Fotogrammetrické konstrukce. *)

Napsal

B. Procházka,
ředitel realky v Náchodě.

Úkolem perspektivy jest sestrojovati průměty centralné vyhovující určitým podmínkám, je-li předmět zobrazení přesně určen aneb jiným zákonitým obrazem vyjádřen. Tak se sestrojuje perspektivný obraz pomocí methody průsečné z daného půdorysu a nárysu; aneb z jediného obrazu orthogonalného s příslušnými souřadnicemi, na př. z kotovaného situačního plánu.

Ve fotogrammetrii vyskytuje se však úkol opačný, totiž z fotografického obrazu perspektivného určiti přesně předmět zobrazený aneb odvoditi kotovaný obraz situační. Jediný obraz fotografický k tomuto určení nestačí, jest zapotřebí dvou takových obrazů. Jinak jest tomu při zobrazování předmětů známých, kde právě známost, na př. úhlů a poměru délek na předmětu se vyskytujících, nahrazuje obraz perspektivný.

Pojednejme především o vztazích vyskytujících se při odvození průmětu perspektivného z průmětu orthogonalného a prozkoumejme napřed případ obecný, jaký se ve fotogrammetrii často vyskytuje, kdy perspektivná průmětna jest nakloněna k orthogonalné průmětně horizontalní.

1. Vztah mezi orthogonalným a perspektivným průmětem bodu.

---

* Slovutný pan professor na c. k. české vysoké škole technické *František Müller*, zabývaje se pracemi fotogrammetrickými, shledal, že mnohé konstrukce fotogrammetrické zakládají se na výkonech deskriptivní geometrie a že je do jisté míry lze považovati za zobecnění obvyklých konstrukcí této nauky, zejména perspektivy.

Odevzdav mně laskavě svoje velice cenné zápisky, přenechal mně jejich spracování, jež tuto uvádím. —

V orthogonalné průmětně horizontální M, kterou rovinou základní zváti budeme, máme v přímce M stopu roviny perspektivné R, a v přímce $M' \parallel M$ pak stopu roviny R_s, procházející středem s centralného promítání a rovnoběžné s rovinou R. Bod s_1 jest orthogonalným průmětem středu promítání do průmětny M, jehož výška ζs nad rovinou základní jest dána. Osa (optická) perspektivného promítání O, obsahující střed promítání s a kolmá ku průmětně R, má svůj orthogonalný průmět v přímce O_1, procházející průmětem $s_1 a$ kolmé ku stopě M.

Je-li dán nějaký bod a svým orthogonalným průmětem a_1 a výškou svou ζa, sestrojíme příslušný průmět centralný *) do roviny R jakožto průsečík paprsku centralně promítajícího sa s touto průmětnou. Za tím účelem, nechceme-li použiti žádného jiného pomocného obrazu orthogonalného, položme promítajícím paprskem sa rovinu svislou jakožto orthogonalně promítající do roviny základní a sklopme ji kolem průmětu $s_1 a_1$ jakožto její stopy do této průmětny. Vyhledejme průsečnici této roviny svislé s průmětnou R, kteráž bude rovnoběžna s průsečnicí téže roviny s rovinou R_s, již ve sklopení sestrojíme, jest-li bod m', ve kterém průmět $s_1 a_1$ protíná stopu M' spojíme se současně sklopeným středem promítání s. (Sklopený střed obdržíme, učiníme-li $ss_1 \perp s_1 a_1$ a $s_1 s = \zeta s$.) Proto vedouce ve sklopení průsečíkem m průmětu $s_1 a_1$ s přímkou M rovnoběžku ku přímce $m's$, obdržíme sklopenou průsečnici roviny R se svislou rovinou promítající přímky sa. Tato průsečnice protíná pak sklopený promítající paprsek sa v bodu a_2, který jest sklopeným centralným průmětem bodu a do roviny perspektivné R.

Spustíme-li kolmici s bodu a_2 na průmět $s_1 a_1$, obdržíme v patě její orthogonalný průmět a_{2_1} tohoto centralného průmětu a_2 a v délce $a_2 a_{2_1}$ výšku ζa_2 centralného průmětu a_2 nad rovinou základní.

