohybem otáčivého válce — padostroj dle Morina. Pohyby kmitajícího tělesa (pružné péro, ladička, citlivý plamen) rozvinujeme do roviny a dle grafu soudíme na pohyb. Na tom spočívají pokusy s otáčivým zrcadlem Wheatstonovým, obrazce Lissajousovy a methoda grafická vůbec. Zvláště zajímavou a pro studium rychlých pohybů důležitou je tak zvaná methoda stroboskopická, která ve fysikální praksi koná platné služby jak po stránce kvalitativního pozorování, tak i měření.

Methoda tato, pocházející od Plateaua (1836) a nezávisle na něm od Dopplera (1845), zdokonalená Töplerem (1866), Arnoštem Machem (1870), Mir. Neumannem (1870) a Boltzmannem (1870), spočívá ve stejnoměrně přerušovaném osvětlení tělesa rychle se pohybujícího, tak že těleso pozorujeme jen v určitých, zcela krátkých okamžicích.**) Poněvadž zrakový vněm nezaniká

---

*) Na této myšlence sestavili padostroje L. bord, Lippich, Babo, T. Muller, Rabs, Edelmann, Kottenbach a j.

**) Historický vývoj methody stroboskopické podává podrobně A. Mach ve svém spise: »Optisch-akustische Versuche«, str. 69 a násl., Praha 1873, uváděje tam i klassické pojednání Plateauovo a Dopplerovo. Methodou strobo-

s podrážděním sítnice současně, nýbrž průměrně asi o $\frac{1}{3}$ sekundy (0·35) déle trvá, vyznívá, máme v oku obrazy pohybujícího se tělesa v několika fásích současně, položené ve směru dráhy jeho. Obrazy tyto — žhavý uhel v pohybu, létavice, padající kapka, kmitající péro — tvoří při spojitém osvětlení spojitou čáru. V osvětlení přerušovaném vidíme jen několik bodů z oné čáry; z počtu a polohy oněch bodů, z periody stroboskopického osvětlení můžeme souditi na tvar a pohyb tělesa, na jeho rychlost, po případě periodu.*)

Jako světelného zdroje užívá se při stroboskopickém osvětlení světla slunečního nebo obloukového, světla elektrické jiskry, Geisslerových trubic nebo kmitajících plaménků. Periodické osvětlení a zastínění pohybujícího se tělesa bývá způsobeno v prvých dvou případech tak zvanou stroboskopickou deskou nebo ladičkou; elektrická jiskra, výboje Geisslerových trubic (Pulujova lampa a pod.), světlo kmitajících plaménků jsou již povahou svou osvětlením přerušovaným, jehož perioda závisí na rychlosti otáčení a síle elektriky atd., na přerušovači, po případě na tónu, jímž plamének byl v pohyb uveden.

Nejjednodušší cestou možno si zjednati osvětlení stroboskopické deskami stroboskopickými. Jsou to desky kruhové zhotovené z lepenky a opatřené soustřednou řadou stejných a stejně od sebe vzdálených otvorů. Deska otáčí se ve své rovině dle osy středem jdoucí rovnoběžně, otvory propouští se ve stejných intervallech časových světlo, plnou deskou pak se zadržuje. Při subjektivním pozorování klademe desku na svisle postavený stroj odstředivý, nebo vhodný motor s osou vodorovnou a majíce oko

skopickou se zabývají na př. spisy: E. Grimsehl, Lehrbuch der Physik, 3. vyd. I. díl, str. 590 a 591, Lipsko 1914. — Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 10. vyd. str. 235, Lipsko 1905. — Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik, 10. vyd. I. díl, str. 666 a 723 a násl., Brunšvik 1906. — M. Neumann, Galvanická ladička a její důležitost v akustice, Druhá Zpráva Jednoty českých math. str. 21—23, Praha 1870. — Rosenberg, Experimentierbuch für den Unterricht in der Naturlehre, 2. vyd. II. díl, str. 188—191, Vídeň 1910. — M. Volkmann, Anleitung zu den wichtigsten physik. Schulversuchen, str. 145, Berlin 1912.

