Příspěvek ku theorii Descartes-ova listu.

Podává

Dr. **Karel Zahradník,**
professor české vysoké školy technické v Brně.

1. Rovnice Descartes-ova listu*) jest

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

aneb, užijeme-li racionálního parametru u daného relací $y = ux$,

$$(1) \qquad x = \frac{3au}{1+u^3}, \quad y = \frac{3au^2}{1+u^3},$$

kdež význam parametru u je patrný.

Tři body listu u_1, u_2, u_3 leží na přímce, vyhovují-li parametry jejich relaci

$$(2) \qquad u_1 u_2 u_3 = -1.$$

Splyne-li bod u_2 s bodem u_3, platí $u_2 = u_3 = u$, a relace (2) přejde ve

$$(3) \qquad u_1 u^2 = -1,$$

relaci to mezi parametrem bodu dotyku u přímky s listem Descartes-ovým a příslušným mu bodem tangenciálním u_1.

Jsou-li u', u'' kořeny rovnice (3), máme

*) O této křivce viz historické poznámky Dr. *G. Loria*, Spezielle algeb. und transc. ebene Curven, Theorie und Geschichte. Překlad F. Schütte-ho, Lipsko 1902. Ze svých prací uvádím: Zur Theorie der Curven dritter Ordnung und vierter Classe. Zprávy o zasedání učené společnosti, Praha 1872. O skupinách bodů dotyčných na listu Descartesově. Časopis pro pěst. mathem. a fys. roč. XXIV. pag. 282.

$$(4) \qquad u' + u'' = 0, \qquad u'u'' = \frac{1}{u_1}.$$

Prvá z rovnic (4) praví, že body dotyku tečen vedených z bodu listu jsou ve vztahu výměnlivém — involutorním.

Píšeme-li $\overline{Ou'} = U'$, $\overline{Ou''} = U''$, můžeme tuto rovnici psáti

$$(XYU'U'') = -1,$$

t. j. body dotyku sdružené k témuž tangenciálnímu bodu promítají se z dvojného bodu v paprscích, jež harmonicky dělí tečny dvojného bodu.

Dále vysvítá z téže rovnice, že, leží-li jeden bod dotyku u' na smyčce, leží druhý bod dotyku u'' na ostatní části křivky, a z rovnice (3) jde, že body dotyku u', u'' tečen bodu u_1 jsou reálné, je-li $u_1 < 0$, t. j. neleží-li bod na smyčce listu.

2. Kdyby všechny tři průsečíky přímky s listem splývaly, bylo by $u_1 = u_2 = u_3 = u$; přímka byla by tečnou inflexní v bodě u, jenž je bodem inflexním listu a hodnoty parametru jeho plynou z rovnice

$$(5) \qquad u^3 = -1.$$

Má tedy Descartes-ův list jeden bod inflexní reálný, připadající parametru $u_1 = -1$ a dva body inflexní imaginárné o parametrech

$$u_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad u_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Tyto body inflexní leží na přímce, neb součin parametrů jejich jest $= -1$.

3. Body úběžné křivky obdržíme, kladouce

$$u^3 + 1 = 0,$$

ale to je rovnice (5), z kteréž jsme určili parametry bodů inflexních. Z toho vyplývá, že body úběžné jsou inflexními body Descartes-ova listu, a tudíž jsou i tečny inflexní jeho asymptotami.

O kvadratické involuci bodů sdružených u', u''.

4. Rovnice spojnice dvou bodů u', u'' křivky jest

$$[u'^2u''^2 - (u' + u'')]\,x + [1 - u'u''\,(u' + u'')]\,y + 3au'u'' = 0.$$

Mají-li ty body společný tangenciální bod u_1, platí rovnice (4), a tím je rovnice spojnice bodů u', u'' sdružených k bodu u_1

$$S_{u_1} \equiv x + u_1^2 y + 3au_1 = 0. \tag{6}$$

Opíše-li bod u_1 Descartes-ův list, obaluje sdružená mu přímka S_{u_1} kuželosečku, jež se jmenuje Weyr-Cayley-ova kuželosečka kvadratické involuce bodové na listu dané rovnicí (3). Rovnice této kuželosečky v souřadnicích tangenciálních jsou

$$\xi = -\frac{1}{3a}\cdot\frac{1}{u_1},$$
$$\eta = \frac{1}{3a}\cdot u_1;$$

rovnici její v souřadnicích bodových obdržíme z rovnice (5) tím, že diskriminant levé strany klademe $= 0$. Obdržíme tak

$$xy - \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = 0. \tag{7}$$

Zmíněná kuželosečka jest rovnostranná hyperbola, jejíž asymptoty jsou tečnami dvojného bodu listu. Osa symmetrie $x = y$ listu je reálnou osou hyperboly, kteráž se dotýká smyčky listu v bodě $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ příslušném parametru $u = 1$.