Sklopíme-li centralnou průmětnu R kolem stopy M do základní roviny, obdržíme ve sklopení sklopený průmět a_2, který zkrátka (a_2) označovati budeme. Tento bod (a_2) obdrželi bychom

*) Tento průmět zoveme centralným, jelikož za příčinou zjednodušení konstrukcí nebudeme přihlížeti k podmínkám perspektivného zobrazování.

také tak zvaným klinogonalným promítáním v pravém tvaru a proto toto sklopení roviny R nazývati budeme *klinogonálným promítáním v pravém tvaru* na rozdíl od sklopení orthogonalně promítajících rovin centralně promítajících paprsků ku př. paprsku sa. Abychom klinogonalný průmět v pravém tvaru (a_2) bodu a obdrželi, použijeme souvislosti příbuznosti, ve které se nalézá s průmětem orthogonalným a_{2_1}. Stačí, jak známo, znáti sklopení jediného bodu roviny R a za takový nejlépe zvolíme hlavní bod o průmětny této, ve kterém protíná optická osa O tuto rovinu. Sestrojujíce tento bod, položme osou O rovinu svislou orthogonalně promítající, která protíná roviny R a R_s ve přímkách E a E_s taktéž spolu rovnoběžných. (Stopa m přímky E nalezá se ve stopě M a stopa m' ve stopě E_s ve stopě M'.)

Sklopíme-li tuto promítající rovinu, obdržíme $E \parallel E_s$, k níž bodem s vedeme kolmici O protínující přímku E v bodu o, jehož orthogonalný průmět o_1 a klinogonalný průmět (o_2) snadno sestrojíme. Spojíme-li pak o_1 s a_{2_1}, protne tato přímka stopu M v bodu ^1m který spojen se sklopeným (o_2) dává přímku, protínající přímku $a_{2_1}(a_2) \perp M$, udávající směr příbuznosti, v bodu (a_2). —

Při sestrojení průmětu (a_2) můžeme však také přijíti jinou cestou k cíli. Na místě abychom odvozovali z daného průmětu orthogonalného průmět a_{2_1} a z toho pak průmět (a_2), sestrojíme centralný průmět bodu a z téhož středu centralného promítání s do roviny základní, který a_3 znamenati budeme. Průmět tento a_3 jest prvou stopou centralně promítajícího paprsku, kterou obdržíme hned při sklopení orthogonalně promítající roviny tohoto paprsku.

Jelikož dva průměty centralné téhož předmětu z téhož středu promítání do dvou různých rovin jsou v souvislosti kollinearné, při níž jest průsečnice obou rovin průmětných osou a střed promítání středem kollineace, budou i průměty a_3, a_2 bodu a v centralné kollineaci, pro stopu M jakožto osu a střed s jakožto střed kollineace. Stopa M_s jest jednou a přímka R'_s t. j. průsečnice roviny R_s s rovinou $M_s \parallel M$ jest druhou osou centralnou, t. j. přímkou, jíž v této kollinearné závislosti v druhé rovině přísluší přímka úběžná (nekonečně vzdálená).

Tento vztah zůstane, i když rovinu průmětnou R klinogonalně v pravém tvaru promítneme do roviny základní čili když sklopíme rovinu R kol stopy M do této roviny základní. Středem kollineace jest pak klinogonalný průmět v pravém tvaru (s) středu promítání s a osou kollineace zůstane stopa M.

Stopa M' zůstane jednou osou centralnou a průmět klinogonalný (R'_2) osy centralné R' jest druhou osou centralnou této kollineace rovinné.

Na základě této kollineace sestrojíme tedy průmět (a_2) takto: Průmět (a_2) leží jednak na kollinearném paprsku $(s)a_3$, jinak na přímce (L_2), která jest kollinearně sdružena s některou přímkou L_3 vedenou bodem a_3. Ona přímka (L_2) protíná se s přímkou L_3 na ose kollineace t. j. v průsečíku l přímky L_3 se stopou M a jest rovnoběžna ku kollinearnému paprsku $(s)l'$ příslušícímu bodu l', v němž L_3 protíná centralnou osu M', jakožto bodu, jemuž přísluší úběžný (nekonečně vzdálený) bod téhož paprsku.

Můžeme však na místě libovolné přímky L_3 vzíti pohodlněji taktéž průmětem a_3 procházející, sklopený paprsek promítající, sa anebo také průmět jeho s_1a_1 a dospěti touž konstrukcí ku průmětu (a_2). Z bodu (a_2) můžeme pak na základě souvislosti příbuznosti odvoditi průmět a_{2_1}. Tak jako jsme sestrojili ku a_3 respekt. a_1 příslušný průmět (a_2) jakožto průsečík paprsku kollinearního $(s)a_3$ a přímky (L_2), můžeme sestrojiti ke každému jinému bodu bod kollinearně sdružený a naopak ku každému (a_2) příslušné průměty (a_{2_1}) a a_3.

