Rovnice tyto nalezají se též v článku výše podotknutém jmenovitě k němu poukazujeme vzhledem k řešení rovnice (54).

Chceme-li rentu R vybírati v stejných n lhůtách a sice vždy na počátku každé n-tiny doby část r, musí dle výrazu (21)

$$R = r\left(n + \frac{p}{200}(n+1)\right)$$

aneb

$$R = \frac{r}{2}\left[(n-1) + q(n+1)\right], \qquad (55)$$

kdež R značí součet hodnot částečných r převedených na konec doby, tudíž dlužno v ostatním se říditi dle vzorců (51) až (54).

Vyplácí-li se části r vždy na konci každé n-tiny doby, bude na základě vzorce (22)

$$R = r\left(n + \frac{p}{200}(n-1)\right)$$

aneb

$$R = \frac{r}{2}\left[(n+1) + q(n-1)\right], \qquad (56)$$

v kterémžto výraze má R týž význam co prvé a tudíž platí vzhledem k ostatním veličinám vzorce (51) až (54).

(Dokončení.)

Geometrie kruhu.

Pro žáky středních škol sestavil

Dr. **Karel Zahradník.**

(Dokončení části prvé.)

XVIII. Svazek kruhů.

30. Shledali jsme, že kruh třemi body úplně jest určen a že čtvrtý bod již určité podmínce vyhověti musí, má-li ležeti na kruhu, tedy že čtyřmi body kruh obecně neprochází. Dány-li jsou pouze dva body, opět kruh úplně určen není, neb dvěma body prochází kruhů celá řada a souhrn všech kruhů, jež dvěma body procházejí, nazýváme *svazek kruhů.*

Rovnice takého svazku najdeme takto:

Budiž $K_1 = 0$ zkrátka psaná rovnice kruhu

$$x^2 + y^2 - 2a_1 x - 2b_1 y + c_1{}^2 = 0 \qquad (1)$$

a podobně $K_2 = 0$ rovnice druhého kruhu

$$x^2 + y^2 - 2a_2 x - 2b_2 y + c_2{}^2 = 0. \qquad (2)$$

Tu značí

$$K_1 - \lambda\ K_2 = 0 \qquad (3)$$

opět rovnici kruhu, který prochází oběma průseky M, N kruhů K_1 a K_2, neb body průsečné leží i na jednom kruhu i na druhém kruhu, tudíž souřadnice jeho vyhovují i $K_1 = 0$ i $K_2 = 0$, tedy též rovnici

$$K_1 - \lambda\ K_2 = 0\,.$$

V rozvinutém tvaru zněla by rovnice (3) po malé proměně

$$x^2 + y^2 - 2\,\frac{a_1 - \lambda a_2}{1-\lambda}\,x - 2\,\frac{b_1 - \lambda b_2}{1-\lambda}\,y + \frac{c_1{}^2 - \lambda c_2{}^2}{1-\lambda} = 0. \qquad (4)$$

Každou hodnotou veličiny λ jest kruh úplně určen, to jest každé hodnotě za λ přísluší určitý kruh, pročež též λ parametrem příslušného kruhu nazýváme. Jelikož však λ všechny hodnoty od $-\infty$ do $+\infty$ míti může, shledáváme, že dvěma body, které za průseky dvou kruhů vždy voliti můžeme, nekonečně mnoho kruhů probíhá. Každý další bod určuje jediný kruh tohoto svazku.

Souřadnice středu kruhu, příslušného parametru λ, vysvítají z rovnice (4); jsouť

$$\xi = \frac{a_1 - \lambda a_2}{1-\lambda}$$
$$\eta = \frac{b_1 - \lambda b_2}{1-\lambda}. \qquad (5)$$

Místo středů všech kruhů dvěma body probíhajících obdržíme, vyloučíme-li z rovnic (5) parametr λ; obdržíme tu

$$\eta - b_1 = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}\,(\xi - a_1)\,, \qquad (6)$$

Z tvaru rovnice této shledáváme, že hledané místo jest přímka, která spojuje středy kruhů K_1 a K_2, což arci již též z rovnic (5) vysvítá.*) Přímku tuto nazýváme *centrálou.*

Poloměr kruhu, příslušného parametru λ, plyne z rovnice (4) a sice jest

*) O. symbolech analitické geometrie. Časopis pro pěstování mathematiky díl III. pag 95.

$$r^2 = \left(\frac{a_1 - \lambda a_2}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{b_1 - \lambda b_2}{1-\lambda}\right)^2 - \frac{c_1^2 - \lambda c_2^2}{1-\lambda}.$$