*) V kinematografu užívá se osvětení přerušovaného s periodou asi $\frac{1}{30}$ sekundy. Obrazy — 30 v jedné sekundě — promítají se na totéž místo stěny a sítnice; máme dojem osvětlení spojitého.

u desky, pozorujeme těleso na druhé straně desky se pohybující a dobře osvětlené. V případě objektivního pozorování klade se deska na vodorovnou osu motoru do světelného kužele světla slunečního — heliostat —, nebo umělého — skioptikon —. V zatemněné místnosti dostaneme pak při otáčení stroboskopické desky pravidelně přerušované osvětlení, v němž možno pozorovati pohybující se těleso buď přímo, nebo jeho stín, nebo obraz. Pro vyučování školní má význam methoda objektivního pozorování, při praktických cvičeních žákovských možno postupovati cestou první.

Popíši nyní naše uspořádání pokusů, jež se v rozmanitých případech dobře osvědčilo. Pro pozorování subjektivní zhotoveny desky z tenké lepenky o poloměru 22 *cm* s počtem otvorů 1, 2, 4, 6, 8, 12, 16, 20; délka otvorů pravidelně rozložených jest 10 *cm*, vzdálenost jich od vnějšího okraje desky je 2 *cm*. Šířka otvoru je tak volena, aby poměr její ku šířce plochy mezi dvěma sousedními otvory byl přibližně 1 : 8.*) Pro pozorování objektivní jsou rozměry desek menší: poloměr je 13 *cm*, délka otvorů 8·5 *cm* — průměr kondensoru u projekčního přístroje —, vzdálenost otvorů od vnějšího okraje 1·5 *cm*. Deska stroboskopická jest upevněna na vodorovné ose těsně před kondensorem tak, aby otvory přeběhly postupně podél celé polní čočky.**) Deska uvádí se v pohyb pomocí otáčivého kola postaveného na stole projekčního stroje. Otáčení kola, jakož i v případě subjektivního pozorování otáčení kola odstředívky děje se dle taktu Mälzelova metronomu a odtud se počítá perioda osvětlení. Otočí-li se na př. velké kolo za minutu s-krát — (čítáno dle metronomu nebo hodinek) —, vymění se otvory stroboskopické desky (m-otvorů na desce) v jedné sekundě r krát; otočí-li se kolo v jedné minutě p-krát, vymění se otvory téže desky v jedné sekundě

$$\frac{r}{s}\,p\text{-krát.}$$

*) Jsou-li otvory poměrně širší, jsou zjevy sice světlejší, ale vlivem vyznívání vněmu rozmazané.

**) Tomuto upevnění stroboskopické desky dal jsem přednost před způsobem, jejž uvádí M. Volkm nn v citovaném spise, kde deska stroboskopická jest postavena tam, kde paprsky, prošedše kondensorem, se spojují; světlo prochází malým kruhovými otvory, nebo se zadržuje deskou.

Pro jinou desku s počtem otvorů q jest počet stroboskopických osvětlení v jedné sekundě

$$p = \frac{r p q}{s m}.$$

Pro odstředivý stroj nebo jiné podstatné nařízení jest hodnota $\frac{r}{s m}$ veličinou stálou, kterou předběžným pokusem určíme.

Jiného přerušovače světla, velice přesně pracujícího, použil ke studiu rychlých pohybů Arnošt Mach. Rameno elektromagnetické ladičky Helmholtzovy opatřil plíškem se skulinou, kterou se světlo při kmitání ladičky propouštělo, nebo plíškem zadržovalo.*) Pro účely střední školy zdá se mi však býti výhodnější deska stroboskopická, jednak pro svou jednoduchost a láci, jednak z toho důležitého důvodu, že periodu osvětlení možno u stroboskopické desky v širokých mezích měniti — od $\frac{1}{10}$ do $\frac{1}{1000}$ sekundy —. Jak již svrchu řečeno, závisí počet přerušení a tím i perioda stroboskopického osvětlení na počtu otvorů desky a na její rychlosti. Naproti tomu jest perioda osvětlení u stroboskopické ladičky stálá a rovná se kmitové době ladičky nebo její polovině dle polohy štěrbiny. Stroboskopickými deskami můžeme pozorovati pohyby různých rychlostí ve fásích co nejrůznějších.

V následujících řádcích uvedeme pokusy, jež snadno dají se provésti methodou stroboskopickou jak subjektivní tak objektivní. Jsou to většinou pokusy uvedené v pojednáních svrchu jmenovaných autorů; co z vlastní zkušenosti přidáno, ponechávám posouditi laskavému čtenáři.

Pohybujeme-li rukou s roztaženými prsty rychle sem a tam ve světelném poli stroboskopického osvětlení, vidíme více prstů než pět. Podobný pokus můžeme provésti s bílou nebo lesklou tyčinkou.