Jak patrno jsou body a_3, (a_2), a_{2_1} v té vzájemné závislosti, že je-li dán jeden, lze druhé dva určiti. Zřejmo však, že nelze úplně určiti polohu průmětu a_1 z pouhého průmětu a_3 nebo (a_2) nebo a_{2_1}, jelikož jsou tyto dva body společny vždy jednomu paprsku.

Ku sestrojení bodu (a_2) můžeme však také užiti bodů kollinearně združených (o_2) a o_3. Stopu p osy O obdržíme tam, kde se sklopená tato osa se svým průmětem O_1 protíná. Jelikož tento bod p můžeme pokládati za bod o_3 příslušící hlavnímu bodu o v rovině R, můžeme tento odvoditi z onoho.

Sestrojíme-li bodem $p = o_3$ libovolnou přímku K_3 v rovině M přísluší jí v rovině R kollinearně sdružená jiná přímka (K_2), kteráž s ní se v průsečíku k jejím se stopou M protínajíc jest rovnoběžna ku spojnici průsečíku k' přímky K_3 a stopy M' s průmětem (s). Kde tato přímka protíná O_1, jakožto kollinearný paprsek (s) o_1, tam obdržíme průmět (o_2).

Opačně možno, je-li dán průmět (o_2), určiti bod $p \equiv o_3$, spojíme-li bod (o_2) s libovolným bodem k přímkou (K_2) a sestrojme bodem (s) rovnoběžku k této přímce, která protne stopu M v bodu k', určujícím s bodem k přímku K_3, kteráž O_1 v hledaném bodě p protíná.

Také lze sestrojiti, jak ze souvislosti těchto průmětů patrno, průmět o_1, jest-li k' spojíme s s_1 a bodem k vedeme ku této spojnici rovnoběžku K_1, která protíná O_1 v bodu o_1. Cestou opáčnou lze pak sestrojiti z bodu o_1 bod p. Tento vzájemný vztah mezi body o a p nám usnadní konstrukce, při kterých bod tento se nalézá mimo meze nákresny.

Vraťme se ještě jednou ku promítání libovolného bodu a do roviny R.

Jest zřejmo, že úloha z průmětu (a_2) nebo a_3 určiti průmět a_1 jest neurčita a že musí býti dána ještě jedna podmínka bod a určující. Takovou podmínkou jest známost výšky ζa bodu a nad rovinou základní.

Mějme na zřeteli orthogonalně promítající rovinu paprsku sa příslušného bodu a. Nechť jest délka $\overline{s_1 s}$ kolmá ku průmětu $s_1 a_1$ a rovná výšce ζs středu promítání nad rovinou základní; $\overline{s_1 a_{2_1}}$ jest rovno vzdálenosti průmětu a_{2_1} od průmětu s_1 a $\overline{a_{2_1} a_2} \perp s_1 a_3$ jest rovná výšce průmětu a_2 nad rovinou základní.

Spojíme-li bod s s bodem a_2 obdržíme průmět a_3 v průsečíku paprsku sa_2 s přímkou $s_1 a_1$, vlastně s rovinou základní. Bod a_3 může však býti dán jako podmínka základní, tak že se bezprostředně délka $s_1 a_3$ při konstrukci použije.

Je-li dále známa výška ζa bodu a, naneseme ji, abychom sestrojili bod a a jeho orthogonalný průmět a_1 na výšku $s_1 s$ bodu s od průmětu s_1 až do bodu (a) a vedeme bodem tímto rovnoběžku ku $s_1 a_1$, kteráž přímku sa_3 protíná v hledaném bodu a; sestrojíme-li $aa_1 \perp s_1 a_3$ obdržíme průmět a_1 bodu a.

Poněvadž se přímky $(a)\,a$ a sa_3 protínají obyčejně pod příliš malým úhlem, nahrazuje se za příčinou docílení větší přesnosti tato konstrukce výpočtem.

