Werk

Label: Article

Jahr: 1962

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?311570321_0014|log5

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. XIV, 1—4 (1962), Beograd
Yougoslavie

SUR LES PROBLÈMES D'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE[1)]

par N. SALTYKOW, BEOGRAD

SOMMAIRE

Théorie des caractéristiques de Charpit et leurs applications. Généralisations des fonctions caractéristiques sur les équations aux dérivées partielles du second ordre. Recherches des intégrales de Cauchy. Nouvelles notions des intégrales généralisées de Lagrange des équations aux dérivées partielles du second ordre.

I. Introduction

Il s'agit dans les lignes qui vont suivre d'exposer le problème d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, dont il y a eu question dans mes travaux [1]–[4], concernant les équations d'une fonction inconnue z de deux variables indépendantes x et y de la forme:

$$r + H(x, y, z, p, q, s, t) = 0 \tag{1}$$

et l'équation compatible avec cette dernière:

$$t + \Phi(x, y, z, p, q, s) = 0. \tag{2}$$

Considérons les variables

$$z, p, q, r, s, t \tag{3}$$

comme fonctions des variables indépendantes x et y, vérifiant les relations:

$$dz = pdx + qdy, \quad dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy, \tag{4}$$

[1)] Tous les travaux publiés dans ce Tome, ont été présentés au III. Congrès des mathématiciens et physiciens de Yougoslavie au mois de septembre 1960 (reçus le 12 novembre 1962 par la Rédaction de cette Publication).

et le système suivant de quatre équations figurant à la page 111 de mon travail [3] qui vont s'écrire:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial r}{\partial x}+H_s\frac{\partial s}{\partial x}+H_t\frac{\partial t}{\partial x}+D_1 H=0,\\
&\frac{\partial r}{\partial y}+H_s\frac{\partial s}{\partial y}+H_t\frac{\partial t}{\partial y}+D_2 H=0,\\
&\frac{\partial t}{\partial x}+\Phi_s\frac{\partial s}{\partial x}+D_1\Phi=0.\\
&\frac{\partial t}{\partial y}+\Phi_s\frac{\partial s}{\partial y}+D_2\Phi=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

On avait donné dans les travaux cités, plus haut, la solution du problème de l'intégrale complète du système (1)–(2) et, d'autre part, de l'équation unique (1), ainsi que de l'intégrale générale mixte (voir [5]) de ces mêmes équations, au moyen des systèmes de Charpit et de leur intégrale générale, (v. [3], pages 118–119).

II. Application des fonctions caractéristiques

Les fonctions caractéristiques s'introduisent dans la théorie des équations aux dérivées partielles de second ordre, grâce aux équations de Charpit. Observons tout d'abord, à cette occasion, qu'il avait présenté ses recherches à L'Académie de Paris en 1784*). Elles ont exercé une grande influance sur l'évolution de la théorie des équations aux dérivées partielles, malgré que le Mémoire de Charpit ne fut retrouvé dans les Archives de l'Académie de Paris qu'en 1928 [6]. Les propriétés des intégrales des équations de Charpit et leurs généralisations ont été étudiées par l'auteur [7]. On va les appliquer dans les pages qui vont suivre.

Il existe, comme on le sait, deux genres de compatibilité des équations (1)–(2), représentés par *l'involution de l'intégrabilité complète* et l'autre *de G. Darboux–S. Lié* [1] la seconde étant le cas singulier de la première involution. Les methodes des intégrations correspondantes du système (1)–(2) sont étudiées dans mes travaux [3] et [4].

---

*) Dernièrement, dans leur Cours „Méthodes de Physique Mathématique, R. Courant et D. Hilbert, citent (t. II, Chapitre second, § 2) les équations de Charpit, en les nommant *„équations aux membres principaux égaux"*.

Remarquons tout d'abord que les deux méthodes correspondantes d'intégration citées permettent de former les *intégrales complétes* de toutes les équations aux dérivées partielles du second ordre et de leurs systémes. D'autre part, j'y avait introduit les notions *de l'intégrale générale de Lagrange* (voir [5]) celle *de l'intégrale générale mixte* (voir [5]) ainsi que *l'intégrale géneralisée de Lagrange et celle généralisée mixte.* Ces nouvelles *intégrales* que nous appelerons *généralisées*, pour les distinguer de celle *générale de Lagrange*, en diffère par le nombre de fonctions arbitraires complémentaires qui y figurent au nombre des quatre, étant cependant liées entre elles, par trois relations linéaires, par rapport aux dérivées premières des dites fonctions arbitraires complémentaires. Les deux cas mentionnés des intégrales *généralisées* et *généralisées mixtes* corespondent à la méthode exposée en [3], page 121, selon que l'équation compatible (2) implique une fonction arbitraire ou une constante arbitraire.