Poletuje-li v zorném poli moucha, noční motýl, pozorujeme pěkně různé, vzájemně oddělené polohy křídel. Přístroj s deskou stroboskopickou možno umístiti na okno a pozorovati let vlašťovek atd.

*) Myšlenky Machovy po stránce experimentální uváděl v život a v nich se zdarem pokračoval jeho assistent Miroslav Neumann, předčasně zemřelý nadějný fysik český (1848—1873).

Padá-li v poli stroboskopického osvětlení kousek křídy nebo lesklá kulička — Mach užíval kuličky z teploměru —, pozorujeme ji v několika polohách a to ve vzdálenostech, jež se mají k sobě v poměru čísel 1 : 3 : 5 . . . Zajímavým je tento pokus s padající kapkou vodní. Zvláště pěkně jeví se šňůra lesklých perel, lijeme-li zvolna vodu fluoresceinem zbarvenou ve světelném poli proti tmavému pozadí. Perly kapek druží se k sobě ve vzdálenostech svrchu uvedených.*) Zajímavo jest též pozorovati stroboskopicky pohyb kapek dešťových.

Předešlý pokus může sloužiti k měření zemského urychlení g. Je-li perioda osvětlení $\frac{1}{n}$ sekundy — za tu dobu se zorné pole jedenkrát osvětlí a zatmí —, je-li viděti kapku na dráze s v N-polohách, počáteční polohu klidu v to čítajíc, pak děje se pád po dobu

$$t = \frac{N-1}{n} \text{ sekund.} \quad \text{Z rovnice} \quad s = \frac{g\,t^2}{2}$$

plyne pak hodnota pro g. Při měření padá kapka nebo lesklá kulička nad experimentálním stolem proti tmavému stínítku, probíhajíc dráhu několika decimetrů. Počet poloh N, v nichž kapka se nám jeví, musí býti určen z několika pokusů; oko si musí totiž na stroboskopické osvětlení různých period zvykati. Při podrobnějším pozorování padající kapky shledáme, že oscilluje kolem rovnovážných poloh.

Při stroboskopickém osvětlení dá se pěkně studovati rovnoměrný pohyb kruhový a pohyb harmonický. Upevněme na přístroj odstředivý uprostřed dřevěné pravítko o rozměrech 45 *cm* × 1·5 *cm* × 1 *cm*, nesoucí na koncích přišroubovány dva porcelánové knoflíky — isolátory — poloměru 1·2 *cm* a výšky 2·5 *cm*. Otáčíme-li rovnoměrně odstředívkou, jež postavena je tak, aby rovina kola byla ke směru rovného paprsku kolmo, objeví se nám při spojitém osvětlení bílý kruh. V osvětlení periodickém pozorujeme bílý knoflík jen v několika bodech na obvodu kruhu stejně od sebe vzdálených — rovnoměrný pohyb

*) Všech těchto a následujících pokusů můžeme také použiti k rozhodnutí otázky, je-li osvětlení přerušované nebo spojité a je-li přerušování spojité.

kruhový. Otočíme-li odstředivý stroj dle osy svislé o 90°, tak že zorný paprsek spadá do roviny kola, pozorujeme vlastně pravoúhlý průmět předešlého pohybu — pohyb harmonický. V periodickém osvětlení objeví se nám koule opět v několika polohách na dráze přímé, rovné průměru předešlého kruhu a ve vzdálenostech nestejných. V poloze středové jsou vzdálenosti největší — největší rychlost, jež ke krajům klesá na hodnotu nullovou; na koncích průměru jsou obrazy jasnější.

Tento pokus usnadní žákům pochopení tohoto nerovnoměrného pohybu a grafické znázornění i mathematické vyjádření jeho stane se jim samozřejmým. Pokusem možno předvésti i případ složitější, kdy paprsek zorný svírá s rovinou kola úhel $0^0 < \varphi < 90^0$; v tomto případě pozorujeme nerovnoměrný pohyb v ellipse, jejíž velká poloosa rovná se poloměru původního kruhu r, malá pak jest $r \sin \varphi$.

Methoda stroboskopická hodí se hlavně k pozorování rychlých pohybů periodických, ať už je to pohyb kyvadlový — $l < 25\ cm$ —, nebo kmitavý pohyb pružného péra, upevněného ve svěráku a zakončeného bílou nebo lesklou kuličkou,*) nebo pohyb ladičky nejvhodněji elektromagnetické, pohyb pružné spirály podélně kmitající, příčný pohyb vlnivý vlákna upevněného jedním koncem na kotvě Wagnerova kladívka nebo na rameni ladičky, pohyb struny, blany, vznik Chladniho obrazců, pohyb citlivých plaménků, vlnivý pohyb vzduchu — kouře v píšťalách, vlnivý pohyb na hladině vody nebo rtuti. Již povrchní pozorování stroboskopické všech těchto pohybů ukazuje, že jsou nerovnoměrné.