Uvedeme-li výraz tento na společného jmenovatele a píšeme-li po rozvinutí mocnosti

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = r_1^2,$$

$$a_2^2 + b_2^2 - c_2^2 = r_2^2,$$

což z rovnic (1) a (2) vyplývá, a označíme-li vzdálenost středů kruhů K_1 a K_2 písmenem d, bude

$$r^2 = \frac{r_1^2 + \lambda^2 r_2^2 + \lambda(-2a_1 a_2 - 2b_1 b_2 + c_1^2 + c_2^2)}{(1-\lambda)^2}.$$

Přičteme-li a odečteme-li do výrazu v závorce čtverce veličin a_1, a_2, b_1, b_2, obdržíme

$$r^2 = \frac{r_1^2 + \lambda^2 r_2^2 - \lambda(r_1^2 + r_2^2 - d^2)}{(1-\lambda)^2}. \tag{7}$$

Rovnici (3) můžeme též následovně geometricky vyložiti. Budiž λ určitá stálá veličina a x' y' buďtež souřadnice bodu P, neležícího na obvodu kruhu, příslušného parametru λ. Zavedeme-li souřadnice bodu P do rovnice (3), obdržíme dle čl. (13)

$$K_1' - \lambda K_2' = 0,$$

aneb

$$t_1^2 - \lambda t_2^2 = 0,$$

z čehož plyne

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\lambda}. \tag{8}$$

Rovnice tato praví, že *místo všech bodů $(x' y')$, jejichž tečny vzhledem k dvěma pevným kruhům v stálém poměru jsou, jest kruh.*

XIX. Chordála.

31. Shledali jsme, že rovnice (3) za každou hodnotu veličiny λ určitý kruh podává, jehož souřadnice určeny jsou rovnicí (5), poloměr rovnicí (7) a jejž co místo geometrické, plynoucí z rovnice (8), považovati můžeme. Přihlížejme nyní k zvláštním hodnotám,*) jaké parametr λ obdržeti může; jsouť to

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \infty, \quad \lambda = 1.$$

*) Je-li λ záporné, tu nevyskytuje se žádný zvláštní případ, třeba pouze k čl. 14. blíže přihlédnouti.

Hodnoty $\lambda = 0$ a $\lambda = \infty$ určují kruhy základné K_1 a K_2 toho svazku, za $\lambda = 1$ obdržíme

$$K_1 - K_2 = 0, \qquad (1)$$

tedy dle předcházejícího kruh, jenž probíhá průseky kruhu K_1 a K_2, body to M a N; ale dle rovnic (5) čl. 30. je střed toho kruhu úběžným bodem centrály a dle rovnice (7) čl. 30. jest poloměr jeho nekonečně velký, tedy přechází kruh tento v přímku, což též rovnice (1) podává, neboť členy stupně druhého se ruší a zbývají pouze členy stupně prvého a stálý člen. V rozvinutém tvaru zní rovnice (1)

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + (c_1{}^2 - c_2{}^2) = 0. \qquad (2)$$

Přímku tuto, již za kruh s nekonečně velkým poloměrem považovati můžeme,*) nazýváme *chordálou* **) kruhu K_1 a K_2, aneb též svazku kruhů $K_1 - \lambda K_2 = 0$.

Vzhledem k rovnici (8) vysvítá, *že místo všech bodů, jejichž tečny vzhledem k dvěma pevným kruhům se rovnají, jest přímka,* již nazýváme *chordálou.*

Porovnáme-li rovnici její (2) 's rovnicí centrály (6) čl. 30., shledáváme, že chordála na centrále kolmo stojí, ku kteréž vlastnosti se později ještě vrátíme.

Že chordála jest i tu reálnou, i když se kruhy neprotínají, vysvítá z její rovnice (1), jejíž reálnost nezávislá jest na vzájemné poloze kruhů K_1 a K_2.

32. Nebude od místa, vrátíme-li se opět k průseku dvou kruhů K_1 a K_2. I předpokládejme nyní, že rovnice kruhů K_1 a K_2 jsou stejnoměrné; ***) tu bude dle odvození

$$K_1 - K_2 = 0 \qquad (3)$$

rovnice kruhu probíhajícího průseky K_1 a K_2. Rozvineme-li rovnici tuto, obdržíme

$$z[2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + (c_1{}^2 - c_2{}^2)z] = 0. \qquad (4)$$

Body průsečné nacházejí se na jednom z těch kruhů, a na přímkách daných rovnicemi

*) Bližší vysvětlení v článku následujícím.