Parametry průseků Descartes-ova listu s kuželosečkou involuce obdržíme, vložíme-li do rovnice (7) za x, y hodnoty z (1). Tak obdržíme

$$(u^3 - 1)^2 = 0.$$

Je-li α imaginární třetí kořen z jedničky, jsou

$$u = 1, \quad \alpha, \quad \alpha^2$$

hledané parametry průseků, a to každý dvakráte, t. j. hyperbola kvadratické involuce (3) na Descartes-ově listu dotýká se ho třikráte.

Je-li $u_1 = u_2 = u_3 = u$, obdržíme z relace (2), kteráž zde přechází v $u^3 = -1$, parametry bodů obratu (odst. 2.) listu

$$u = -1, \quad -\alpha, \quad -\alpha^2.$$

Body dotyku Weyr-ovy kuželosečky kvadratické involuce s Descartes-ovým listem jsou dle toho sdružené body*) bodům obratu listu.

Souřadnice bodu dotyku tečny S_{u_1} jsou

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{3a}{2}\cdot u_1, \\ y_1 &= -\frac{3a}{2}\cdot\frac{1}{u_1}, \end{aligned} \tag{8}$$

Rovnice (8) vyjadřuje současně parametricky kuželosečku involuce (7) v souřadnicích bodových.

5. Označíme-li S_h spojnici bodů sdružených ku bodu u_h, a podobně $S^{(h)}$ pro bod $u^{(h)}$, můžeme říci:

Přímky S', S'' jsou rovnoběžné, jsou-li body u', u'' sdružené body ku u_1. Je totiž vzhledem k rovnicím (4)

$$\operatorname{tg}(S'S'') = 0.$$

6 Ježto přímka $S_{u_1} \equiv S_1 \equiv \overline{u'u''}$ protíná Descartes-ův list ještě v bodě v, platí tudíž

$$u'u''v = -1$$

a vzhledem k rovnicím (4) jest

$$v + u_1 = 0. \tag{9}$$

Bod u_1 i průsek v přímky $\overline{u'u''}$ s listem tvoří dvojinu bodů téže kvadratické involuce, ku které dvojina bodů u', u'' spadá; dle toho je spojnice $\overline{u_1 v}$ tečnou kuželosečky involuce (7).

Společný tangencialní bod bodů u_1, v budiž t; parametr jeho je dán rovnicí

---

*) Srovnej Dr. *Em. Weyr*, O involucích na křivkách třetího stupně. Casopis pro pěst. mathem. a fys. IX. pag. 145.

$$t = -\frac{1}{u_1^2}.$$

Průsek spojnice $\overline{u_1 v}$ s listem budiž bod w, tudíž je

$$u_1 v w = -1,$$

a jelikož platí

$$u + v = 0,$$

jest

$$w = \frac{1}{u_1^2},$$

tudíž

$$t + w = 0.$$

Body t, w tvoří dle toho dvojinu kvadratické involuce (3). Při bodech t, w mohli bychom stejně postupovati jako při bodech u', u'' neb u_1, v atd.

7. Budiž bod v_1 na spojnici S_1 harmonicky sdružen s bodem v vzhledem k dvojině bodů u', u''. Promítáme-li body u', u'', v, v_1 z dvojného bodu O listu, obdržíme

$$O\,(u'u''vv_1) = -1,$$

t. j.

$$\frac{u'-v}{u''-v} : \frac{u'-v_1}{u''-v_1} = -1,$$

aneb

$$u'u'' - \frac{1}{2}(u' + u'')(v + v_1) + vv_1 = 0. \tag{10}$$

Vzhledem k rovnicím (4) obdržíme z rovnice (10)

$$v_1 = \frac{1}{v^2}, \tag{11}$$

aneb, hledíme-li k rovnici (9),

$$v_1 = \frac{1}{u_1^2}.$$

Rovnice paprsku*) Ov_1 je tudíž

*) $Ov_1 \equiv Ow$, w leží na listu, v_1 na S_1, $t = -w = -v_1$ a jak z dalšího vysvítá, jest $w \equiv \tau$.

$$y = \frac{1}{u_1^2} x^2$$

a souřadnice bodu v_1, průseku to paprsku Ov_1 se spojnicí S_1, jsou

$$x = -\frac{3a}{2} u_1,$$

$$y = -\frac{3a}{2} \cdot \frac{1}{u_1}.$$

Srovnáme-li tento výsledek s rovnicemi (8), shledáváme ihned, že bod v_1 jest bodem dotyku tečny $S_1 \equiv \overline{u'u''}$ kuželosečky involuční, t. j. *bod dotyku tečny $\overline{u'u''}$ involuční kuželosečky je harmonicky sdružený bod s bodem v vzhledem k bodům u', u''.*