Podáme nyní pro zjevy stroboskopické jednoduché úvahy mathematické. Vztahy ony dají se snadno pochopiti a odvoditi z rovnoměrného pohybu kruhového a odtud dají se přenésti na pohyb harmonický, kyvadlový a kmitavý. (Srovnej postup v cit. spisu Machově str. 64 a násl.)

Budiž perioda pohybu tělesa $\tau = \frac{1}{N}$; N-krát v jedné sekundě vykoná těleso jistý pohyb a proběhne všemi fásemi

*) Pružné péro může býti udržováno v pohybu elektromagneticky — prodloužená kotva Wagnerova kladívka.

jeho. Je-li perioda stroboskopického osvětlení táž — zorné pole se v jedné sekundě N-krát osvětlí a N-krát zatmí, pak pozorujeme pohybující se těleso stále v téže fási a zdá se nám tudíž, že těleso jest v klidu.

Je-li počet osvětlení o jedno menší $N-1$, pak pozorujeme pohybující se těleso v každém z jeho jednotlivých pohybů ve fási jiné časově o

$$\vartheta = \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N-1}$$

posunuté*) a v jedné sekundě postupně v $N-1$ fásích, jež se v oku skládají v pohyb jediný. Místo skutečných N-pohybů v jedné sekundě pozorujeme v tomto případě stroboskopického osvětlení pohyb jediný, který jest proti skutečnému pohybu N-krát pomalejším a při tom zdánlivě spojitým. A v tom právě spočívá podstatná výhoda stroboskopické methody, že rychlost pohybu je zdánlivě snížena.

Je-li počet osvětlení v jedné sekundě $N+1$, nastává případ obdobný, jenže fáse druží se k sobě směrem opačným. (Kola vozu v kinematografu otáčející se někdy obráceně, kotouče elektriky pracující v zatemněné místnosti a osvětlené výboji jiskrovými, deska Samojlovova, o níž bude zmínka na konci práce, otáčejí se někdy zdánlivě směrem opačným.)

Je-li perioda pohybu $\frac{1}{N}$, perioda osvětlení $\frac{1}{n}$, při čemž platí $N - \nu = n$, pak pozorujeme pohyb ve fásích s časovým rozdílem

$$\vartheta = \frac{1}{n} - \frac{1}{N} = \frac{\nu}{nN}.$$

V jedné sekundě pozorujeme těleso postupně v n-fásích a úhrnný rozdíl fásový jest

$$n\vartheta = \frac{\nu}{N}.$$

Těchto n-fází skládá se v jediný pohyb stroboskopický, je-li $n\vartheta = \frac{1}{N}$, což vede k podmínce svrchní $\nu = 1$. Nebo může

*) Grimschl má ve svém spisu shora uvedeném o tomto případě mylné tvrzení.

nastati stroboskopický klid, je-li fásový rozdíl ϑ roven celistvému násobku period pohybujícího se tělesa $\vartheta = k\frac{1}{N}$.

Odtud vyplývá podmínka

$$\frac{\nu}{n} = k, \quad \text{čili} \quad \frac{N}{n} = k + 1;$$

za jednu periodu osvětlení vykoná těleso $k+1$ periodických pohybů

$$\frac{1}{N} = (k+1)\frac{1}{N},$$

pozorujeme tedy těleso stále v téže fási. V případech pro $k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ plynou pro poměr kmitočtů hodnoty $\frac{N}{n} = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Vedle těchto dvou případů, kdy místo $N > n$ pohybů v jedné sekundě pozorujeme buď jen jediný pohyb stroboskopický anebo klid, nastávají patrně případy, kdy pozorujeme několik stroboskopických pohybů. Je-li jeden stroboskopický pohyb ukončen během l-period osvětlení, platí

$$l\vartheta = k\frac{1}{N}, \quad \text{čili} \quad \frac{\nu}{n} = \frac{k}{l},$$

kde $l < n$ a $k < \nu$ jsou čísla celá a nesoudělná. Na jednu sekundu připadne pak

$$\frac{n}{l} = \frac{\nu}{k}$$

stroboskopických pohybů,*) jež se dějí proti skutečným N pohybům v poměru $q = N : \frac{\nu}{k}$-krát pomaleji.**)

Je-li perioda osvětlení kratčí než perioda pohybu $n > N$, nastávají případy poněkud odchylné od předešlých. Rozdíl fásový je v tom případě

$$\vartheta = \frac{1}{N} - \frac{1}{n} = \frac{n-N}{nN}.$$

*) V jedné sekundě možno sledovati pohodlně až pět stroboskopických pohybů, doba jednoho musí býti kratčí než doba trvání zrakového vněmu.