Položíme-li jako dříve

$$\overline{ss_1} = \zeta s, \quad \overline{aa_1} = \zeta a, \quad \overline{a_2 a_{2_1}} = \zeta a_1,$$

a vedle toho

$$\overline{s_1 a_3} = \delta, \quad \overline{a_{2_1} a_3} = \delta', \quad \overline{s_1 a_{2_1}} = \delta - \delta' = \Delta$$

a

$$\overline{s_1 a_1} = x,$$

pak bude jak snadno lze odvoditi

$$\zeta s : \zeta a = \delta : (\delta - x).$$

Z úměry té plyne

$$x = \delta - \frac{\zeta a}{\zeta s} \delta = \delta \frac{\zeta s - \zeta a}{\zeta s}.$$

Dále však lze odvoditi úměru

$$(\zeta s - \zeta a_2) : \Delta = (\zeta s - \zeta a) : x,$$

z kteréž plyne

$$x = \frac{\zeta s - \zeta a}{\zeta s - \zeta a_2} \Delta.$$

Také i konstruktivně lze přesněji docíliti bodu a, naneseme-li na $s_1 s$ výšku ζs místo jednou několikráte; a zvětšíme-li i délku $s_1 (a)$ právě tolikráte, obdržíme při téže konstrukci bod a přesněji.

Je-li $\zeta a = \zeta s$, t. j. je-li paprsek promítající sa rovnoběžný s rovinou základní, pak bude $\zeta a_2 = \zeta s$ a $x = \frac{o}{o}$; poloha bodu a_1 se v tomto případě ani pomocí výšky určiti nedá.

2. *Vztahy průmětů bodů, když perspektivní průmětna jest kolma k rovině základní.*

Pro fotogrammetrii jest důležitým onen případ, kdy průmětna perspektivná jest kolma ku rovině základní Jak patrno, zjednoduší se konstrukce v tomto případě značně.

Je-li opět M stopou roviny $R \perp M$ a M' stopou roviny $R_s \parallel R$, tu bude v tomto zvláštním případě průmět orthogonalný s_1 středu promítání s nalezati se v přímce M. Přímka $O_1 \perp M$ průmětem s_1 procházející jest průmětem osy optické $O \parallel M$ a průsečík O_1 s M jest orthogonalným průmětem hlavního bodu o průmětny perspektivné. Promítneme-li tuto průmětnu klinogonalně v pravém tvaru do roviny základní, pak bude

$$\overline{o_1(o_2)} = s_1(s_2) = \zeta s.$$

Budiž a_1 orthogonalným průmětem nějakého bodu a, pak bude $s_1 a_1$ orthogonalným průmětem jeho paprsku sa. Učiníme-li nyní $s_1 s \perp s_1 a_1$ a $a_1 a \perp s_1 a_1$ a zároveň $\overline{s_1 s} = \zeta s$ a $\overline{a_1 a} = \zeta a$, pak obdržíme v přímce sa_1 kolem průmětu $s_1 a_1$ do roviny základní sklopený promítající paprsek sa.

Průmět $s_1 a_1$ protíná stopu M v bodu a_{2_1} t. j. v orthogonálném průmětu centrálného průmětu a_2. Sestrojíme-li v bodu tomto kolmici $a_{2_1} a_2$ ku $s_1 a_1$, kteráž sklopený paprsek sa v bodu a_2 protíná, obdržíme v délce $a_{2_1} a_2$ výšku ζ_{a_2} průmětu a_2 nad rovinou základnou. Klinogonalný průmět (a_2), pak obdržíme, učiníme-li $a_{2_1}(a_2) \parallel O_1$ a $\overline{a_{2_1}(a_2)} = \overline{a_{2_1} a_2}$. Přímka sa protíná průmět $s_1 a_1$ v průmětu a_3, který jest stopou paprsku sa v rovině základní.

Tohoto bodu a_3 můžeme jako v předcházejícím obecném případě (člán. 1.) užiti k tomu, abychom určili bod (a_2). Sestrojíme-li totiž bodem a_3 v rovině základní přímku L_3, protíná tato M v bodu l a stopu M' v bodu l'. Přímka (L_2) bodem l vedená rovnoběžně ku přímce $l'(s)$ protíná pak paprsek kollinearný $(s)\, a_3$ v hledaném průmětu (a_2). Určení bodu a_1, jsou-li a_{2_1}, (a_2) nebo a_3 z dané výšky ζ_a jest totéž jako v uvedeném případě obecném (člán. 1.).