**) Tak pojmenoval přímku tuto Plücker, Gaultier *osou radikal,* též jmenuje se *přímkou stejných mocností* (Steiner), aneb *společnou tětivou dvou kruhů.*

***) Viz pag. 15.

$$z = 0$$

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + (c_1{}^2 - c_2{}^2)z = 0, \tag{5}$$

v němž kruh (3) se rozpadává. První z rovnic těchto značí přímku úběžnou, a ta podává body kruhové v nekonečnu, kteréž všem kruhům přísluší. Druhá leží obecně v konečnu a nazývá se chordálou, je vždy reálná, i když se kruhy neprotínají.

33. Kdyby kruhy K_1, K_2 byly soustředné, tu by bylo

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2$$

a rovnice (3) přešla by v

$$z^2 = 0. \tag{6}$$

Dle odvození značí rovnice tato rovnice přímek probíhajících body společnými dvěma kruhům. Oba kruhy mají body kruhové v nekonečnu podvojně společné, což již z toho poznáváme, že chordála splývá v případě tomto s úběžnou přímkou.

Z uvedeného vysvítá, že se dva soustředné kruhy dvakráte dotýkají *) a sice v bodech imaginárných, kruhových v nekonečnu a že tětiva styku je přímka úběžná a směrnice tečen v těchto bodech styku (asymptot) jsou dány rovnicí

$$x^2 + y^2 = 0, \tag{7}$$

již obdržíme, položíme-li $z = 0$ do rovnice $K_1 = 0$ a $K_2 = 0$. Označíme-li směr tento písmenem φ, bude

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{-1} = tg\,\varphi.$$

Směrnice tyto jmenujeme asymptotickými, neboť značí nám přímky rovnoběžné k asymptotám, procházející počátkem souřadnic. Rovnice asymptot jsou:

$$y - b = \pm \sqrt{-1}\,(x - a).$$

XX. Bod polárně sdružený k danému bodu ve svazku kruhů.

34. Rovnice svazku kruhů budiž

$$K_1 - \lambda K_2 = 0, \tag{1}$$

mimo to budiž dán bod $B(x_1 y_1)$; tu bude, označíme-li poláru

*) Srovnej Dr. *Em. Weyr* „Z novější geometrie“ ve Zprávě jedn. III. p. 17.

bodu B vzhledem ku kruhu K_1 písmenem P_1 a vzhledem ku K_2 písmenem P_2, rovnice poláry bodu B vzhledem k libovolnému kruhu příslušnému svazku

$$P_1 - \lambda P_2 = 0. \tag{2}$$

Zníť totiž rovnice poláry P_1 a P_2:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &\equiv x x_1 + y y_1 - a_1 (x + x_1) - b_1 (y + y_1) + c_1{}^2 = 0, \\ P_2 &\equiv x x_1 + y y_1 - a_2 (x + x_1) - b_2 (y + y_1) + c_2{}^2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

a podobně bude rovnice poláry kruhu příslušného parametru λ ve svazku

$$\begin{aligned} (1-\lambda) x x_1 + (1-\lambda) y y_1 - (a_1 + \lambda a_2)(x + x_1) \\ - (b_1 - \lambda b_2)(y + y_1) + (c_1{}^2 - \lambda c_2{}^2) = 0, \end{aligned}$$

kteroužto rovnici vzhledem k rovnicím (3) psáti můžeme

$$P_1 - \lambda P_2 = 0.$$

Tato rovnice však praví, že polára bodu B vzhledem ku kruhu příslušného parametru λ prochází průsekem $(P_1 P_2)$, kterýž jest nezávislý na hodnotě λ. Bod tento jmenuje se sdruženým bodem bodu B. Rovnice (2) značí nám tudíž svazek polár bodu B vzhledem ke svazku kruhu. Větu tuto můžeme též takto vysloviti.

Poláry daného bodu vzhledem ke všem kruhům svazku protínají se v jednom bodě.

35. Podobně bychom našli rovnici tečny kruhu

$$K_1 - \lambda K_2 = 0$$

v bodě základném M, označíme-li rovnici tečny tohoto bodu vzhledem ku kruhu K_1 a K_2, potažmo

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0,$$

ve tvaru

$$T_1 - \lambda T_2 = 0. \tag{5}$$

Tvar rovnice (1), (2) a (4) podává rovnost dvojpoměru, to jest svazek kruhů polár a tečen v bodě základném jsou průmětné.

(Dokončení.)