

Werk

Label: Article

Jahr: 1902

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0031|log26

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Casparyho nové věty z geometrie trojúhelníka.

Dokazuje

A. Libický,

professor na Král. Vinohradech.

(Pokračování.)

6. Bývá někdy s prospěchem, provést transformaci souřadnic, vztahovati totiž body roviny k jiným bodům základním nežli jsou body A_1, A_2, A_3 . Za takové nové body volme body B_1, B_2, B_3 a obírejme se nyní úlohou: *Dány jsou souřadnice x_1, x_2, x_3 libovolného bodu X v soustavě $A_1 A_2 A_3$; jest ustanoviti jeho souřadnice v soustavě $B_1 B_2 B_3$, jejíž body základní jsou dány rovnicemi*

$$(8) \quad \begin{aligned} xB_1 &= x_1 A_1 + x_3 A_2 + x_2 A_3, \\ xB_2 &= x_3 A_1 + x_2 A_2 + x_1 A_3, \\ xB_3 &= x_2 A_1 + x_1 A_2 + x_3 A_3. \end{aligned} \quad (x = x_1 + x_2 + x_3)$$

Řešením těchto rovnic dle A_1, A_2, A_3 obdržíme pro tyto body zlomky, jichž společným jmenovatelem jest determinant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_3 & x_2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{vmatrix},$$

který lze psáti též

$$\begin{vmatrix} x_1 + x_3 + x_2 & x_3 & x_2 \\ x_3 + x_2 + x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 + x_1 + x_3 & x_1 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x_3 & x_2 \\ x & x_2 & x_1 \\ x & x_1 & x_3 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & x_3 & x_2 \\ 1 & x_2 & x_1 \\ 1 & x_1 & x_3 \end{vmatrix}.$$

Označme poslední determinant písmenem ξ' , tak že

$$(12 a) \quad \xi' = \begin{vmatrix} 1 & x_3 & x_2 \\ 1 & x_2 & x_1 \\ 1 & x_1 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_2 - x_3 \\ x_2 - x_3 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} = x_1(x_2 - x_1) + x_2(x_3 - x_2) + x_3(x_1 - x_3).$$

Určíme-li známým způsobem ještě čitatele výrazů pro A_1, A_2, A_3 , plynoucí z uvedených rovnic, obdržíme, krátivše veličinou x , o které předpokládáme, že se nerovná nulle, rovnice

$$\begin{aligned}
 \xi' A_1 &= (x_2 x_3 - x_1^2) B_1 + (x_1 x_2 - x_3^2) B_2 + (x_3 x_1 - x_2^2) B_3, \\
 (13a) \quad \xi' A_2 &= (x_1 x_2 - x_3^2) B_1 + (x_3 x_1 - x_2^2) B_2 + (x_2 x_3 - x_1^2) B_3, \\
 \xi' A_3 &= (x_3 x_1 - x_2^2) B_1 + (x_2 x_3 - x_1^2) B_2 + (x_1 x_2 - x_3^2) B_3.
 \end{aligned}$$

Označíme-li dále subdeterminanty

$$(14a) \quad x_2 x_3 - x_1^2 = x \xi_1, \quad x_3 x_1 - x_2^2 = x \xi_2, \quad x_1 x_2 - x_3^2 = x \xi_3,$$

a poměr $\frac{\xi'}{x} = \xi$, píšeme kratěji:

$$\begin{aligned}
 \xi A_1 &= \xi_1 B_1 + \xi_3 B_2 + \xi_2 B_3, \\
 (15) \quad \xi A_2 &= \xi_3 B_1 + \xi_2 B_2 + \xi_1 B_3, \quad (\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3). \\
 \xi A_3 &= \xi_2 B_1 + \xi_1 B_2 + \xi_3 B_3.
 \end{aligned}$$

Výrazy ξ_1, ξ_2, ξ_3 můžeme pokládati za souřadnice barycentrické (v soustavě $B_1 B_2 B_3$) nějakého bodu R , jehož rovnice bude

$$\xi R = \xi_1 B_1 + \xi_2 B_2 + \xi_3 B_3;$$

sestrojení bodu toho poznáme později.