3. *Vztahy mezi průměty přímky.*

Budiž opět perspektivná průmětna R dána stopou M v rovině základní a stopou M' roviny $R_s \parallel R$, obsahující střed promítání s, který jest určen svým orthogonalným průmětem s_1 a výškou ζ_s. Na základě tohoto určení, lze také sestrojiti průmět (s) středu promítání.

Přímka P, jejíž perspektivný průmět P_2 do roviny R hledáme, budiž určena dvěma body a a b, jichž výšky ζ_a, ζ_b jsou dány. Těmto bodům příslušné průměty a_3, b_3 sestrojíme způsobem v předcházejícím článku uvedeným. V bodech s_1 a a_1 sestrojíme kolmice $s_1 s$, $a_1 a$ ku průmětu $s_1 a_1$ a naneseme na ně $\overline{s_1 s} = \zeta_s$, respektive $\overline{a_1 a} = \zeta_a$; pak přímka sa protne $s_1 a_1$ ve hledaném průmětu a_3. Právě tak sestrojen průmět b_3. Přímka spojující tyto dva průměty a_3 a b_3 jest pak centrálným průmětem P_3 přímky P do roviny základní.

Padne-li průmět některého z těchto dvou bodů, k. př. bodu b, mimo nákresnu, možno vždy pomocí známých planimetrických konstrukcí průmět P_3 sestrojiti jakožto přímku procházející průmětem a_3 a průsečíkem přímek $s_1 b_1$ a sb.

Známe-li tento průmět centrálný přímky P_3, můžeme sestrojiti dle konstrukce v předcházejícím článku uvedené ku průmětům a_3 a b_3 příslušné průměty (a_2), a_{2_1} a (b), b_{2_1} a tím i průměty (P_2), P_{2_1}. Pro kontrolu správnosti konstrukce máme, že přímky $(a_2)\, a_{2_1}$ a $(b_2)\, b_{2_1}$ jsou vždy kolmy ku stopě M. Průmět (b_2) můžeme sestrojiti též bez průmětu b_3, když by na př. tento průmět vypadl mimo meze nákresny. Dle způsobu uvedeného ve článku 1., vedeme průsečíkem k průmětu $s_1 b_1$ se stopou M rovnoběžku $k\,(b_2)$ ku spojnici průsečíku k' téhož průmětu se stopou M', s průmětem (s); stejně můžeme užiti přímky $s_1 b_1$, taktéž průmětem b_3 procházející; v průsečíku takto sestrojených přímek obdržíme průmět (b_2), Poněvadž však přímka sb prochází také bodem b_3, můžeme i této přímky tak jako průmětu $s_1 b_1$ použiti ku konstrukci bodu (b_2).

Na místě dvou libovolných bodů a a b nějaké přímky P můžeme k sestrojení průmětu (P_2) užiti výhodně ty body její, které *mají zvláštní polohu.*

.Takovými body jsou:

a) stopa m přímky P v rovině základní. Tuto stopu obdržíme, sestrojíme-li $a_1 a \perp a_1 b_1$ a $b_1 b \perp a_1 b$ a učiníme-li $\overline{a_1 a} = \zeta_a$, a $b_1 b = \zeta_b$, v průsečíku přímky ab s jejím průmětem $a_1 b_1$. Jelikož tento bod m v rovině M leží a tedy jeho průmět m_3 se s ním stotožňuje, můžeme jeho průmět (m_3) bezprostředně určiti způsobem ve článku 1. uvedeným. Sestrojíme totiž bodem $m \equiv m_3$ libovolnou přímku K_3, kteráž stopy M a M' v bodech k a k'

protíná; bodem k vedená rovnoběžka (K_1) ku přímce $k'(s)$ protíná pak kollinearný paprsek $(s)\,m$ ve hledaném průmětu (m_2). Kdybychom byli vedli bodem k rovnoběžku km_{2_1} ku přímce $k's_1$, obdrželi bychom v jejím průsečíku s paprskem s_1m_3 průmět m_{2_1}.

