vedně a lze je u něho obdržeti a sice první za 10 zl., druhý za 12 zl.

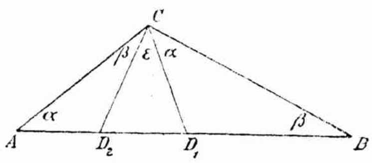
Zobecnění věty Pythagorovy pro každý trojúhelník.

Napsal

Vavřinec Jelínek,

professor v Novém Městě u Vídně.

I. Strany trojúhelníka ABC (obr. 1.) jmenujme, jak obyčejně, a, b, c a jim protilehlé úhly α, β, γ.



Obr. 1

Odečteme-li od úhlu γ směrem ku A úhel α, směrem ku B úhel β, a prodloužíme-li nová ramena až k průsečíkům D_1 a D_2 se stranou c, najdeme:

V trojúhelníku D_1CD_2 jsou úhly δ_1 ležící proti $CD_2 = d_2$, a δ_2 proti $CD_1 = d_1$ zevnějšími úhly sousedních trojúhelníků; tedy

$$\delta_1 = \alpha + \beta = 180^0 - \gamma, \quad \delta_2 = \alpha + \beta = 180^0 - \gamma,$$

pročež

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta$$

a tedy také příčky

(1) $$d_1 = d_2 = d.$$

Každý z obou trojúhelníků, omezených nerozdělenou stranou, přilehlým úsekem rozdělené strany a příslušnou příčkou d, jest pro rovnost úhlů podoben danému trojúhelníku; jsou tedy oba i sobě podobny.

(2) $$\triangle BCD_1 \sim \triangle ABC, \quad \triangle ACD_2 \sim \triangle ABC, \quad \triangle BCD_1 \sim \triangle ACD_2.$$

Nazveme-li úseky $BD_1 = c_1$ a $AD_2 = c_2$, najdeme z prvých dvou párů těchto podobných trojúhelníků úměry

$$(3) \qquad c : a = a : c_1, \quad c : b = b : c_2.$$

Jest tedy každá nerozdělená strana trojúhelníka střední měřickou úměrnou mezi celou rozdělenou stranou a jejím úsekem, přilehlým k nerozdělené straně.

Z třetí dvojice podobných trojúhelníků pak plyne

$$(4) \qquad c_1 : d_1 = d_2 : c_2$$

a poněvadž dle (1) jest $d_1 = d_2$, tvoří každá příčka d střední měřickou úměrnou obou úseků rozdělené strany.

Proměníme-li úměry (3) v rovnice:

$$a^2 = cc_1, \quad b^2 = cc_2,$$

najdeme součtem

$$(5) \qquad a^2 + b^2 = c(c_1 + c_2)$$

a součinem

$$ab = c\sqrt{c_1 c_2};$$

tedy vzhledem ku (4)

$$(6) \qquad ab = cd,$$

kterýžto vztah také přímo vychází z prvních neb druhých dvou podobných trojúhelníků uvedených v (2).

Učiníme-li $D_1D_2 = e$, jest dle obr. 1.

$$(7) \qquad c = c_1 + c_2 + e.$$

Z rovnice této obdržíme, násobíme-li ji hodnotami c_1, c_2 neb c:

$$\begin{aligned} cc_1 &= c_1^2 + c_1c_2 + c_1e, \\ cc_2 &= c_2^2 + c_1c_2 + c_2e, \\ c^2 &= cc_1 + cc_2 + ce \end{aligned}$$

a vůči úměrám (3) a (4)

$$(8) \qquad \begin{aligned} a^2 &= c_1^2 + d^2 + c_1e, \\ b^2 &= c_2^2 + d^2 + c_2e, \\ c^2 &= a^2 + b^2 + ce. \end{aligned}$$

V prvních dvou rovnicích poznáváme hned na první pohled větu Carnotovu; jesti e dvojím průmětem strany d na c_1 i na c_2.

Smysl třetí rovnice (8) seznáme takto: Vyměnivše v součinu ce přímku c dle (6), obdržíme

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab \cdot \frac{e}{d} \tag{9}$$

a z trojúhelníka D_1CD_2, kde

$$\varepsilon = \gamma - (\alpha + \beta) = \gamma - (180^0 - \gamma) = 2(\gamma - 90^0),$$

najdeme

$$\frac{e}{d} = 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} = -2 \cos \gamma,$$

takže ona rovnice zní

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \tag{10}$$

Jest tedy i třetí rovnice v (8) větou Carnotovou. Hodnota posledního členu jejího jest v našem případě pro $\gamma > 90^0$ ovšem kladná.