Z těchto rovnic plynou opět pro B_1, B_2, B_3 hodnoty:

$$\begin{aligned}
 x' B_1 &= (\xi_2 \xi_3 - \xi_1^2) A_1 + (\xi_1 \xi_2 - \xi_3^2) A_2 + (\xi_3 \xi_1 - \xi_2^2) A_3, \\
 (13b) \quad x' B_2 &= (\xi_1 \xi_2 - \xi_3^2) A_1 + (\xi_3 \xi_1 - \xi_2^2) A_2 + (\xi_2 \xi_3 - \xi_1^2) A_3, \\
 x' B_3 &= (\xi_3 \xi_1 - \xi_2^2) A_1 + (\xi_2 \xi_3 - \xi_1^2) A_2 + (\xi_1 \xi_2 - \xi_3^2) A_3
 \end{aligned}$$

značí-li

$$(12b) \quad x' = \begin{vmatrix} 1, & \xi_3, & \xi_2 \\ 1, & \xi_2, & \xi_1 \\ 1, & \xi_1, & \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 - \xi_2, & \xi_2 - \xi_3 \\ \xi_2 - \xi_3, & \xi_3 - \xi_1 \end{vmatrix}.$$

Neboť společný jmenovatel výrazů pro B_1, B_2, B_3 , plynoucí z rovnic (15), jest

$$\begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_3, & \xi_2 \\ \xi_3, & \xi_2, & \xi_1 \\ \xi_2, & \xi_1, & \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 + \xi_3 + \xi_2, & \xi_3, & \xi_2 \\ \xi_3 + \xi_2 + \xi_1, & \xi_2, & \xi_1 \\ \xi_2 + \xi_1 + \xi_3, & \xi_1, & \xi_3 \end{vmatrix} = \xi \begin{vmatrix} 1, & \xi_3, & \xi_2 \\ 1, & \xi_2, & \xi_1 \\ 1, & \xi_1, & \xi_3 \end{vmatrix} = \xi x'.$$

Body B_1, B_2, B_3 máme tedy vyjádřeny jednak rovnicemi (8), jednak rovnicemi (13b); z toho, co bylo pověděno v odd. 1. o souřadnicích barycentrických nějakého bodu vůbec, plyne, že musí býti $\xi_2 \xi_3 - \xi_1^2 = k x_1$, $\xi_3 \xi_1 - \xi_2^2 = k x_2$, $\xi_1 \xi_2 - \xi_3^2 = k x_3$, značí-li k koeficient úměrnosti.

Z těchto rovnic jde, že

$$\begin{aligned}
k(x_1 - x_3) &= \xi_2 \xi_3 - \xi_1^2 - (\xi_1 \xi_2 - \xi_3^2) \\
&= \xi_2 (\xi_3 - \xi_1) + (\xi_3 + \xi_1) (\xi_3 - \xi_1) \\
&= (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) (\xi_3 - \xi_1) \\
&= \xi (\xi_3 - \xi_1);
\end{aligned}$$

podobné výrazy obdržíme pro $k(x_2 - x_1)$, $k(x_3 - x_2)$.

Koefficient k ustanovíme, uvážíme-li, že srovnáním levých stran rovnic (13b) a (8) vychází

$$x' = kx;$$

násobíme obě strany rovnice (12b) ξ^2 a kladouce pak na pravé straně $\xi (\xi_1 - \xi_2) = -k(x_1 - x_2)$ atd. nabýváme však rovnice

$$\xi^2 x' = \xi^2 \begin{vmatrix} \xi_1 - \xi_2 & \xi_2 - \xi_3 \\ \xi_2 - \xi_3 & \xi_3 - \xi_1 \end{vmatrix} = k^2 \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_2 - x_3 \\ x_2 - x_3 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} = k^2 \xi'.$$

Dosadíme-li tu za x' hodnotu kx a za ξ' hodnotu ξx , obdržíme po zjednodušení $k = \xi$.

Tím rovnice pro $k(x_1 - x_3)$, $k(x_2 - x_1)$, $k(x_3 - x_2)$ nabývají tvaru

$$(16) \quad x_1 - x_3 = \xi_3 - \xi_1, \quad x_2 - x_1 = \xi_1 - \xi_2, \quad x_3 - x_2 = \xi_2 - \xi_3.$$

Připojme k tomu ještě, že z rovnice

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_3 & x_2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{vmatrix} = x\xi'$$

odvodíme dle známých vět o determinantech*), majíce zřetel ke vzorcům (14a), rovnice:

$$\begin{aligned}
(17) \quad & x_1 \xi_1 + x_3 \xi_3 + x_2 \xi_2 = \xi', \\
& x_3 \xi_1 + x_1 \xi_3 + x_2 \xi_2 = 0, \\
& x_2 \xi_1 + x_1 \xi_3 + x_3 \xi_2 = 0.
\end{aligned}$$