Jest zřejmo, že musí se mimo to bod (m_2) nalézati na průmětu (P_2) a m_{2_1} na P_{2_1}; zároveň pak musí býti přímka $(m_2)\,m_{2_1} \perp M$.

b) Jiným zvláštním bodem dané přímky P jest bod t, jehož průmět t_2 padá do průsečíku průmětu P_2 s rovinou základní. Průmět tento obdržíme v průsečíku průmětu P_2 se stopou M roviny R, jakož i s jeho průmětem orthogonalným P_{2_1}. Konečně jest zřejmo, že průmět t_2 i v průmětu P_3 se nalézati musí a tudíž průmět tento jím prochází. Jest proto $(t_2) \equiv t_{2_1} \equiv t_3$. Průmět t_1 bodu t obdržíme pak v průsečíku průmětu P_1 s průmětem $s_1t_{2_1}$ paprsku st.

c) Další zvláštní bod přímky obdržíme v průsečíku r přímky P s rovinou průmětnou R. Jest to zároveň průsečík přímky P s průmětem P_2 a proto jeho průmět $r_2 \equiv r$, a tudíž $r_{2_1} \equiv r_1$ Tedy r_1 jest zároveň v průsečíku průmětů P_1 a P_{2_1}.

Spojnice bodu r_2 s s_1 jest orthogonalným průmětem paprsku rs do roviny základní a protíná průmět P_3 v bodu r_3 to jest v průmětu centrálném bodu tohoto r do roviny základní. Spojíme-li tento průmět r_3 — na základě kollinearného vztahu mezi oběma centrálnými průměty — se středem (s) obdržíme v průmětu (P_2) průmět (s_2). Mimo to nalézají se pak průměty (r_2) a r_{2_1} na kolmici ku stopě M.

d) Zvláštním bodem jest i bod úběžný (nekonečně vzdálený) u přímky P. Tomuto úběžnému bodu u přísluší centralně promítající paprsek su, který jest s přímkou P rovnoběžný a proto jeho orthogonalný průmět $s_1u_1 \parallel P_1$. Tento průmět protíná průmět P_3 v bodu u_3 jakožto centralném průmětu bodu úběžného u do roviny základní. Z tohoto průmětu u_3 odvodíme si již známým způsobem průmět (u_2) a průmět u_{2_1}, použitím opět pomocné přímky H_3 průmětem u_3 procházející, tak jako v případech předcházejících. Rychleji dospějeme však k cíli, použijeme-li známého kollinearného vztahu mezi oběma centralnými průměty a vedeme kollinearné paprsky $(s)\,u_3$ a s_1u_3, kteréž protínají průměty (P_2)

respektive P_{2_1} v bodech (u_2) respektive u_{2_1}, kteréž mimo to nalézají se na přímce kolmé ku stopě M.

e) Zajímavým jest povšimnouti si i onoho bodu v přímky P, jehož průmět centralný v_3 jest bodem úběžným. Tomuto bodu v, jehož průmět v_3 jest úběžný bod P_3, přísluší paprsek sv, jehož průmět s_1v_1 jest rovnoběžný s P_3. V průsečíku tohoto průmětu s_1v_1 s průmětem P_1 obdržíme orthogonalný průmět v_1 bodu v, jehož výška $\zeta_v = \zeta_s$.

Abychom odvodili průmět (v_2), spojíme bod (s) s bodem úběžným v_3 čili vedeme rovnoběžku bodem (s) s průmětem P_3; v průsečíku této rovnoběžky s průmětem (P_2) obdržíme průmět (v_2). Jest zřejmo, že bod tento (v_2) se musí zároveň nalézati na centralné ose (R'_2), tedy v průsečíku přímek (R'_2) a (P_2). V průsečíku přímky s_1v_3 s průmětem P_{2_1} máme průmět v_{2_1}.

f) Konečně sluší povšimnouti si bodu w, jehož průmět w_2 jest bodem úběžným průmětu P_2. Abychom nalezli ostatní průměty tohoto bodu w, odvodíme především w_3, který se nalézá v průsečíku průmětu P_3 s paprskem kollinearným $(s)w_3$ rovnoběžným s (P_3). Bod tento w_3 se musí nalézati v centrálné ose M', kteráž obsahuje takové body roviny základní, jimž přísluší úběžné body roviny R. Z bodu w_3 odvodíme pak průměty$_1$, vedením průmětu s_1w_3.