Z relace (11) vychází

$$v^2(-v_1) = -1,$$

t. j. bod t o parametru $-v_1$ jest tangenciálním bodem bodů v a u_1 (odst. 6.); můžeme tudíž říci: *bod v_1 leží na paprsku harmonicky sdruženém s paprskem Ot vzhledem na tečny dvojného bodu.*

8. Bod v_1 neleží na listu, avšak paprsek Ov_1 protíná list v bodě t, pro nějž platí (rov. 11)

$$v^2 \tau = 1;$$

jest totiž směrnice přímky Ov_1, označená krátce v_1, současně parametr bodu τ. Spojnice $\overline{u_1 v}$ protíná Descartes-ův list v bodě w, pročež platí

$$u_1 v w = -1$$

a ježto

$$u_1 + v = 0,$$

máme

$$v^2 w = 1.$$

Jest tedy bod $w \equiv$ s bodem τ, t. j. paprsek $\overline{Ov_1}$ a spojnice $\overline{u_1 v}$ protínají se v témž bodě na Descartes-ově listu. Z toho plyne i sestrojení bodu v_1. Třetí průsek w spojnice $\overline{u_1 v}$ s listem spojíme s dvojným bodem O. Průsek $\overline{Ow} \,.\, \overline{u'u''}$ je hledaný bod v_1.

9. Spojnice $\overline{u_1 v}$ má rovnici

$$u_1^4 x + y - 3au_1^2 = 0,$$

která substitucí

$$u_1^2 = -\frac{1}{\tau}$$

přechází ve

$$S_\tau \equiv x + \tau^2 y + 3a\tau = 0,$$

což jest i z odst. 5. patrno. Souřadnice bodu dotyku tečny S_τ s kuželosečkou involuční jsou

$$x_2 = \frac{3a}{2}\frac{1}{u_1^2}, \quad y_2 = \frac{3a}{2}u_1^2. \tag{12}$$

Z rovnic (8) a (12) vychází

$$x_2 - x_1 = \frac{3a}{2}\frac{1+u_1^3}{u_1^2} = \frac{3a}{2}\cdot\frac{3a}{y},$$

$$y_2 - y_1 = \frac{3a}{2}\frac{1+u_1^3}{u_1} = \frac{3a}{2}\cdot\frac{3a}{x},$$

tedy

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y}{x},$$

t. j. spojnice bodů dotyku tečen $\overline{u'u''}$ a $\overline{u_1 v}$ s kuželosečkou involuční jest rovnoběžná se spojnicí bodu u_1 s dvojným bodem listu.

Další relace mezi bodem u_1 a přímkou S_{u_1}.

10. Vzdálenost q_1 bodu u_1 od přímky S_{u_1} jest

$$q_1 = \frac{6au}{\sqrt{1+u^4}},$$

podobně vzdálenost q_0 bodu dvojného od přímky S_{u_1}

$$q_0 = \frac{3au}{\sqrt{1+u^4}},$$

tak že platí

$$q_1 = 2q_0. \tag{13}$$

Spojnice $\overline{u_1 O}$ protíná přímku S_{u_1} v bodě M, a z podobnosti trojúhelníků plyne

$$u_1 O = OM.$$

Bod M je symmetrickým bodem bodu u_1 vzhledem ku bodu dvojnému listu.

Hledáme-li střed délky $\overline{u'u''}$ sdružené k bodu u_1, obdržíme

$$(14) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{3a}{2}\left(\frac{u'}{1+u'^3} + \frac{u''}{1+u''^3}\right) = -\frac{3au_1}{1+u_1^3}, \\ y_1 &= \frac{3a}{2}\left(\frac{u''^2}{1+u''^3} + \frac{u'^2}{1+u''^3}\right) = -\frac{3au_1}{1+u_1^3}, \end{aligned}$$

použijeme-li vztahu (4). Střed délky $\overline{u'u''}$ sdružené k bodu u_1, je bod symmetrický tomuto bodu vzhledem k dvojnému bodu. Můžeme tedy říci: *spojnice $\overline{u_1 O}$ půlí vzdálenost bodů sdružených. Místo středů vzdáleností bodů sdružených k bodům listu Descartes-ova jest opět týž list Descartes-ův, pouze pootočený okolo dvojného bodu o 180°.*

11. V odst. 10. našli jsme, že

$$q_1 = \frac{6au_1}{\sqrt{1+u_1^4}},$$

a pro vzdálenost Ov_1 bodu dotyku v_1 přímky S_1 s involuční kuželosečkou našli bychom

$$Ov_1 = \frac{3a}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+u_1^4}}{u_1},$$

tudíž

$$q_1 \cdot \overline{Ov_1} = (3a)^2.$$

Relace této lze při konstrukci vhodně upotřebiti.