Po těchto úvahách přistoupíme k řešení naší úlohy. Souřadnice bodu X v soustavě $B_1 B_2 B_3$ určíme nejlépe výrazy, ve kterých se vyskytují veličiny ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , což se stane tímto způsobem: Násobíme rovnice (15) po řadě x_1 , x_2 a x_3 a sečteme je pak; poněvadž $\xi x = \xi'$ a $xX = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3$, obdržíme

*) Viz Baltzer-Pokorný: Základové matematiky, díl I., str. 125.

$$\xi'X = (\xi_1x_1 + \xi_3x_2 + \xi_2x_3)B_1 + (\xi_3x_1 + \xi_2x_2 + \xi_1x_3)B_2 \\ + (\xi_2x_1 + \xi_1x_2 + \xi_3x_3)B_3.$$

Hodnota součinitele u B_1 se nezmění, odečteme-li od něho trojčlen $x_2\xi_1 + x_1\xi_3 + x_3\xi_2$, který dle třetí rovnice (17) se rovná nulle; tím však obdržíme pro tento součinitel výraz $(\xi_3 - \xi_1)(x_2 - x_1)$, a ten jest dle (16) roven $(\xi_3 - \xi_1)(\xi_1 - \xi_2)$. Podobně vyjádříme součinitele u B_2 a B_3 ; rovnice bodu X zní pak:

$$\xi'X = (\xi_3 - \xi_1)(\xi_1 - \xi_2)B_1 + (\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_3)B_2 \\ + (\xi_2 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_1)B_3,$$

aneb, dělíce součinem $(\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_1)$ a kladouce

$$\frac{\xi'}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_1)} = \xi'',$$

též

$$(18a) \quad \xi''X = \frac{1}{\xi_2 - \xi_3}B_1 + \frac{1}{\xi_3 - \xi_1}B_2 + \frac{1}{\xi_1 - \xi_2}B_3.$$

Nebude nesnadno, určití podobným výpočtem souřadnice bodů Y a Z v této soustavě; rovnice těchto bodů budou:

$$(18b) \quad \xi''Y = \frac{1}{\xi_3 - \xi_1}B_1 + \frac{1}{\xi_1 - \xi_2}B_2 + \frac{1}{\xi_2 - \xi_3}B_3,$$

$$(18c) \quad \xi''Z = \frac{1}{\xi_1 - \xi_2}B_1 + \frac{1}{\xi_2 - \xi_3}B_2 + \frac{1}{\xi_3 - \xi_1}B_3.$$

Ustanovme ještě souřadnice bodů D_1, D_2, D_3 v soustavě $B_1B_2B_3$; pro bod $D_1 \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3} \right)$ bude výpočet tento:

Rovnice (15) násobme po řadě $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$, a sečteme je; přihlížejíce k rovnici bodu D_1 (7c), obdržíme

$$\xi \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) D_1 = \left(\frac{\xi_1}{x_1} + \frac{\xi_3}{x_2} + \frac{\xi_2}{x_3} \right) B_1 \\ + \left(\frac{\xi_3}{x_1} + \frac{\xi_2}{x_2} + \frac{\xi_1}{x_3} \right) B_2 \\ + \left(\frac{\xi_2}{x_1} + \frac{\xi_1}{x_2} + \frac{\xi_3}{x_3} \right) B_3.$$

Príslušnou hodnotu součinitelů u B_1, B_2, B_3 vyhledáme, dělíce druhou z rovnic (17) po sobě součiny x_3x_1, x_1x_2, x_2x_3 ; tím vychází nejprve

$$\frac{\xi_1}{x_1} + \frac{\xi_3x_2}{x_3x_1} + \frac{\xi_2}{x_3} = 0,$$

a z toho, připočteme-li na obou stranách $\frac{\xi_3}{x_2}$, dále

$$\frac{\xi_1}{x_1} + \frac{\xi_3}{x_2} + \frac{\xi_2}{x_3} = -\frac{\xi_3x_2}{x_3x_1} + \frac{\xi_3}{x_2} = \frac{\xi_3(x_3x_1 - x_2^2)}{x_1x_2x_3} = \frac{\xi_3x\xi_2}{x_1x_2x_3}.$$

Dělíme-li druhou rovnici (17) druhým a třetím z uvedených součinů, dostaneme podobně

$$\begin{aligned}\frac{\xi_3}{x_1} + \frac{\xi_2}{x_2} + \frac{\xi_1}{x_3} &= \frac{x\xi_1\xi_3}{x_1x_2x_3}, \\ \frac{\xi_2}{x_1} + \frac{\xi_1}{x_2} + \frac{\xi_3}{x_3} &= \frac{x\xi_2\xi_1}{x_1x_2x_3}.\end{aligned}$$