Správnost rovnic (1) až (6) není nijak podmíněna velikostí úhlu γ. Rovnice tyto platí tedy pro každý trojúhelník.

V rovnicích (7) až (9) jest však pro hodnotu přímky

$$e = -2d \cos \gamma$$

rozeznávati různé případy:

a) Je-li $\gamma > 90^0$, jako v našem obrazci, jest e kladné; úseky c_1 a c_2 souvisejí přímkou e. Pro tento případ platí horní rovnice.

b) Je-li $\gamma = 90^0$, jest $e = 0$; úseky c_1 a c_2 souvisejí jen svými konci, příčky d_1 a d_2 splývají v jedinou a to ve výšku na přeponu. Rovnice (7) až (9) znějí pak:

$$c = c_1 + c_2,$$
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

c) Je-li $\gamma < 90^0$, jest e záporné; úseky c_1 a c_2 částečně se kryjí a horní rovnice se mění na

$$c = c_1 + c_2 - e,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - ce,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - ab \frac{e}{d}.$$

Odvození Pythagorovy věty podmíněno je tím, lze-li jedinou příčkou odečísti dva úhly trojúhelníka od úhlu třetího. Neomezujeme-li toto odčítání počtem odčítacích příček, nýbrž odečteme-li vůbec, shledáme, že Pythagorova věta ve všech svých výrocích platí pro každý trojúhelník. I zdánlivě různící se věty

$$a^2 + b^2 = c^2,$$
$$a^2 + b^2 = c(c_1 + c_2)$$

jsou totožné, vyslovíme-li je takto:

„Součet čtverců nad dvěma stranami trojúhelníka se rovná obdélníku ze strany třetí a součtu obou jejích úseků."

II. Ježto v předešlém uvedeno bylo několik posud neobvyklých úseček c_1, c_2, d, e, ukážeme ještě, jak lze jich použiti při řešení trojúhelníka.

$$\sin\gamma = \sin\left(\frac{\varepsilon}{2} + 90^0\right) = \cos\frac{\varepsilon}{2} = \frac{v}{d} = \frac{v}{\sqrt{c_1 c_2}}$$
$$= \frac{\sqrt{4d^2 - e^2}}{2d} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4c_1c_2 - e^2}{c_1 c_2}},$$

kde v znamená výšku na c. Pak

$$\cos\gamma = \cos\left(\frac{\varepsilon}{2} + 90^0\right) = -\sin\frac{\varepsilon}{2} = -\frac{e}{2d}$$
$$= -\frac{e}{2\sqrt{c_1c_2}} = -\frac{c - c_1 - c_2}{2\sqrt{c_1c_2}},$$

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c = \sqrt{c_1} : \sqrt{c_2} : \sqrt{c},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2} = \left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right) : \left(\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}\right);$$

plochy trojúhelníků $p = ABC$, $p_1 = BCD_1$, $p_2 = ACD_2$, $p_3 = D_1CD_2$ jsou v relaci

$$p : p_1 : p_2 : p_3 = c : c_1 : c_2 : e.$$

Příklad 1. Dány: c, c_1, c_2.

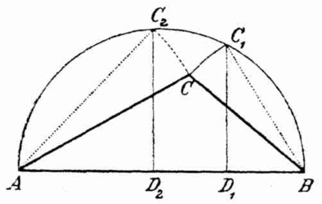
Najdeme

$$a = \sqrt{cc_1}, \quad b = \sqrt{cc_2}, \quad d = \sqrt{c_1 c_2}, \quad e = c - (c_1 + c_2),$$

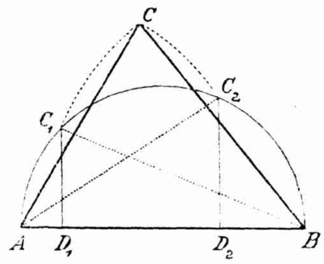
$$p = c\sqrt{s\,(s - \sqrt{c})\,(s - \sqrt{c_1})\,(s - \sqrt{c_2})}, \text{ kde } 2s = \sqrt{c} + \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}.$$

Sestrojení. Odečteme od $c = \mathrm{AB}$ protivnými směry $c_1 = \mathrm{BD}_1$ a $c_2 = \mathrm{AD}_2$. Tu rozeznávati dlužno tyto případy:

a) Oba konce D_1 a D_2 úseků c_1 a c_2 vpadají do $\mathrm{AB} = c$. (Obr. 2. a 3.) Sestrojíme nad $\mathrm{AB} = c$ jakožto průměrem polokružnici, pak $\mathrm{D}_1\mathrm{C}_1 \perp \mathrm{AB}$ a $\mathrm{D}_2\mathrm{C}_2 \perp \mathrm{AB}$ a shledáme, že $\mathrm{BC}_1 = a$, $\mathrm{AC}_2 = b$.