**) Je-li $l = n$, $k = \nu$ — kmitočty N a n jsou čísla nesoudělná —, pak může býti počet stroboskopických pohybů buď $\nu < n$ $\nu = N - n$, pohyby však mají amplitudu nestejnou, fáse stále ji é a jiné, anebo může býti pohyb jen jeden, zvláště je-li $\nu > n$.

Hledejme podmínku pro trvalý stroboskopický klid

$$\vartheta = k\frac{1}{N}; \quad \text{pak jest} \quad \frac{n}{N} = \frac{1}{1-k},$$

kde k je číslo celé a, jak z povahy případu plyne, menší než 1. Pro $k = 0, -1, -2, -3, -4 \ldots$ dostáváme známé už hodnoty $\frac{n}{N} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$.

Jediný pohyb stroboskopický nastává patrně v případě, kdy jest $n\vartheta = \frac{1}{N}$; odtud plyne rovněž známý případ $n = N + 1$.

Má-li býti pozorováno několik pohybů stroboskopických, musí platiti

$$l\vartheta = k\frac{1}{N}, \quad \text{čili} \quad l = \frac{kn}{n-N}.$$

Místo N-pohybů v jedné sekundě pozorujeme

$$\frac{n}{l} = \frac{n-N}{k}$$

pohybů stroboskopických. Aniž bychom se dále zabývali tímto obecným případem, uvažme, co nastává v případě $n = kN$, kde k je číslo celé. Během jednoho pohybu vykonaného v čase $\frac{1}{N} = k\frac{1}{n}$ spatřujeme těleso v k-fásích, z nichž při pohybu kyvadlovém a kmitavém vidíme třeba jen polovinu. Vzdálenosti sousedních obrazů stroboskopických jsou stejnodobé a vykonány v čase $\tau = \frac{1}{n}$. Znajíce dobu τ — dovedeme ji určiti dle dříve uvedeného — a znajíce počet stroboskopických obrazů $k + 1$, vypočteme snadno veličinu N.

(Dokončení.)

Astronomická zpráva

nebude nadále v našem časopise otiskována, ježto „Jednota čes. mat. a fys.“ bude vydávati astronomickou „Ročenku“ redakcí prof. Dr. Bohuslava Maška, v níž budou soustavně uspořádány veškeré astronomické údaje pro každý rok. Ročenka pro rok 1921 jest již v tisku a záhy vyjde.

Úlohy.

a) Z mathematiky.

1.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$x - 4\frac{y}{x} = y - 4\frac{x}{y} = a.$$

† Prof. *Rudolf Hruša.*

2.

Jsou dána ohniska F_1, F_2 ellipsy resp. hyperboly a libovolný bod M na křivce, buďtež úhly $\alpha = \sphericalangle F_2F_1M, \beta = \sphericalangle F_1F_2M$; jest dokázati relace pro ellipsu a hyperbolu ($\varepsilon =$ num. excentricita.)

$$a)\ \varepsilon = \frac{1 - tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}}{1 + tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}}; \qquad b)\ \varepsilon = \frac{tg\frac{\alpha}{2} + tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2} - tg\frac{\beta}{2}}.$$

Karel Lerl.

3.

V klínu rovinných zrcadel α, β nalézají se body A, B; jest vésti z bodu A na rovinu d paprsek tak, aby po úplném odrazu dopadal na rovinu β a zde odrážel se do bodu B.

Karel Lerl.

4.

Je-li ve čtyřúhelníku o stranách a, b, c, d a úhlopříčkách e, f, $\alpha + \gamma = R$, $\beta + \delta = 3R$, pak platí vztah:

$$(a \,.\, c)^2 + (b \,.\, d)^2 = (e \,.\, f)^2.$$

Prof. *Ant. Lochmann.*

5.

Které úhly vyhovují rovnici $\sqrt{3} = 4 \sin x - tg\, x$?