Sečtením těchto tří rovnic vychází, poněvadž $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \xi$, rovnice

$$\xi \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = \frac{x}{x_1x_2x_3} (\xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_1 + \xi_1\xi_2);$$

tudíž lze psáti hledanou rovnici bodu D_1 , vynecháme-li na obou stranách činitel $\frac{x}{x_1x_2x_3}$, ve tvaru

$$(\xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_1 + \xi_1\xi_2) D_1 = \xi_2\xi_3B_1 + \xi_3\xi_1B_2 + \xi_1\xi_2B_3$$

aneb

$$(19a) \quad \left(\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \frac{1}{\xi_3} \right) D_1 = \frac{1}{\xi_1} B_1 + \frac{1}{\xi_2} B_2 + \frac{1}{\xi_3} B_3.$$

Týmž způsobem vyhledáme rovnice bodů D_2 a D_3 , i obdržíme

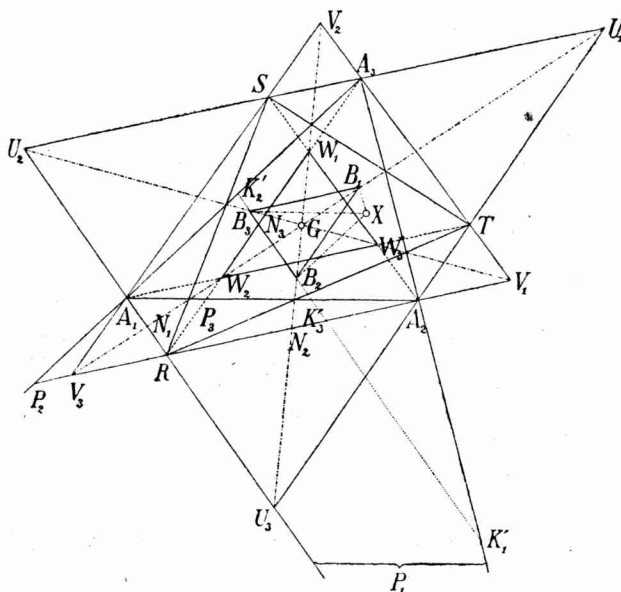
$$(19b) \quad \left(\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \frac{1}{\xi_3} \right) D_2 = \frac{1}{\xi_2} B_1 + \frac{1}{\xi_3} B_2 + \frac{1}{\xi_1} B_3,$$

$$(19c) \quad \left(\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \frac{1}{\xi_3} \right) D_3 = \frac{1}{\xi_3} B_1 + \frac{1}{\xi_1} B_2 + \frac{1}{\xi_2} B_3.$$

Výsledek, ku kterému jsme takto dospěli, můžeme vysloviti takto:

Rovnice bodů $A_1, A_2, A_3, D_1, D_3, D_2$ v soustavě $B_1B_2B_3$ obdržíme z rovnic bodů $B_1, B_2, B_3, D_1, D_2, D_3$ v soustavě $A_1A_2A_3$, položíme-li v rovnicích těch místo souřadnic x_1, x_2, x_3 bodu X souřadnice ξ_1, ξ_2, ξ_3 bodu R .

7. Než přikročíme k tomu, použití tohoto výsledku k odvození nových vět, ukážeme, jak sestrojiti bod R . Stane se to způsobem, obdobným k sestrojení bodu X , použije-li se k němu bodů B_1, B_2, B_3 . Bod X (obr. 6.) jest patrně průsečíkem tří



Obr. 6.

přímek, z nichž první jest vedena bodem B_1 rovnoběžně k straně A_2A_3 , druhá bodem B_2 rovnoběžně k A_3A_1 a třetí bodem B_3 rovnoběžně k A_1A_2 . Vedme nyní bodem A_1 rovnoběžku ku straně B_2B_3 , bodem A_2 rovnoběžku k B_3B_1 a bodem A_3 rovnoběžku k B_1B_2 ; o těchto třech rovnoběžkách dokážeme, že procházejí týmž bodem R . Budiž P_1 průsečík první z těchto přímek se stranou A_2A_3 , P_2 průsečík druhé s A_3A_1 , P_3 průsečík třetí

s A_1A_2 ; ustanovme nejprve poměry těchto bodů vzhledem k příslušným bodům základním. Pro bod P_1 uijeme dvou úměr, které plynou z toho, že přímka, vedená body B_2, B_3 , jest rovnoběžná s přímkou A_1P_1 , totiž

$$\begin{aligned} A_2P_1 : A_2A_1 &= A_2K'_1 : A_2K'_3, \\ A_3P_1 : A_3A_1 &= A_3K'_1 : A_3K'_2, \end{aligned}$$

jsou-li body K'_1, K'_2, K'_3 průsečíky přímky B_2B_3 se stranami základními A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 . Dělíme-li stejnohlé členy v těchto obou úměrách, obdržíme úměru, z níž plyne

$$\frac{A_2P_1}{A_3P_1} = \frac{A_2A_1}{A_3A_1} \cdot \frac{A_2K'_1}{A_3K'_1} \cdot \frac{A_2K'_3}{A_3K'_2}.$$