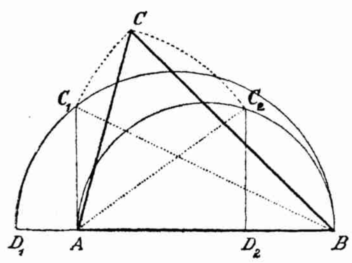


Obr. 2.

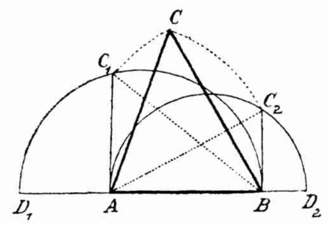


Obr. 3.

b) Jeden neb oba konce D_1 a D_2 úseků padají na prodlouženou $\mathrm{AB} = \mathrm{c}$. (Obr. 4. a 5.) Sestrojíme polokružnice nad každou



Obr. 4.



Obr. 5.

delší přímkou c, c_1, c_2 jakožto průměrem (nejkratší z nich jest již obsažena v každé delší) a pokračujeme jako v případě prvém.

Příklad 2. Dány: c_1, c_2, $\pm e$.

Vypočteme:

$$c = c_1 + c_2 \pm e, \quad a = \sqrt{c_1 (c_1 + c_2 \pm e)}, \quad b = \sqrt{c_2 (c_1 + c_2 \pm e)},$$
$$d = \sqrt{c_1 c_2}, \quad p = \frac{1}{4} (c_1 + c_2 \pm e) \sqrt{4 c_1 c_2 - e^2}.$$

Sestrojení. Je-li $e = D_2 D_1$ kladné, přičteme ku e (obr. 2.), je-li záporné $e = D_1 D_2$, odečteme od e (obr. 3.) protivnými směry úsek $c_1 = D_1 B$ a úsek $c_2 = D_2 A$. Pokaždé obdržíme $c = AB$ a pokračujeme jako v příkladě 1.

Podmínka: $c_1 c_2 > \left(\frac{e}{2}\right)^2$.

Příklad 3. Dány: a, c_1, d.

Vypočteme:

$$c_2 = \frac{d^2}{c_1}, \quad c = \frac{a^2}{c_1}, \quad b = \frac{ad}{c_1}, \quad e = \frac{a^2 - c_1{}^2 - d^2}{c_1},$$
$$p = \left(\frac{a}{c_1}\right)^2 \sqrt{s (s - a)(s - c_1)(s - d)}, \text{ kde } 2s = a + c_1 + d.$$

Sestrojení. Sestrojíme trojúhelník o stranách $a = BC$, $c_1 = BD_1$ a $d = CD_1$ (obr. 1.). Jeho úhel ležící proti a se rovná úhlu γ hledaného trojúhelníka; přeneseme jej tedy do C ku straně a.

Příklad 4. Dány: a, c_2, d.

Najdeme:

$$c_1 = \frac{d^2}{c_2}, \quad b = \frac{a}{d} c_2, \quad c = \left(\frac{a}{d}\right)^2 c_2,$$
$$p = \left(\frac{a}{d}\right)^2 \sqrt{s (s - b)(s - c_2)(s - d)},$$

kde $b = \frac{a}{d} c_2$ a $2s = b + c_2 + d$.

Sestrojení. Sestrojivše b dle úměry $d : a = c_2 : b$ neb c_1 dle $c_1 : d = d : c_2$, pokračujeme podobně jako v příkl. 3.

Příklad 5. Dány: c_1, c_2, a.

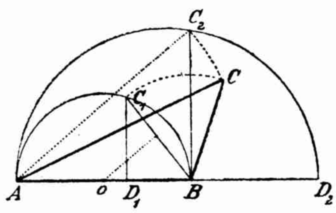
Najdeme:

$$d = \sqrt{c_1 c_2}, \quad b = a \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}, \quad c = \frac{a^2}{c_1},$$
$$p = \left(\frac{a}{c_1}\right)^2 \sqrt{s (s - a)(s - c_1)(s - d)},$$

vypočítáme-li napřed d a klademe-li pak

$$2s = a + c_1 + d.$$

Sestrojení. Sestrojme pravoúhlý trojúhelník BC_1D_1 (obr. 6.) o odvěsně $BD_1 = c_1$ a přeponě $BC_1 = a$, opíšeme polokružnici, jejíž střed o leží v (prodloužené) odvěsně c_1 a obvod prochází



Obr. 6.

body B a C_1. Kružnice tato protne prodlouženou odvěsnu ještě v A. Jest $AB = c$. Nanesme pak úsek $c_2 = AD_2$ na AB a pokračujme jako v příkl. 1. b.