Enfin, le travail [4] étend *la théorie des fonctions caractéristiques* sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.

Il s'agit dans les pages qui vont suivre d'apporter aux problèmes cités plusieurs amendements importants, pour élargir le champ de leur intégration, en la réduisant toujours à celle d'équations différentielles ordinaires.

Cela étant, pour intégrer le système (1)–(2) reportons nous au système (5), pour le mettre sous la forme (7), [3] (page 112).
Si le déterminant

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & H_s - H_t \Phi_s \\ \Phi_s & 1 \end{vmatrix} = H_t \Phi_s^2 - H_s \Phi_s + 1 \gtrless 0,$$

on obtient la condition (10), [3] (page 112) *d'involution d'intégrabilité complète* du système (1)–(2). Elle va définir la fonction Φ, si cette dernière était encore inconnue. Les pages 114—117 donnent des exemples d'intégration correspondante.

Or, supposons que l'hypothése *d'involution d'intégrabilité complète* n'avait pas lieu, de sorte que l'on ait

$$H_t \Phi_s^2 - H_s \Phi_s + 1 = 0 \tag{6}$$

et que l'ensemble de la seconde et de la troisième équation du système (7), [3], (page 112), que l'on vient de citer se réduisent á une équation. On en tirera, outre la derniére condition (6), la seconde condition

$$D_1\Phi + H_t\Phi_s D_1\Phi - \Phi_s D_2 H = 0. \tag{7}$$

Dans le cas considéré, toujours le même système (7), étudié grâce aux conditions (30), [3], (page 119), invoque le système (31) (page suvante 120). Les deux systèmes obtenus (29) et (31) constituent le systèmes de Charpit dont le système correspondant d'équations différentielles ordinaires devient:

$$dx = \frac{dy}{\frac{1}{\Phi_s}} = \frac{dz}{p + \frac{1}{\Phi_s} q} = \frac{dp}{-H + \frac{s}{\Phi_s}} = \frac{dq}{s - \frac{\Phi}{\Phi_s}} = \frac{dr}{H_t D_1 \Phi - D_1 H} = \frac{ds}{-\frac{D_1 \Phi}{\Phi_s}} = \frac{dt}{-\frac{D_2 \Phi}{\Phi_s}}. \tag{8}$$

Le système obtenu, dit des caractéristiques de Charpit des équations aux dérivées partielles de second ordre (1)–(2), jouit, dans les conditions considérées, des propriétés analoques à celui des caractéristiques des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Leur théorie fut donnée par N. Saltykow (Journal de Mathématiques pures et appliquées 5e série, t. V. Paris 1899, p. 435). Il est aisé, en effet, de voir que les équations données (1)–(2), dont on cherche les solutions, donnent, elles-mêmes, les intégrales particulières des caractéristiques (8): les intégrales requises s'obtiennent, en y échangeant les zéros de leurs seconds membres par des constantes arbitraires. En second lieu, la théorie des fonctions caractéristiques des équations aux dérivées partielles du premier ordre se généralise aisément sur les équations différentielles des caractéristiques de Charpit. Supposons, donc, que l'intégrale générale des caractéristiques (8) se présente sous la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} y &= \theta\ (x, C_1, C_2, \ldots, C_5), \\ z &= F\ (x, C_1, C_2, \ldots, C_5), \\ p &= P\ (x, C_1, C_2, \ldots, C_5), \\ q &= Q\ (x, C_1, C_2, \ldots, C_5), \\ r &= R\ (x, C_1, C_2, \ldots, C_5), \\ s &= S\ (x, C_1, C_2, \ldots, C_5), \\ t &= T\ (x, C_1, C_2, \ldots, C_5), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 désignant cinq constantes arbitraires. Il n'y en a que c i n q, car l'intégrale générale des caractéristiques implique deux intégrales particuliéres, précisément, celles (1)–(2), comme l'on avait dit plus haut.