čili

$$\frac{A_2P_1}{P_1A_3} = \frac{A_1A_2}{K'_3A_2} \cdot \frac{A_2K'_1}{K'_1A_3} \cdot \frac{A_3K'_2}{A_3A_1}.$$

Rovnice průsečíků K'_1, K'_2, K'_3 určíme snadno z rovnic (5); položíme-li v nich za x_1, x_2, x_3 hodnoty souřadnic bodu B_2 , totiž x_3, x_2, x_1 a za x'_1, x'_2, x'_3 hodnoty souřadnic bodu B_3 , totiž x_2, x_1, x_3 , dostaneme

$$\begin{aligned} (x_3 - x_2) K'_1 &= (x_3x_1 - x_2^2) A_2 - (x_1x_2 - x_3^2) A_3, \\ (x_2 - x_1) K'_2 &= -(x_3x_1 - x_2^2) A_1 + (x_2x_3 - x_1^2) A_3, \\ (x_1 - x_3) K'_3 &= (x_1x_2 - x_3^2) A_1 - (x_2x_3 - x_1^2) A_2. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic ustanovíme snadno dle odd. 1. poměry

$$\frac{A_1A_2}{K'_3A_2} = -\frac{x_3 - x_1}{x_1x_2 - x_3^2}, \quad \frac{A_2K'_1}{K'_1A_3} = -\frac{x_1x_2 - x_3^2}{x_3x_1 - x_2^2}, \quad \frac{A_3K'_2}{A_3A_1} = \frac{x_3x_1 - x_2^2}{x_1 - x_2},$$

tudíž

$$\frac{A_2P_1}{P_1A_3} = \frac{x_3 - x_1}{x_1 - x_2}.$$

Podobně vyhledáme

$$\frac{A_3P_2}{P_2A_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3}, \quad \frac{A_1P_3}{P_3A_2} = \frac{x_2 - x_3}{x_3 - x_1}.$$

Z těchto rovnic vychází bezprostředně, že

$$\frac{A_2P_1}{P_1A_3} \cdot \frac{A_3P_2}{P_2A_1} \cdot \frac{A_1P_3}{P_3A_2} = 1;$$

sekou se tudíž přímky A_1P_1 , A_2P_2 , A_3P_3 v jediném bodě R . Souřadnice toho bodu r_1 , r_2 , r_3 vypočítáme dle (3a), položíme-li tu za $p_2:p_3$ hodnotu $(x_3-x_1):(x_1-x_2)$ a za $q_3:q_1$ hodnotu $(x_1-x_2):(x_2-x_3)$; tím dostaneme

$$r_1:r_2:r_3 = (x_1-x_2)(x_3-x_1):(x_2-x_3)(x_1-x_2):(x_3-x_1)(x_2-x_3).$$

I jest rovnice bodu R

$$(21a) \quad rR = \frac{1}{x_2-x_3}A_1 + \frac{1}{x_3-x_1}A_2 + \frac{1}{x_1-x_2}A_3 \\ \left(r = \frac{1}{x_2-x_3} + \frac{1}{x_3-x_1} + \frac{1}{x_1-x_2} \right).$$

Body základními A_1 , A_2 , A_3 lze vésti rovnoběžky ještě k ostatním stranám trojúhelníka $B_1B_2B_3$; celkem procházejí tedy každým z těchto bodů tři rovnoběžky. Vzájemným průsečím jich vznikají kromě bodu R další body, z nichž vytkneme nejprve ty, které jsou jako bod R společným průsečím třetí z těchto devíti rovnoběžek. Jsou to: bod S , který jest průsečím rovnoběžky vedené bodem A_1 ku straně B_1B_2 , rovnoběžky vedené bodem A_2 ku B_2B_3 a rovnoběžky vedené bodem A_3 ku B_3B_1 ; pak bod T , který jest průsečím rovnoběžky sestrojené bodem A_1 ku B_3B_1 , rovnoběžky sestrojené bodem A_2 ku B_1B_2 a rovnoběžky sestrojené bodem A_3 ku B_2B_3 .