12. Na každé přímce vedené určitým bodem k listu a protínající list v dalších dvou bodech u_1, u_2 máme bod půlící délku $\overline{u_1 u_2}$.

Souřadnice toho bodu jsou

$$x_1 = \frac{3a}{2}\,\frac{A}{C}, \qquad y_1 = \frac{3a}{2}\,\frac{B}{C},$$

kdež jest, píšeme-li

$$\alpha = -\frac{1}{u}, \quad t = u_1 + u_2,$$
$$A = \Sigma u + \Sigma u^3 u = -2\alpha^2 + t + \alpha t^2,$$
$$B = \Sigma u^2 + \Sigma u^3 u^2 = -2\alpha + \alpha^2 t + t^2,$$
$$C = 1 + \Sigma u^3 + \Sigma u^3 u^3 = 1 + \alpha^2 - 3\alpha t + t^3.$$

Jest tedy místo středů délek $\overline{u_1 u_2}$ pro všechny přímky jdoucí bodem u opět racionální křivka stupně třetího, kteráž přechází v Descartesův list, stejně položený s daným listem, při němž místo a třeba vzíti $\frac{a}{2}$, je-li $\alpha = 0$, t. j. $u = \infty$, což jest samozřejmé.

13. Bod u_1 tvoří se svými sdruženými body u', u'' trojúhelník $u_1 u' u''$; jsou-li x_2, y_2 souřadnice těžiště tohoto trojúhelníka, jest

$$x_2 = a \sum^3 \frac{u}{1+u^3} = a \frac{A_1}{C_1},$$
$$\sum \frac{u^2}{1+u^3} = a \frac{B_1}{C_1}.$$

Vzhledem k rovnicím (4) odstavce 1. jest

$$u_1 + u' + u'' = u_1,$$
$$u_1 (u' + u'') + u'u'' = \frac{1}{u_1},$$
$$u_1 u' u'' = 1,$$

tedy

$$A_1 = -\frac{1+u_1^3}{u_1^2},$$
$$B_1 = -\frac{1+u_1^3}{u_1},$$
$$C_1 = \frac{(u_1^3+1)^2}{u_1^3},$$

pročež

$$(15) \qquad x_2 = -\frac{a u_1}{1+u_1^3}, \quad y_2 = -\frac{a u_1^2}{1+u_1^3}.$$

Místo těžišť trojúhelníků $u, u' u''$ jest opět list Descartes-ův, a to zmenšený v poměru $1:3$ a pootočený o 180° okolo dvojného bodu.

Přímka a list.

14. Přímka $\xi \mid \eta$ protíná list v bodech u_1, u_2, u_3, jež vyhovují relacím

$$(16) \qquad (u)_1 = -3a\eta, \quad (u)_2 = 3a\xi, \quad (u)_3 = -1.$$

Bod středních vzdáleností průseků má souřadnice

$$x_2 = a\sum_{h=1}^{3} \frac{u_h}{1+u_h^3} = \frac{A_2}{C_2},$$
$$y_2 = a\sum_{h=1}^{3} \frac{u_h^2}{1+u_h^3} = \frac{B_2}{C_2}.$$

Vzhledem k horním relacím obdržíme

$$(17) \qquad x_3 = \frac{\xi(a\eta^2 - \xi)}{\xi^3 - \eta^3}, \quad y_3 = \frac{\eta(\eta - a\xi^2)}{\xi^3 - \eta^3}.$$

Leží-li bod $x_3 \mid y_3$ na reálné asymptotě listu, jest v platnosti

$$(18) \qquad a(\xi^2 + \eta^2) - (\xi + \eta) = 0,$$

aneb v souřadnicích bodových

$$(19) \qquad x^2 + y^2 - 2xy - 4a(a + y) = 0.$$

Je-li tedy přímka $\xi \mid \eta$ tečnou paraboly (19), leží bod středních vzdáleností průseků přímky s listem na reálné asymptotě listu.

Je-li přímka $\xi \mid \eta$ tečnou paraboly $a\eta^2 - \xi = 0$, leží bod středních vzdáleností průseků na ose Y, tangentě to dvojného bodu. Podobně leží bod ten na ose X, t. j. na druhé tangentě dvojného bodu listu, je-li $\xi \mid \eta$ tečnou paraboly $a\xi^2 - \eta = 0$.

Rovnice tečny.