Comme les formules (9) identifient les équations différentielles (8), on a les identités suivantes:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{1}{\Phi_s},\quad \frac{\partial F}{\partial x}=P+Q\frac{\partial\theta}{\partial x}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=R+S\frac{\partial\theta}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=S+T\frac{\partial\theta}{\partial x}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=H_1 D_1\Phi-D_1 H,\ \frac{\partial S}{\partial x}=-D_1\Phi\frac{\partial\theta}{\partial x}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=-D_2\Phi\frac{\partial\theta}{\partial x}. \tag{13}$$

Supposons que la première équation (9) soit résoluble par raport à C_1, et donne:

$$\frac{d\theta}{dC_1}\lesseqgtr 0,\quad C_1=\varphi(x, y, C_2, C_3, C_4, C_5,). \tag{14}$$

Désignons le résultat de la substitution de cette dernière valeur de C_1, dans les six dernières équations (9), sous la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} z&=\Psi\ (x, y, C_2, C_3, C_4, C_5),\\ p&=P_1\ (x, y, C_2, C_3, C_4, C_5),\\ q&=Q_1(x, y, C_2, C_3, C_4, C_5),\\ r&=R_1\ (x, y, C_2, C_3, C_4, C_5),\\ s&=S_1\ (x, y, C_2, C_3, C_4, C_5),\\ t&=T_1\ (x, y, C_2, C_3, C_4, C_5). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Posons, à présent, la question, sous quelles conditions que les formules obtenues (15) représent-elles une solution du systéme (1)–(2).

Il est d'abord évident qu'il existe l'identité, grâce à la définition même de la fonction Ψ:

$$F\ (x, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5,)=\Psi\ (x, \theta, C_2, C_3, C_4, C_5). \tag{16}$$

Différentiant cette dernière identité (16) par rapport à la variable x, on a, en vertu de la première identité (10) l'identité:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\frac{1}{\Phi_s}, \tag{17}$$

les parenthéses désignant le résultat de la substitution de θ au lieu de y.

On tire de l'identité (16) une nouvele identité, en vertu de la seconde identité (10),

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) - P + \left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) - Q\right]\frac{1}{\Phi_s} = 0.$$

En éliminant de cette dernière identité la valeur (14) de C_1, on obtient l'identite

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} - P_1 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} - Q_1\right)\frac{1}{(\Phi_s)} = 0,$$

où les paranthèses, auprès de Φ_s, indiquent le résultat de l'élimination achevée.

L'identité obtenue démontre que l'égalité:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = P_1 \tag{18}$$

entraîne l'existence de la seconde égalité

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y} = Q_1. \tag{19}$$

Par conséquent, si la fonction obtenue Ψ (15) vérifie la condition (18), elle vérifiera également, de même, la condition (19).

Démontrons, à présent, les propriétés analoques de secondes dérivées de la fonction Ψ. On a, grâce aux définitions mêmes des fonctions P_1 et Q_1, les relations:

$$\left.\begin{aligned} P(x, C_1, C_2, \ldots. C_5) &= P_1(x, \theta, C_2, \ldots. C_5), \\ Q(x, C_1, C_2, \ldots. C_5) &= Q_1(x, \theta, C_2, \ldots. C_5). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Appliquant à ces dernières identités les considérations analoques aux précédentes, on obtient aisément, d'une manière analoque à [4], (v, p. 10, formules (33)) : que les identitès:

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = R_1, \frac{\partial Q_1}{\partial y} = T_1,$$

sont les conséquences de la condition

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = S_1.$$

Cela étant, introduisant les notions des fonctions caractéristiques:

$$U_i \equiv \frac{\partial\Psi}{\partial C_i} - Q\frac{\partial\theta}{\partial C_i}, \quad V_i \equiv \frac{\partial P}{\partial C_i} - S\frac{\partial\theta}{\partial C_i}, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

il est aisé de formuler le résultat suivant:

Supposons que la première équation (9) soit résoluble par rapport à C_1 (conditions (14)): les fonctions U_1 et V_1 s'annulant identiquement, tandis que les autres U_k et V_k ($k=2, 3, 4, 5,$) étant distinctes de zéro, alors le résultat de l'élimination de C_1 de deux premières équations (9) produit l'intégrale complète du systéme des équations (1)–(2).

Observation I.

Il est de même aisé, au lieu des fonctions V_i d'introduire les fonctions:

$$W_i \equiv \frac{\partial Q}{\partial C_i} - T\frac{\partial \theta}{\partial C_i}, \quad (i=1, 2, 3, 4, 5).$$

Observation II.