Rovnice těchto bodů S a T ustanovíme podobně, jako jsme právě vyhledali rovnici bodu R ; i obdržíme:

$$(21b) \quad rS = \frac{1}{x_3-x_1}A_1 + \frac{1}{x_1-x_2}A_2 + \frac{1}{x_2-x_3}A_3,$$

$$(21c) \quad rT = \frac{1}{x_1-x_2}A_1 + \frac{1}{x_2-x_3}A_2 + \frac{1}{x_3-x_1}A_3.$$

Označíme-li X_∞ (x_2-x_3 , x_3-x_1 , x_1-x_2) bod přidružený v nekonečnu k bodu X , jest patrně bod R jeho bod reciproký a body S a T jsou jeho body brocardské.

Srovnáme-li rovnice (21) bodů R , S a T v soustavě $A_1A_2A_3$ s rovnicemi (18) bodů X , Y , Z v soustavě $B_1B_2B_3$, poznáváme, že tyto dvě trojice bodů sobě přísluší v tom smyslu, v jakém jsou k sobě přidruženy obě skupiny bodů, vytčené ke konci oddílu 6. Tato souvislost bodů A_1 , A_2 , A_3 , D_1 , D_3 , D_2 , X , Y ,

Z, G s body $B_1, B_2, B_3, D_1, D_2, D_3, R, S, T, G$ dovoluje nám jisté věty, týkající se některých bodů jedné skupiny, tvrditi bezprostředně o příslušných bodech skupiny druhé; důkaz takové nové věty by byl úplně totožný s důkazem věty původní, jenom by bylo třeba nahraditi v něm souřadnice ξ_1, ξ_2, ξ_3 souřadnicemi x_1, x_2, x_3 nebo naopak.

Tak jsme na př. v oddíle 4. dokázali, že příčky $A_i G$ ($i=1, 2, 3$) procházejí středy úseček $B_i X$ (obr. 3.); i můžeme dle toho tvrditi, že též příčky $B_i G$ ($i=1, 2, 3$) procházejí středy N_i úseček $A_i R$ (obr. 6.).

Jiný příklad takové přiřadenosti vět podáme v oddíle následujícím.

8. O bodech $B_1, B_2, B_3, D_2, D_3, X$ tvrdí Caspary, že leží na kuželosečce. Důkaz provedeme pomocí věty Pascalovy. Dle této věty musí se protéžší strany šestiúhelníka, jehož vrcholy jsou uvedené body, protínati ve třech bodech, ležících na téže přímce. Jsou to body: průsečík M_1 přímek $B_1 B_2$ a $D_2 D_3$; průsečík M_2 stran $B_2 B_3$ a $D_3 X$ a průsečík M_3 stran $B_3 D_2$ a $X B_1$. Barycentrické souřadnice těchto tří bodů v soustavě $B_1 B_2 B_3$ ustanovíme snadno jednak dle rovnic (5), jednak dle rovnice

(4). Položíme-li v rovnici (5c) za x_1, x_2, x_3 po řadě $\frac{1}{\xi_2}, \frac{1}{\xi_3},$

$\frac{1}{\xi_1}$ a za x'_1, x'_2, x'_3 po řadě $\frac{1}{\xi_3}, \frac{1}{\xi_1}$ a $\frac{1}{\xi_2}$ a vyměníme-li za základní body A_1, A_2, A_3 body B_1, B_2, B_3 , obdržíme rovnici bodu M_1 , totiž

$$\mu'_1 M_1 = \left(\frac{1}{\xi_3 \xi_1} - \frac{1}{\xi_2^2} \right) B_1 - \left(\frac{1}{\xi_2 \xi_3} - \frac{1}{\xi_1^2} \right) B_2$$

aneb, provedeme-li v závorkách a násobíme-li $\xi_1 \xi_2 \xi_3$, též

$$\mu_1 M_1 = - \frac{\xi_3 \xi_1 - \xi_2^2}{\xi_2} B_1 + \frac{\xi_2 \xi_3 - \xi_1^2}{\xi_1} B_2,$$

kde $\mu_1 = \mu'_1 \xi_1 \xi_2 \xi_3$.