Prof. *Ant. Lochmann.*

6.

Nalézti dvojciferné číslo, aby arithmetický průměr jeho číslic byl o 1 větší geometrického průměru těchto číslic.

Prof. *Ant. Lochmann.*

7.

Z plechového pásu o šířce a zhotoviti okap, aby jeho průřezem byly 1.) rovnoramenný trojúhelník, 2.) kruhová úseč maximálního obsahu.

Prof. *J. Kroupa.*

8.

Jaká musí býti základní hrana a výška čtyřbokého jehlanu přímého s pravidelnou základnou, aby jeho obsah byl maximální, je-li dán jeho povrch P?

Prof. *J. Kroupa.*

9.

Nalezněte geom. místo středů rovnostranných trojúhelníků vepsaných do dané ellipsy nebo hyperboly. Podejte konstrukci takových trojúhelníků!

† Prof. *J. Pilnáček.*

10.

V kružnici k, dán pravoúhlý $\triangle ABC$. Osa pravého úhlu při C stanoví na kružnici k, bod D. Spojnice BD seče odvěsnu $\overline{AC}$ v bodě E. Kružnice k_2 opsaná z bodu D jako středu poloměrem DE určuje na odvěsně $\overline{AC}$ ještě bod G a na odvěně $\overline{BC}$ body F, H tak, že platí vztah:

$$\left(\frac{\overline{FE}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{GH}}{2}\right)^2 = \overline{DE}^2$$

Prof. *Eduard Pleva.*

11.

Různoběžky a, b protaty jsou třetí c, jež stanoví na a bod A a na b bod B. Libovolná příčka d, rovnoběžná s c protíná

a v bodu A_1 b v bodu B_1. Jaké geom. místo určují průsečíky kružnic, opsaných nad průměry $\overline{AB_1}$, $\overline{A_1B}$?

Prof. *Eduard Pleva.*

12.

Letos (r. 1920.) byla v únoru pětkrát neděle; v kterých letech tohoto století to bude opět.

R.

13.

Které je geom. místo středu podobnosti kruhů příslušných jednomu svazku s pevným kruhem jiným. Provésti diskussi

Prof. *J. Schuster.*

14.

Do pevného kruhu vepsán lichoběžník s úhlopříčkami kolmými navzájem a s jedním pevným vrcholem. Které geom. místo opíše průsečík ramen a úhlopříček?

Prof. *J. Schuster.*

15.

Sečísti řady:

$$x \sin x + 2x^2 \sin 2x + 3x^3 \sin 3x + \ldots$$
$$x \cos x + 2x^2 \cos 2x + 3x^3 \cos 3x + \ldots$$

Dr *Josef Štěpánek.*

b) Z deskriptivní geometrie.

1.

Sestrojiti rotační paraboloid, daný dvěma body povrchu a osou a proložiti těmi body rovinu tak, aby paraboloid protínala v nejhezčí ellipse (aneb v ellipse o daném poměru os.)

Prof. *Ant. Božek.*

2.

Sestrojiti rotační paraboloid, dány-li tři body povrchu a vrcholová rovina tečná (na př. půdorysna π.)

Dr *Josef Klíma.*

3.

Sestrojte klenec, který jest dán nejdelší úhlopříčkou $\overline{AG}$, aby jeho hrana $\overline{AB}$ svírala s půdorysnou úhel α a s nárysnou úhel β.

Prof. *J. Kroupa.*

Řešení úloh.

Řešení úloh buďtež zaslána nejpozději do **20. dubna 1921** na adresu: S. doc. *K. Rychlík* na Král. Vinohradech, Slezská ul. 66.

Páni řešitelé se žádají, aby řešení každé úlohy bylo napsáno *zvlášť* na jednu nebo několik čtvrtek papíru obyčejného formátu. V čele každého řešení budiž uvedeno číslo úlohy (tekst úlohy není nutno psáti), jméno řešitele a ústavu, na němž studuje. Řešení buďtež seřazena dle čísel, a jsou-li zasílána v obalu menšího formátu než čtvrtkového, jako celek složena. Zároveň uveďte páni řešitelé při poslední zásilce na zvláštním lístku papíru seznam všech řešení, která vůbec zaslali.

Mimo to je nutno, aby páni řešitelé uvedli přesnou adresu svou, aby mohli býti ceny správně rozeslány.

Neopomeňte zásilek dostatečně frankovati: do 20 gr. 60 hal., za každých dalších 20 gr. 20 hal.