Les conditions $U_1=0$, $V_1=0$, dans notre première hypothèse, démontrent que la première équation (15) est une solution du systéme (1)–(2). Quant aux conditions, $U_k \gtrless 0$, $V_k \gtrless 0$, elles prouvent que la solution obtenue était une intégrale complète du systéme considéré, les conditions $V_k \gtrless 0$ ($k=2, 3, 4, 5$) dèmontrant que les constantes C_k figurant de même explicitement dans les dérivées du premier ordre des dérivées de l'intégrale obtenue. Or, il est évident que cette dernière condition n'est point indispensable pour l'existence de l'intégrale complète requise. Il est bien aisé de s'en persuader aussi sur des exemples.

Considérons, à ce fait, le système d'équations*)

$$r+\frac{s^3}{3}=0, \quad t-\frac{1}{s}=0. \tag{21}$$

Le système (8) devient ici:

$$dx=\frac{dy}{s^2}=\frac{dz}{p+s^2q}=\frac{dp}{\frac{2}{3}s^3}=\frac{dq}{2s}=\frac{dr}{0}=\frac{ds}{0}=\frac{dt}{0}.$$

L'intégrale générale des caractéristiques correspondantes devient actuellement:

$$\left.\begin{aligned} &y=C_1^2x+C_2.\\ &z=\frac{4}{3}C_1^3x^2+(C_1^2C_4+C_3)x+C_5,\\ &p=\frac{2}{3}C_1^3x+C_3, \quad q=2C_1x+C_4,\\ &r=-\frac{C_1^3}{3}, \quad s=C_1, \quad t=\frac{1}{C_1}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

*) Traité par E. Goursat (Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles de second ordre. T. II. page 60. Paris A. Hermann 1898).

Les fonctions caractéristiques s'expriment de la manière suivante:

$$U_1 \equiv 0, \quad U_2 \equiv -2C_1 x - C_4, \quad U_3 \equiv x, \quad U_4 \equiv C_1^2 x, \quad U_5 \equiv 1;$$

$$V_1 \equiv 0, \quad V_2 \equiv -C_1, \quad V_3 \equiv 1, \quad V_4 \equiv 0, \quad V_5 \equiv 0;$$

$$W_1 \equiv 0, \quad W_2 \equiv -\frac{1}{C_1}, \quad W_3 \equiv 0, \quad W_4 \equiv 1, \quad W_5 \equiv 0.$$

Éliminant la constante C_1, de deux premières équations (22), on obtient l'intégrale complète du système (21):

$$z = \frac{4}{3}(y - C_2)^{3/2}\sqrt{x} + C_3 x + C_4(4 - C_2) + C_5,$$

à quatre constantes arbitraires C_2, C_3, C_4, C_5.

Comme il est connu, l'une de propriétés fondamentales des fonctions caractéristiques est qu'elles s'annulent en même temps que leurs valeurs initiales. Cela permet de juger de valeurs des fonctions considérées d'après leurs valeurs initiales.

III. Introduction des valeurs initiales des variables

Pour profiter de propriétés qui viennent d'être indiquées des fonctions caractéristiques, introduisons dans l'intégrale générale des caractéristiques (9), au lieu des constantes arbitraires C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, les valeurs initiales, d'ailleurs complètement arbitraires, des variables paramétriques

$$y_0, z_0, p_0, q_0, s_0, \tag{23}$$

qui correspondent à la valeur initiale x_0 de la variable principale indépendante x. Soit l'intégrale générale des caractéristiques correspondantes représentées par les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
y &= \theta'(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0),\\
z &= F'(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0),\\
p &= P'(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0),\\
q &= Q'(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0),\\
r &= R'(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0),\\
s &= S'(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0),\\
t &= T'(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0).
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Il est bien entendu que toutes les valeurs initiales considérées de variables doivent appartenir au domaine de la régularité des équations étudiées (1) – (2).

Par conséquent, toutes les fonctions obtenues:

$$\theta', F', P', Q' R', S', T',$$

jouissent des propriétés telles que pour la valeur initiale de la variable indépendante principale x_0, les quatre premières et la sixième deviennent reciproquement identiques aux valeurs initiales des variables paramétriques (23); quant aux valeurs initiales des fonctions R' et T' elles deviennent identiques aux valeurs initiales de r et t, qui résultent des équations données (1) et (2).