Podobně vložíme v rovnici (5a) za x_1, x_2, x_3 hodnoty $\frac{1}{\xi_3},$

$\frac{1}{\xi_1}, \frac{1}{\xi_2}$ a za x'_1, x'_2, x'_3 hodnoty $\frac{1}{\xi_2 - \xi_3}, \frac{1}{\xi_3 - \xi_1}, \frac{1}{\xi_1 - \xi_2};$

rovnice bodu M_2 jest pak

$$\mu'_2 M_2 = \left(\frac{1}{\xi_3 (\xi_3 - \xi_1)} - \frac{1}{\xi_1 (\xi_2 - \xi_3)} \right) B_2 - \left(\frac{1}{\xi_2 (\xi_2 - \xi_3)} - \frac{1}{\xi_3 (\xi_1 - \xi_2)} \right) B_3.$$

Upravíme-li v závorkách a násobíme-li součinem $\xi_3 (\xi_1 - \xi_2) (\xi_2 - \xi_3) (\xi_3 - \xi_1)$, dostaneme

$$\mu_2 M_2 = \frac{\xi_1 \xi_2 - \xi_3^2}{\xi_1} (\xi_1 - \xi_2) B_2 - \frac{\xi_3 \xi_1 - \xi_2^2}{\xi_2} (\xi_3 - \xi_1) B_3,$$

kde $\mu_2 = \mu'_2 \xi_3 (\xi_1 - \xi_2) (\xi_2 - \xi_3) (\xi_3 - \xi_1)$.

Konečně položíme v rovnici (4) za x_1, x_2, x_3 hodnoty 0, 0, 1, za x'_1, x'_2, x'_3 hodnoty $\frac{1}{\xi_2}, \frac{1}{\xi_3}, \frac{1}{\xi_1}$, za y_1, y_2, y_3 hodnoty $\frac{1}{\xi_2 - \xi_3}, \frac{1}{\xi_3 - \xi_1}, \frac{1}{\xi_1 - \xi_2}$, za y'_1, y'_2, y'_3 hodnoty 1, 0, 0; tím nabudeme

$$\mu'_3 M_3 = \frac{1}{\xi_2 (\xi_3 - \xi_1)} B_1 + \frac{1}{\xi_3 (\xi_3 - \xi_1)} B_2 + \frac{1}{\xi_3 (\xi_1 - \xi_2)} B_3,$$

aneb násobíme-li $(\xi_3 - \xi_1) (\xi_1 - \xi_2)$, též

$$\mu_3 M_3 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_2} B_1 + \frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_3} B_2 + \frac{\xi_3 - \xi_1}{\xi_3} B_3,$$

kde $\mu_3 = \mu'_3 (\xi_3 - \xi_1) (\xi_1 - \xi_2)$.

Násobíme-li rovnici bodu M_1 rozdílem $\xi_1 - \xi_2$, rovnici bodu M_2 zlomkem $\frac{\xi_2}{\xi_3}$ a rovnici bodu M_3 výrazem $\xi_3 \xi_1 - \xi_2^2$, a sečteme-li pak všechny tři rovnice, obdržíme, majíce na pravé straně při upravení součinitele u bodu B_2 zřetí ku třetí rovnici (17), rovnici

$$\mu_1 (\xi_1 - \xi_2) M_1 + \mu_2 \frac{\xi_2}{\xi_3} M_2 + \mu_3 (\xi_3 \xi_1 - \xi_2^2) M_3 = 0,$$

t. j. body M_1, M_2, M_3 leží na téže přímce Pascalově.

Podobně lze dokázati, že body $B_1, B_2, B_3, D_2, D_1, Y$ leží na kuželosečce, jakož i že na jiné kuželosečce jsou položeny body $B_1, B_2, B_3, D_3, D_1, Z$.

Dle předcházejícího můžeme nyní bez důkazu vysloviti větu: *Body $A_1, A_2, A_3, D_3, D_2, R$ leží na kuželosečce*; podobné věty platí o bodech $A_1, A_2, A_3, D_3, D_1, S$ a o bodech $A_1, A_2, A_3, D_2, D_1, T$.

9. Zmíněnými v odd. 7. rovnoběžkami, sestrojenými body A_1, A_2, A_3 ke stranám trojúhelníka $B_1 B_2 B_3$ vznikají kromě bodů R, S, T ještě jiné body (obr. 6.); rozvrhněme je ve tři skupiny po třech. V první skupině buděť:

$$\begin{array}{lll} \text{průsečík } U_1 & \text{přímek } A_2 T \text{ a } A_3 S, \\ \text{„ } U_2 & \text{„ } A_3 S \text{ a } A_1 R, \\ \text{„ } U_3 & \text{„ } A_1 R \text{ a } A_2 T. \end{array}$$