15. Z rovnice spojnice dvou bodů (odst. 4.) plyne rovnice tečny bodu u, klademe-li

$$u' = u'' = u.$$

Tak obdržíme

$$u(u^3 - 2)x + (1 - 2u^3)y + 3au^2 = 0. \tag{20}$$

Jsou-li $x \mid y$ souřadnice určitého bodu v rovině listu, najdeme parametry bodů dotyku tečen vedených z bodu $x \mid y$ na list jako kořeny rovnice (20); a ježto jest tato rovnice vzhledem k parametru u stupně čtvrtého, je patrno, že z každého bodu $x \mid y$ můžeme na list vésti čtyři tečny, t. j. Descartes-ův list je křivka čtvrté třídy.

Vložíme-li do rovnice tečny parametry bodů úběžných listu, obdržíme rovnice asymptot listu a to

$$\begin{aligned} x + y + a &= 0, \\ (1 - i\sqrt{3})x + (1 + i\sqrt{3})y - 2a &= 0, \\ (1 + i\sqrt{3})x + (1 - i\sqrt{3})y - 2a &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Průsek imaginárných asymptot jest reálný bod $(a \mid a)$, těžiště trojúhelníka asymptot pak leží ve dvojném bodě listu.

O průsecích kruhu s Descartes-ovým listem.

16. Parametry průseků kruhu s Descartes-ovým listem obdržíme vložením hodnot pro x, y z (1) do rovnice kruhu

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + m^2 = 0.$$

Tím obdržíme rovnici šestého stupně vzhledem k u, odpovídající šesti průsekům kruhu s Descartes-ovým listem, totiž

$$\begin{aligned} m^2u^6 - 6a\beta u^5 + 3a(3a - 2\alpha)u^4 - 2m^2u^3 \\ + 3a(3a - 2\beta)u^2 - 6a\alpha u + m^2 = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Ježto již tři body kruh úplně určují, musí mezi parametry průseků existovati tři relace, z nichž lze vypočítati parametry ostatních tří průseků. Tyto relace jsou

$$\begin{aligned}(23)\qquad & \Sigma u_1 - \Sigma u_1 u_2 + \Sigma u_1 u_2 u_3 u_4 - \Sigma u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 = 0,\\ & \Sigma u_1 u_2 u_3 = 0,\\ & u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 = 1.\end{aligned}$$

Chceme-li nalézti podmínku, kdy čtyři body u_1, u_2, u_3, u_4 leží na kruhu, třeba z rovnice (23) vyloučiti $(u_5 + u_6)$, $u_5 u_6$ jako neznámé.

V následujícím budeme předpokládati, že kruh probíhá dvojným bodem Descartes-ova listu, t. j. počátkem souřadnic. Dle toho bude $m^2 = 0$, tudíž $u_5 = 0$, $u_6 = \infty$, a rovnice (22) přejde ve

$$(24)\qquad \beta u^4 + \left(\alpha - \frac{3a}{2}\right) u^3 + \left(\beta - \frac{3a}{2}\right) u + \alpha = 0,$$

z níž vycházejí vztahy

$$\begin{aligned}(25)\qquad & \Sigma u_1 = \frac{3a}{2\beta} - \frac{\alpha}{\beta},\\ & \Sigma u_1 u_2 = 0,\\ & \Sigma u_1 u_2 u_3 = \frac{3a}{2\beta} - 1,\\ & \Sigma u_1 u_2 u_3 u_4 = \frac{\alpha}{\beta},\end{aligned}$$

kdež se vztahuje součet na kořeny rovnice (24).

Z rovnic (25) plyne

$$\begin{aligned}(26)\qquad & \Sigma u_1 - \Sigma u_1 u_2 u_3 + \Sigma u_1 u_2 u_3 u_4 = 1,\\ & \Sigma u_1 u_2 = 0.\end{aligned}$$

Vyloučíme-li z těch rovnic bod u_4 a značíme-li $(u)_h$ kombinace h-tého stupně parametrů tří bodů u_1, u_2, u_3, máme

$$\begin{vmatrix} 1 + (u)_1 - (u)_3, & 1 - (u)_2 + (u)_3 \\ (u)_2, & (u)_1 \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$(27)\qquad [(u)_1 + (u)_2][1 + (u)_3] = (u)_1^2 + (u)_2^2.$$

Rovnice tato vyjadřuje podmínku, kdy tři body Descartes-ova listu leží na kruhu jdoucím dvojným bodem listu.