Désignons les valeurs initiales des fonctions caractéristiques par des zéro, mis en haut: U_1^0, V_1^0, W_1^0.

On obtient de cette manière les formules:

$$\begin{aligned}
&U_1^0 \equiv -s_0, \quad U_2^0 \equiv 1, \quad U_3^0 \equiv 0, \quad U_4^0 \equiv 0, \quad U_5^0 \equiv 0;\\
&V_1^0 \equiv -s_0, \quad V_2^0 \equiv 0, \quad V_3^0 \equiv 1, \quad V_4^0 \equiv 0, \quad V_5^0 \equiv 0;\\
&W_1^0 \equiv -t_0, \quad W_2^0 \equiv 0, \quad W_3^0 \equiv 0, \quad W_4^0 \equiv 1, \quad W_5^0 \equiv 0.
\end{aligned}$$

Introduisons, au lieu de z_0 et p_0, deux nouvelles constantes respectivement b et c, liées aux précédentes par des relations

$$z_0 = b + cx_0 + y_0 q_0 + x_0 s_0$$

$$p_0 = c + y_0 s_0.$$

Désignons les fonctions caractéristiques correspondantes par des accents complémentaires. On obtient alors de nouvelles formules:

$$\begin{aligned}
&U_1'^0 \equiv q_0 - q_0 \equiv 0, \quad U_b'^0 \equiv 1, \quad U_c'^0 \equiv x_0, \quad U_4'^0 \equiv y_0, \quad U_5'^0 \equiv x_0;\\
&V_1'^0 \equiv s_0 - s_0 \equiv 0, \quad V_b'^0 \equiv 0, \quad V_c'^0 \equiv 1, \quad V_4'^0 \equiv 0, \quad V_5'^0 \equiv y_0;\\
&W_1'^0 \equiv -t_0, \qquad\quad W_b'^0 \equiv 0, \quad W_c'^0 \equiv 0, \quad W_4'^0 \equiv 1, \quad W_5'^0 \equiv y_0;
\end{aligned}$$

IV. Calcul de l'intégrale de Cauchy

Il est aisè d'appliquer les formules obtenues pour former les intégrales générales de Cauchy. Introduisons à ce fait une fonction arbitraire $\psi(y)$ et désignons par $\psi'(y)$, $\psi''(y)$ les deux premières dérivées de $\psi(y)$.

Les valeurs initiales de ces dernières fonctions deviennent:

$$z_0 = \psi(y_0), \quad q_0 = \psi'(y_0), \quad t_0 = \psi''(y_0). \tag{25}$$

Introduisant ces dernières valeurs dans les formules de l'intégrale générale des caractéristiques (24), on les écrira sous la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} y &= \Theta'\ (x, x_0, y_0, \psi(y_0), p_0, \psi'(y_0), s_0), \\ z &= F'\ (x, x_0, y_0, \psi(y_0), p_0, \psi'(y_0), s_0), \\ p &= P'\ (x, x_0, y_0, \psi(y_0), p_0, \psi'(y_0), s_0), \\ q &= Q'(x, x_0, y_0, \psi(y_0), p_0, \psi'(y_0), s_0), \\ r &= R'\ (x, x_0, y_0, \psi(y_0), p_0, \psi'(y_0), s_0), \\ s &= S'\ (x, x_0, y_0, \psi(y_0), p_0, \psi'(y_0), s_0), \\ t &= T'\ (x, x_0, y_0, \psi(y_0), p_0, \psi'(y_0), s_0), \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

où p_0 conserve sa valeur primitive arbitraire.

Il est naturel de considérer, actuellement, les fonctions caractéristiques exprimées, conformément aux formules (25), par les désignations

$$U_i'', \quad W_i''.$$

Il suffit de calculer leurs valeurs initiales qui suivent

$$U_1''^0 \equiv \psi_0' - \psi_0' \equiv 0, \qquad W_1''^0 \equiv \psi_0'' - \psi_0'' = 0,$$

car les autres valeurs des fonctions caractéristiques considérées correspondent aux constantes qui ne fiqurent pas dans l'intégrale étudiée.

Donc, pour obtenir l'intégrale requise de Cauchy qui, pour la valeur initiale de la variable indépendante principale x devienne la fonction $\psi(y)$, il reste à éliminer y_0 de deux premières équations (26) et à y substituer l'expression de p_0 qui s'exprime en fonction des valeurs initiales des variables considérées.