Souřadnice těchto bodů vyhledáme pomocí rovnice (4), položíme-li v ní za $x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3$ atd. jednou hodnoty souřadnic bodů A_2, T atd., po druhé hodnoty souřadnic bodů A_3, S atd., po třetí hodnoty souřadnic bodů A_1, R atd. Tak obdržíme na př. pro bod U_1 rovnici

$$\begin{aligned} u_1 U_1 = & \begin{vmatrix} 0, & 0, & \frac{1}{x_3 - x_1} \\ \frac{1}{x_1 - x_2}, & 0, & \frac{1}{x_1 - x_2} \\ 0, & 1, & \frac{1}{x_2 - x_3} \end{vmatrix} A_1 - \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 - x_2}, & 0, & \frac{1}{x_3 - x_1} \\ 0, & 0, & \frac{1}{x_1 - x_2} \\ \frac{1}{x_3 - x_1}, & 0, & \frac{1}{x_2 - x_3} \end{vmatrix} A_2 \\ & + \begin{vmatrix} 0, & 0, & \frac{1}{x_3 - x_1} \\ \frac{1}{x_3 - x_1}, & 0, & \frac{1}{x_1 - x_2} \\ 0, & 1, & \frac{1}{x_2 - x_3} \end{vmatrix} A_3 \end{aligned}$$

čili

$$u_1 U_1 = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_1)} A_1 + \frac{1}{(x_1 - x_2)^2} A_2 + \frac{1}{(x_3 - x_1)^2} A_3.$$

Rovnici té lze dáti ještě jiný tvar, násobíme-li obě strany její součinem $(x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_1)^2$, totiž;

$$(-\xi') U_1 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_1) A_1 + (x_3 - x_1)^2 A_2 + (x_1 - x_2)^2 A_3,$$

kde součinitel na levé straně má, jak se snadno přesvědčíme, záporně vzatou hodnotu determinantu ξ' [viz rovnici (12 a)].

Podobně jest

$$\begin{aligned} & -\xi' U_2 = (x_1 - x_2)^2 A_1 + (x_3 - x_1)(x_1 - x_2) A_2 \\ & \quad + (x_3 - x_1)^2 A_3, \\ (22) \quad & -\xi' U_3 = (x_3 - x_1)^2 A_1 + (x_1 - x_2) A_2 \\ & \quad + (x_1 - x_2)(x_3 - x_1) A_3. \end{aligned}$$

Ve druhé skupině nalézají se body:

$$\begin{array}{lll} \text{průsečík } V_1 & \text{přímek } A_2 R \text{ a } A_3 T, \\ " & V_2 & " \quad A_3 T \text{ a } A_1 S, \\ " & V_3 & " \quad A_1 S \text{ a } A_2 R; \end{array}$$

rovnice jejich jsou:

$$\begin{aligned} & -\xi' V_1 = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) A_1 + (x_1 - x_2)^2 A_2 \\ & \quad + (x_2 - x_3)^2 A_3, \\ (23) \quad & -\xi' V_2 = (x_2 - x_3)^2 A_1 + (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) A_2 \\ & \quad + (x_1 - x_2)^2 A_3, \\ & -\xi' V_3 = (x_1 - x_2)^2 A_1 + (x_2 - x_3)^2 A_2 \\ & \quad + (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) A_3. \end{aligned}$$

Konečně zbývají ve třetí skupině body:

$$\begin{array}{lll} \text{průsečík } W_1 & \text{přímek } A_2 S \text{ a } A_3 R, \\ " & W_2 & " \quad A_3 R \text{ a } A_1 T, \\ " & W_3 & " \quad A_1 T \text{ a } A_2 S; \end{array}$$

rovnice těchto bodů jsou:

$$\begin{aligned} & -\xi' W_1 = (x_2 - x_3)(x_3 - x_1) A_1 + (x_2 - x_3)^2 A_2 \\ & \quad + (x_3 - x_1)^2 A_3, \\ (24) \quad & -\xi' W_2 = (x_3 - x_1)^2 A_1 + (x_3 - x_1)(x_2 - x_3) A_2 \\ & \quad + (x_2 - x_3)^2 A_3, \\ & -\xi' W_3 = (x_2 - x_3)^2 A_1 + (x_3 - x_1)^2 A_2 \\ & \quad + (x_3 - x_1)(x_2 - x_3) A_3. \end{aligned}$$

Z rovnic (22), (23) a (24) jde, že

$$U_1 + U_2 + U_3 = V_1 + V_2 + V_3 = W_1 + W_2 + W_3 = A_1 + A_2 + A_3,$$