17. Dvojiny bodů kvadratické involuce dané rovnicí (3) a jí sdružené body leží tehdy na kruhu jdoucím počátkem souřadnic, vyhovují li parametry těch bodů rovnici (27). Dle toho obdržíme

(28) $$u^4 - 2u^3 - 2u + 1 = 0.$$

Existují tudíž čtyři body u_h *(*$h = 1, 2, 3, 4$*), které i se sdruženými jim body styku* u'_h, u''_h *leží na kruhu jdoucím dvojným bodem listu.* Jelikož parametry u_h těch bodů vyhovují rovnicím (26), obdržíme vlastnost, že tyto čtyři body u_h leží opět na kruhu, jenž prochází dvojným bodem Descartes-ova listu. Z rovnic (25) a (28) obdržíme souřadnice středu tohoto kruhu

$$\alpha = \frac{a}{2}, \quad \beta = \frac{a}{2},$$

a jelikož jest $m^2 = 0$, plyne, že poloměr toho kruhu $= \frac{a}{\sqrt{2}}$.

18. Hledáme-li rovnici kruhu, jenž prochází involutorní dvojinou u', u'' na Descartes-ově listu a dvojným bodem listu, obdržíme vzhledem k

$$u' + u'' = 0, \qquad u'u'' = \frac{1}{u}$$

z rovnic (25) při $u' = u_3$, $u'' = u_4$

$$u_1 + u_2 = \frac{3a}{2\beta} - \frac{\alpha}{\beta},$$

$$u_1 u_2 + \frac{1}{u} = 0,$$

$$\frac{u_1 + u_2}{u} = \frac{3a}{2\beta} - 1,$$

$$\frac{u_1 u_2}{u} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Z rovnice druhé a čtvrté máme

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{u^3}$$

a z první rovnice a třetí vzhledem na předcházející rovnici nabudeme

$$\beta = \frac{3au^2(u-1)}{2(u^3+1)},$$

tím

$$\alpha = -\frac{3a(u-1)}{2(u^3+1)}$$

jakožto souřadnice středu kruhu hledaného, jehož poloměr

$$= \frac{3a}{2} \cdot \frac{u-1}{u^3+1} \sqrt{u^4+1}.$$

Geometrické místo středů (α, β) kruhů opsaných trojúhelníkům z dvojin kvadratické involuce (3) na Descartes-ově listu a jeho dvojného bodu je tedy racionální křivka třetího stupně. Pro souřadnice bodu u listu a souřadnice středu kruhu příslušné nvolutorní dvojiny je v platnosti relace

$$\frac{x}{4\alpha} + \frac{y}{4\beta} + 1 = 0.$$

O křivce harmonicky sdružené.

19. Každá přímka jdoucí dvojným bodem křivky protíná křivku v dalším bodě A a reálnou její asymptotu v bodě B. Určme na každé takové přímce bod C, aby bylo $(ABOC) = -1$, t. j. harmonicky sdružený s dvojným bodem O vzhledem k dvojině A, B. Jsou-li ξ, η souřadnice bodu C, x_1, y_1 souřadnice bodu B, máme

$$\frac{2}{\xi} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x_1} = \frac{1+u^3}{3au} - \frac{1+u}{a},$$

$$\frac{2}{\eta} = \frac{1}{y} + \frac{1}{y_1} = \frac{1+u^3}{3au^2} - \frac{1+u}{au},$$

tudíž jest

$$\xi = \frac{6au}{(1+u)(u^2-4u+1)}, \quad \eta = u\xi. \tag{29}$$

Křivka tato je racionální třetího stupně a čtvrté třídy, má veškeré asymptoty reálné, což již z konstrukce jest patrné.

O harmonických bodech a tečnách Descartes-ova listu.

20. Každý kruh jdoucí dvojným bodem Descartes-ova listu protíná list mimo v dvojném bodě ještě ve čtyřech bodech,

jichž parametry plynou z rovnice (24). Avšak čtyři body, jichž parametry jsou kořeny bikvadratické rovnice

$$A_0u^4 + 4A_1u^3 + 6A_2u^2 + 4A_3u + A_4 = 0,$$

jsou harmonické, je-li v platnosti

$$(30) \qquad \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0.$$

V našem případě jest

$$A_0 = \beta, \quad A_1 = \frac{\alpha}{4} - \frac{3a}{8}, \quad A_2 = 0,$$

$$A_3 = \frac{\beta}{4} - \frac{3a}{8}, \quad A_4 = \alpha.$$

Podmínka, aby kruh protínal list ve čtyřech bodech harmonických (nepřihlížejíc k dvojnému bodu), je tudíž

$$\begin{vmatrix} \beta & \frac{\alpha}{4} - \frac{3}{8}a & 0 \\ \frac{\alpha}{4} - \frac{3}{8}a & 0 & \frac{\beta}{4} - \frac{3}{8}a \\ 0 & \frac{\beta}{4} - \frac{3}{8}a & \alpha \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$(31) \qquad \beta\left(\frac{\beta}{4} - \frac{3}{8}a\right)^2 + \alpha\left(\frac{\alpha}{4} - \frac{3}{8}a\right)^2 = 0.$$