En effet, on tire des équations étudiées (1)–(2) les relations suivantes entre les valeurs initiales des variables

$$\left.\begin{aligned} r_0 + H\ (x_0, y_0, z_0, p_0, q_c, s_0, t_0) &= 0, \\ t_0 + \Phi\ (x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

La seconde équation (27), grâce aux formules (25) devient

$$\psi''(y_0) + \Phi\ (x_0, y_0, \psi(y_0), p_0, \psi'(y_0), s_0) = 0. \tag{28}$$

Supposant $\Phi_s \gtrless 0$, la relation obtenue se présente sous la forme

$$\varphi\left(y_0, p_0, \frac{\partial p_0}{\partial y_0}\right) = 0,$$

où la valeur de s_0 est remplacée par la dérivée $\dfrac{\partial p_0}{\partial y_0}$.

L'intégrale de cette dernière équation produit

$$p_0 = \mu(y_0, C_1'), \tag{29}$$

C_1' désignant une constante arbitraire et définit p_0 en y_0 et C_1'. Eliminant de deux premières équations (26) les deux valeurs p_0 et s_0, au moyen des formules (28) et (29), on obtient deux relations suivantes:

$$y = \theta''[x, x_0, y_0, \mu(y_0, C_1')],$$

$$z = F''[x, x_0, y_0, \mu(y_0, C_1')],$$

représentant l'intégrale requise de Cauchy, y_0 jouant le rôle d'un paramètre auxiliaire.

Appliquons la méthode exposée à la recherche de l'intégrale de Cauchy du système (21).

L'intégrale générale des caractéristiques de ce dernier système aux valeurs initiales des variables paramétriques, s'écrit de la manière suivante:

$$y = s_0^2(x - x_0) + y_0,$$

$$z = \frac{4}{3} s_0^3 (x - x_0)^2 + (p_0 + q_0 s_0^2)(x - x_0) + z_0,$$

$$p = \frac{2}{3} s_0^3 (x - x_0) + p_0, \quad q_0 = 2 s_0 (x - x_0) + q_0,$$

$$r = -\frac{s_0}{2}, \quad s = s_0, \quad t = \frac{1}{s_0}.$$

En y introduisant les expressions (25) de z_0, q_0 et t_0, on obtient

$$s_0 = \frac{1}{\psi''(y_0)}, \qquad p_0 = \int \frac{dy_0}{\psi''(y_0)} + C_1',$$

C_1' désignant la constante arbitraire. Les deux premières équations du système des caractéristiques vont s'écrire :

$$y = \frac{x - x_0}{[\psi''(y_0)]^2} + y_0,$$

$$z = \frac{4}{3} \frac{(x - x_0)^2}{[\psi''(y_0)]^3} + \left\{ \frac{\psi''(y_0)}{[\psi''(y_0)]^2} + \int \frac{dy_0}{\psi''(y_0)} + C_1' \right\} (x - x_0) + \psi(y_0),$$

y_0 étant le paramètre auxiliaire, ψ désignant une fonction arbitraire et C_1' une constante arbitraire.

L'intégrale obtenue diffère de celle donnée par E. Goursat qui n'avait pas introduit la constante arbitraire C'_1, en prennant x_0 pour une constante arbitraire. Cependant x_0 en distinction des valeurs arbitraires des variables paramétriques (23), représente la valeur donnée, constante bien déterminée de la variable indépendante principale x qui n'est pas arbitraire.

V. Intégrales généralisées de Lagrange, des équations aux dérivées partielles

Profitons, enfin, de la théorie de Charpit pour former l'intégrale générale du système (1) – (2), en généralisant la notion de l'intégrale générale donnée par Lagrange, pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre [8], sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.

Nous avons démontré dans Notre Travail [3], (page 120) que l'ntégrale générale du systéme des caractéristiques de Charpit se présente sous la forme

$$f_{k+1} = \varphi_k (f_1), \quad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{30}$$