Příklad 6. Dány: a, b, d.

Vypočteme:

$$c = \frac{ab}{d}, \quad c_1 = \frac{ad}{b}, \quad c_2 = \frac{bd}{a},$$

$$p = (ab)^2 \sqrt{s\left(s - \frac{1}{a}\right)\left(s - \frac{1}{b}\right)\left(s - \frac{1}{d}\right)},$$

znamená-li

$$2s = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d}.$$

Sestrojení. Potřebí jen c, které dle úměry $d : a = b : c$ snadno sestrojíme.

Příklad 7. Dány: a, b, $\pm e$.

Najdeme z rovnice (8)

$$c = \frac{1}{2}\left[\pm e + \sqrt{e^2 + 4(a^2 + b^2)}\right],$$

pak

$$c_1 = \frac{2a^2}{\pm e + \sqrt{e^2 + 4(a^2 + b^2)}},$$

$$c_2 = \frac{2b^2}{\pm e + \sqrt{e^2 + 4(a^2 + b^2)}},$$

$$d = \frac{2ab}{\pm e + \sqrt{e^2 + 4(a^2 + b^2)}}.$$

Vypočítavše stranu c, použijeme pro plochu vzorce Heronova

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Sestrojení. Jedná se jen o stranu c, kterou sestrojíme dle

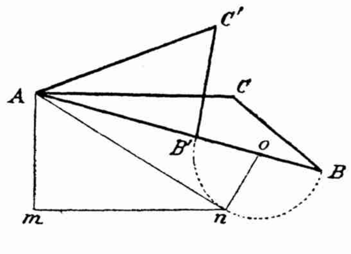
$$c = \sqrt{(a^2+b^2) + \left(\frac{e}{2}\right)^2} \pm \frac{e}{2}.$$

V obr. 7. jest $Am = a$, $mn = b$, $Am \perp mn$, tedy

$$An = \sqrt{a^2 + b^2};$$

pak $no \perp An$, $no = \frac{e}{2}$, tedy

$$Ao = \sqrt{a^2 + b^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2}.$$



Obr. 7.

Opíšeme-li ještě kolem o kružnici o poloměru $\frac{e}{2}$, dostaneme obě strany: delší $c = AB$, kratší $c' = AB'$.

Příklad 8. Dány: c, d, e.

Strany a a b obdržíme řešením rovnic (6) a (8):

$$a = \frac{1}{2}\left[\sqrt{c(c+2d-e)} \pm \sqrt{c(c-2d-e)}\right] = b;$$

$$p = \frac{c}{4}\sqrt{(2d+e)(2d-e)}.$$

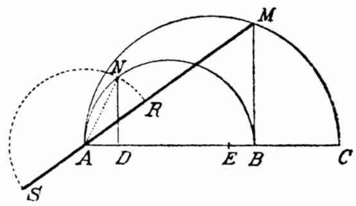
Sestrojení stran a a b provedeme dle vzorce

$$\sqrt{\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}-\frac{e}{2}+d\right)} \pm \sqrt{\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}-\frac{e}{2}-d\right)}.$$

V obr. 8. jest $AB = \frac{c}{2}$, $BE = \frac{e}{2}$, $CE = DE = d$;

tedy

$$AC = \frac{c}{2} - \frac{e}{2} + d, \quad AD = \frac{c}{2} - \frac{e}{2} - d.$$



Obr. 8.

Sestrojíme-li polokružnice o průměrech AC a AB a protneme-li je kolmicemi BM $\perp$ AC a DN $\perp$ AB, bude tětiva

$$AM = \sqrt{\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}-\frac{e}{2}+d\right)}$$

a tětiva

$$AN = \sqrt{\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}-\frac{e}{2}-d\right)},$$

pročež MS jest delší, MR kratší stranou z obou a a b.

Podmínky: $2d > e$, $c > (2d+e)$.

Kdyby byla přímka e záporná, změnil by se ovšem obvod, nikoliv však plocha p trojúhelníka.