21. Parametry dotyčných bodů tečen vedených z bodu (xy) na list plynou z rovnice tečny (20), již můžeme psáti ve tvaru

$$xu^4 - 2yu^3 + 3au^2 - 2xu + y = 0.$$

Zde jest

$$A_0 = x, \quad A_1 = -\frac{y}{2}, \quad A_2 = \frac{a}{2}, \quad A_3 = -\frac{x}{2}, \quad A_4 = y.$$

Podmínka, aby tečny z bodu (xy) na list tvořily skupinu čtyř harmonických paprsků, jest v tomto případě

$$\begin{vmatrix} x & -\frac{y}{2} & \frac{a}{2} \\ -\frac{y}{2} & \frac{a}{2} & -\frac{x}{2} \\ \frac{a}{2} & -\frac{x}{2} & y \end{vmatrix} = 0.$$

Vypočítáme-li determinant, obdržíme

$$2(x^3 + y^3 - 3axy) + a^3 = 0 \tag{32}$$

jako rovnici místa bodů $(x \mid y)$, z nichž tangenty vedené ku Descartes-ovu listu tvoří harmonický svazek. Rovnici tuto lze psáti ve tvaru

$$x^3 + y^3 + \frac{a^3}{2} z^3 - 6axyz = 0;$$

i shledáváme, že křivka (32) má styk trojbodový s Descartes-ovým listem v jeho bodech inflexních.

22. Hledáme-li totéž pro křivku harmonicky sdruženou (odst. 19.), je

$$A_0 = x,\ A_1 = -\frac{y}{2},\ A_2 = -\frac{1}{2}(x + y - 2a),\ A_3 = -\frac{x}{2},\ A_4 = y,$$

a píšeme-li

$$P \equiv x + y - 2a = 0,$$

je hledané místo

$$2(x^3 + y^3 + 3Pxy) - P^3 = 0.$$

Volíme-li za strany trojúhelníka souřadnicového osy X, Y, a přímku $P = 0$, můžeme rovnici toho místa psáti v kanonickém tvaru

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - mx_1x_2x_3 = 0.$$

Ekvianharmonické body a tečny Descartes-ova listu.

23. Kruh jdoucí dvojným bodem listu protíná list ve skupině ekvianharmonických bodů, je-li v platnosti

$$A_0 A_4 = 3A_2^2 - 4A_1 A_3 = 0.$$

Klademe-li za A_h hodnoty odst. 20., obdržíme

$$\alpha\beta - 4\left(\frac{\alpha}{4} - \frac{3}{8}a\right)\left(\frac{\beta}{4} - \frac{3}{8}a\right) = 0.$$

Píšeme-li

$$\alpha = \xi + \frac{a}{2}, \quad \beta = \eta + \frac{a}{2},$$

můžeme horní rovnici psáti

$$3\xi\eta + a(\xi + \eta) = 0,$$

t. j. geometrické místo středů kruhů, jež procházejí dvojným bodem Descartes-ova listu a list v ekvianharmonických bodech protínají, jest hyperbola stejnostranná, jejíž asymptoty jsou rovnoběžny s tečnami dvojného bodu.

24. Přihlížíme-li k hodnotám A_h v odst. 21. a 22., můžeme říci: „geometrické místo bodů, z nichž tangenty vedené ku listu tvoří ekvianharmonický svazek, jest přímka úběžná dvakráte vzatá“.

A dále: „geometrické místo bodů, z nichž tangenty vedené ku křivce harmonicky sdružené tvoří ekvianharmonický svazek paprsků, jest přímka $P = 0$ dvakráte vzatá“.

O kruhu jdoucím involutorní dvojinou a dvojným bodem listu.

25. V následujícím zobecníme některé výsledky. Budiž dána kvadratická involuce rovnicí

$$l(u_1 + u_2) + mu_1u_2 + n = 0. \tag{33}$$

Vyloučíme-li $(u_1 + u_2)$ z rovnice spojnice bodů u_1, u_2, obdržíme

$$(lu_1^2u_2^2 + m\,u_1u_2 + n)\,x + (l + mu_1^2u_2^2 + nu_1u_2)y + 3\,alu_1u_2 = 0$$

čili

$$(lx + my)u_1^2u_2^2 + (mx + ny + 3\,al)\,u_1u_2 + (nx + ly) = 0.$$

Diskriminant této rovnice položen na roveň nulle poskytuje rovnici křivky, kterou spojnice dvojin involučních obalují, totiž

$$(mx + ny + 3\,al)^2 - 4(lx + my)(nx + ly) = 0,$$

což je Weyr-Cayley-ova kuželosečka.