4. *Vztahy mezi průměty přímky při svislé poloze průmětny perspektivné.*

Předpokládejme opět jako při odvozování průmětu bodu že průmětna centrálná R jest kolma k rovině základní. Budiž opět M stopou roviny R $\perp$ M, stopa M' roviny $R_s \parallel$ R obsahuje průmět s_1 středu promítání s, a (s) jest jeho klinogonalným průmětem v pravém tvaru ($s_1\,(s) \perp M$ a $s_1\,(s) = \zeta_s$). Budiž dále a_1, b_1 orthogonalným průmětem přímky P určené body a a b. Učiníme-li $a_1a \perp a_1b_1$, $b_1b \perp a_1b_1$ a $\overline{a_1a} = \zeta_a$, $\overline{b_1b} = \zeta_b$, pak přímka ab protíná a_1b_1 ve stopě m přímky w v rovině základní.

Průměty centralné a_3, b_3 bodů a a b sestrojíme právě tak jako v případech předcházejících. (Sestrojíme-li $s_1s \perp s_1a$ a $s_1s = \zeta_s$, a $s_1a \perp s_1a_1$ a $a_1a = \zeta_a$, pak přímka sa protíná s_1a_1 v bodu a_3 a tak sestrojíme i průmět b_3. Vypadá-li jeden z těchto průmětů a_3, b_3 ku př. b_3 z mezí nákresny, můžeme přece průmět P_3

určený průměty a_3 a b_3 sestrojiti, jelikož víme, že musí stopou m procházeti. Abychom sestrojili průměty (a_2) a (b_2), uvažme, že v průsečíkách průmětů s_1a_1 a s_1b_1 se stopou $M \equiv R_1$ máme průměty a_{2_1} a b_{2_1}. Sestrojíme-li v těchto bodech kolmice $a_{2_1}(a_2)$, $b_{2_1}(b_2)$ ku stopě M, protínají je centraly $(s)\,a_3$, respektive $(s)\,b_3$ v průmětech (a_2) a (b_2). Poněvadž však b_3 jak jsme předpokládali leží mimo meze nákresny, nemůžeme centrálu $(s)\,b_3$ vésti a proto ku sestrojení průmětu (b_2) užijeme jiné konstrukce. V bodu b_{2_1} vztýčíme kolmici ku s_1b_2, která protíná paprsek sb_1 v bodu b_2, a ve vzdálenosti $b_{2_1}b_2$, máme jednak souřadnici ζb_2, jakož i vzdálenost bodu b_2 od stopy M. Naneseme ji v tomto případě na kolmici v bodu b_{2_1} ku stopě M sestrojenou a obdržíme bod (b_2).

Spojnice bodů (a_2) a (b_2) jest hledaným průmětem (P_2). Jako ve všeobecném případě tak i zde všimneme si význačných bodů promítnuté přímky P.

a) Ku stopě m, právě tak jako v předešlém článku, sestrojené, jakožto prvnímu zvláštnímu bodu přímky P, jehož průmět m_3 se s ním stotožňuje, sestrojíme bezprostředně průmět (m_2) pomocí kollinearného paprsku $(s)\,m$, která průmět (P_2) protíná v hledaném průmětu. Také můžeme v průsečíku průmětu s_1m s M vztýčiti kolmici ku této stopě, která týmž bodem (m_2) prochází.

b) Bod t, v jehož průmětu t_2 protíná průmět P_2 stopu M roviny R totožnou s průmětem P_{2_1}, má svůj průmět t_{2_1} totožný s tímto průmětem a jeho průmět t_1 obdržíme pomocí průmětu $s_1t_{2_1}$ na průmětu P_1. Sestrojíme-li $t_1t \perp ab_1$ protíná tato přímku ab v bodu t, takže $t_1t = \zeta_t$.

c) Průsečík r přímky P s průmětnou R má svůj průmět r_1 v průsečíku P_1 s $P_{2_1} \equiv M$. K tomu příslušný (r_2) obdržíme, když v $r_1 \equiv r_{2_1}$ vztýčíme kolmici ku stopě M, která (P_2) v bodu (r_2) protíná, anebo sestrojíme dříve r_3 pomocí průmětu s_1r_1 a vedeme kollinearný paprsek $(s)\,r_3$, který v (P_2) týž bod (r_2) určuje.

Výška ζ_r bodu r jest bezprostředně stanovena v délce $r_1\,(r_2)$

d) Bod úběžný u přímky P má svůj průmět u_3 v průsečíku $s_1u_1 \,||\, P_1$ s P_3. Z tohoto průmětu odvodíme průmět (u_2) pomocí centraly $(s)\,u_3$. V průsečíku průmětu s_1u_1 s M máme