φ_k désignant quatre fonctions arbitraires,

Le problème se pose de définir leurs valeurs de telle manière que les conditions (4) (v. page 2) soient identiquement vérifiées. Comme les équations (1)—(2) et (30) ne sont pas résolubles par rapport aux variables qui y figurent, car les fonctions φ_k sont arbitraires, on va profiter de la méthode de Lagrange de la variation des constantes arbitraires dans l'intégrale générale (9) du systéme (8). Il en résulte

$$\left.\begin{aligned} dy &= \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial \theta}{\partial C_i} dC_i, \\ dz &= \frac{\partial F}{\partial x} dx + \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial F}{\partial C_i} dC_i, \\ dp &= \frac{\partial P}{\partial x} dx + \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial P}{\partial C_i} dC_i \cdot \\ dq &= \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial Q}{\partial C_i} dC_i, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Substituons les expressions des différentielles résultant des relations (30):

$$C_{k+1} = \varphi_k (C_1); \quad dC_{k+1} = \varphi'_k (C_1)\, dC_1, \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

les formules (31) deviennent alors:

$$\left.\begin{aligned} dy &= \frac{\partial\theta}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial\theta}{\partial C_1} + \sum_{k=1}^{4}\frac{\partial\theta}{\partial C_{k+1}}\varphi'_k\right)dC_1, \\ dz &= \frac{\partial F}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial F}{\partial C_1} + \sum_{k=1}^{4}\frac{\partial F}{\partial C_{k+1}}\varphi'_k\right)dC_1, \\ dp &= \frac{\partial P}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial P}{\partial C_1} + \sum_{k=1}^{4}\frac{\partial P}{\partial C_{k+1}}\varphi'_k\right)dC_1, \\ dq &= \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial C_1} + \sum_{k=1}^{4}\frac{\partial Q}{\partial C_{k+1}}\varphi'_k\right)dC_1. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Cela étant, transformons les formules (4) (page 2) en y substituant les valeurs des variables et les derniéres différentialles (32) que l'on vient d'obtenir. On obtient de cette manière, prennant en considérations les identités (10) et (11), les nouvelles relations qui s'expriment, grâce aux désignations des fonctions caractéristiques, de la manière suivante:

$$\left(U_1 + \sum_{k=1}^{4} U_{k+1}\varphi'_k\right)dC_1 = 0,$$

$$\left(V_1 + \sum_{k=1}^{4} V_{k+1}\varphi'_k\right)dC_1 = 0,$$

$$\left(W_1 + \sum_{k=1}^{4} W_{k+1}\varphi'_k\right)dC_1 = 0.$$

Or, comme la différentielle dC_1 est distincte de zéro, on obtient les relations suivantes

$$\left.\begin{aligned} U_1 + \sum_{k=1}^{4} U_{k+1}\varphi'_k &= 0, \\ V_1 + \sum_{k=1}^{4} U_{k+1}\varphi'_k &= 0, \\ W_1 + \sum_{k=1}^{4} W_{k+1}\varphi'_k &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

qui démontrent que les quatre fonctions arbitraire $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ ne sont pas indépendantes, mais doivent vérifier les trois relations linéaires (33). De cette manière on parvient de définir l'intégrale générale de système (1)–(2) à une fonction arbitraire exprimée au moyen de quatre fonctions arbitraires, liées par trois relations linéaires de sorte qu'une seule fonction seulement reste arbitraire, á condition que la fonction Φ implique une autre fonction arbitraire, ou une constante arbitraire. Dans cette dernière hypothése l'intégrale généralisée de Lagrange serait mixte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Sur l'intégrale complète des équations aux dérivées partielles du second ordre.* Comptes rendus des Séances de L'Academie des Sciences de Paris — 12 septembra 1932.

N. Saltikov — *Metode integraljenja parcijalnih jednačina drugog reda s jednom nepoznatom funkcijom,* Glas Srpske Akademije Nauka — 19-VI-1948.

[2] *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre,* Bul. de la Classe des Sciences de l'Académie de Belgique, 5^e série XVIII — 1932 — 10.

[3] *Méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue,* Bul. de l'Académie Serbe des Sciences. Classe des Sciences Math. et Nat. S. Math. t. V. Nouv. série № 1 Beograd 1952.

[4] *Fonctions caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre,* Bul. Classe des Sciences Math. et Nat. de l'Académie Serbe des Sciences, t. X, № 2.

[5] N. Saltykow — *La théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre (en serbe),* Beograd 1952 p. p. 78, 75.

[6] *Etude Bibliographique du Mémoire inédit de Charpit,* Bul. des Sc. Mathématiques 2^e série t. IV, août 1930. et t. XI janvier 1937.

[7] Journal de Mathématiques pures et appliques, 5^e série t. III. p. 423.

[8] Lagrange — *Oeuvres Complétes,* t. X, Paris 1884, p. 354.