Klademe-li $m = n = 0$, obdržíme rovnici (7) odst. 4.

26. Rovnice kruhu jdoucího dvojným bodem listu a dvěma jeho body u_1, u_2 jest, užijeme-li označení

$$u_1 + u_2 = \lambda, \quad u_1 u_2 = \mu,$$

$$(34)\quad x^2 + y^2 - 3a\frac{-\lambda - \lambda^2 - \mu + \mu^3}{1 + \lambda^3 - 3\lambda\mu + \mu^3}\mu x + 3a\frac{-1 + \lambda\mu - \lambda^2 + \mu}{1 + \lambda^3 - 3\lambda\mu + \mu^3}y = 0.$$

Tvoří-li body u_1, u_2 dvojiny kvadratické involuce dané rovnicí

$$(35)\qquad l\lambda + m\mu + n = 0,$$

můžeme λ vyjádřiti pomocí μ aneb obráceně. Jsou-li α, β souřadnice středu toho kruhu, je

$$(36)\qquad \begin{aligned} \alpha &= \frac{3a}{2}\frac{(-\lambda - \mu + \lambda^2 + \mu^2)\mu}{1 - 3\lambda\mu + \lambda^3 + \mu^3} \\ \beta &= -\frac{3a}{2}\frac{-1 + \mu + \lambda\mu - \lambda^2}{1 - 3\lambda\mu + \lambda^3 + \mu^3} \end{aligned}$$

a ježto λ a μ vázány jsou linearnou relací (35), je místo středů kruhů opsaných trojúhelníku z dvojiny involuční a z dvojného bodu listu racionální křivka třetího stupně.

27. Ve zvláštním případě, když $m = 0$, $n = 0$, tedy $\lambda = 0$, obdržíme, píšeme-li $\mu = \dfrac{1}{u}$,

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{3a}{2}\frac{u - 1}{1 + u^3} \\ \beta &= \frac{3a}{2}\frac{u^2(u - 1)}{1 + u^3} \end{aligned}$$

jako v odst. 18.

28. V případě, že

$$u_1 u_2 = \mu = -1,$$

máme centrální involuci na Descartes-ovu listu. Spojnice $\overline{u_1 u_2}$ dvojin involučních protínají Descartes-ův list v bodě $u_3 = 1$, tedy v bodě ležícím na ose symmetrie listu. Toto plyne jak z rovnic

$$u_1 u_2 u_3 = -1, \quad u_1 u_2 = -1,$$

tak i z rovnice spojnice $\overline{u_1 u_2}$ v odst. 4.

Jednotlivé dvojiny kvadratické involuce uvedené promítají se z dvojného bodu pod pravým úhlem.

Kruh jdoucí dvojinou involuční a dvojným bodem listu má délku $\overline{u_1 u_2}$ za svůj průměr a střed té délky za svůj střed. Dle toho mohli bychom přímo vypočítati souřadnice $(\alpha_1 \mid \beta_1)$ toho středu, než obdržíme je z rovnice (36), kladouce $\mu = -1$, totiž

$$(37) \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{3a}{2}\frac{2-\lambda+\lambda^2}{3\lambda+\lambda^3} \\ \beta_1 &= \frac{3a}{2}\frac{2+\lambda+\lambda^2}{3\lambda+\lambda^3}. \end{aligned}$$

Jest tudíž místo středů takových kruhů racionální křivka stupně třetího. Rovnici její ve tvaru $f(\alpha_1, \beta_1) = 0$ najdeme vyloučením parametru λ z rovnic (37); výsledek eliminace jest

$$(\alpha_1 + \beta_1 - 3a)^2 (\alpha_1 + \beta_1) + 3(\alpha_1 + \beta_1 - a)(\alpha_1 - \beta_1)^2 = 0.$$

Křivka tato má dvojný bod v průseku přímek

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 - 3a &= 0 \\ \alpha_1 - \beta_1 &= 0, \end{aligned}$$

tedy v bodě Descartes-ova listu příslušném parametru $u = 1$. První rovnice je tečnou toho bodu a druhá rovnice je osou symmetrie listu. Vezmeme-li prvou přímku za osu Y, druhou za osu X, obdržíme

$$y = x\sqrt{-\frac{x+3a}{x+a}}$$

jakožto rovnici geometrického místa středů kruhů jdoucích dvojným bodem listu a dvojinou kvadratické involuce bodové na Descartes-ově listu určené rovnicí $u_1 u_2 = 1$.

29. Kdybychom chtěli užíti souřadnic trojúhelníkových, vezmeme tečny dvojného bodu a reálnou asymptotu za strany fundamentálního trojúhelníka. Rovnici listu