Werk

Label: Article

Jahr: 1960

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?311570321_0012|log23

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Bulletin de la Société des mathématiciens et physicies de la R. P. de Serbie
Vol. XII 1960) Beograd
Yougoslavie

КРЕТАЊЕ ДИНАМИЧКИ ПРОМЕНЉИВЕ ТАЧКЕ У КОНФОРМНОМ ПРОСТОРУ

ВЕЉКО А. ВУЈИЧИЋ, БЕОГРАД

Овде посматрамо кретање тачке, којој се маса мења услед отпадања и припајања честица. Такву тачку називаћемо динамички променљивом. На основу општег принципа [2] изведене су тензорске једначине кретања те тачке. За посебан случај реактивних сила и кад постоји функција силе, независна од времена, показано је постојање интеграла енергије као и то, да се динамички променљива тачка креће по геодезијским линијама у Римановом конформном простору, ако апсолутна брзина честица, и брзина кретања динамички променљиве тачке стоје у односу 1 : 2.

1. У општем случају када се тачка динамички мења услед отпадања и припајања честица, њену масу можемо одредити обрасцем

$$m = m_0 - \int_0^t \frac{dm_1}{dt}\, dt + \int_0^t \frac{dm_2}{dt} = \varphi(t),$$

а њену брзину промене са

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{dm_1}{dt} + \frac{dm_2}{dt}. \tag{1.1}$$

Кинетичку енергију изразимо у облику

$$2\,\mathrm{T} = m g_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta\,; \qquad \left(\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}\right) \tag{1.2}$$

где је $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ основни метрички тензор еуклидског, или општије Римановог простора V_n, а $\dot{x}^\alpha$ су контраваријанте координате вектора брзине кретања основне тачке.

У раду [3], у коме је овај задатак третиран за динамичку тачку чија се маса мења само услед отпадања честица, редакција часописа дала је примедбу да је исувише концизно написан. Зато се овде даје и извођење једначина кретања.

Динамичку форму, коју ћемо због тумачења у [2] назвати Pfeff-Билимовићева форма, написаћемо у облику

$$(1.3)\qquad \Phi = p_\alpha dx^\alpha - \left\{ p_\alpha \dot{x}^\alpha - T - \int_1^2 (X_\alpha + P_{1\alpha} + P_{2\alpha})\, dx^\alpha \right\} dt,$$

где су

$$(1.4)\qquad p_\alpha = m g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta = \varphi(\dot{x}, t)$$

координате импулса који поседује тачка, а

$$(1.5)\qquad P_{1\alpha} = -\frac{dm_1}{dt} u_{1\alpha} \quad \text{и} \quad P_{2\alpha} = \frac{dm_2}{dt} u_{2\alpha}$$

су коваријантне координате вектора секундног расхода и притока честица, са апсолутним брзинама отпадања u_1 и припајања u_2.

Закон градијента за променљиву x^α

$$(1.6)\qquad dp_\alpha - \partial_\alpha \Phi = 0,$$

где ∂_α означава парцијални извод $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ по координати, даје тражене једначине кретања. Заиста, диференцирајући (1.3) према (1.6), а због (1.4) и с обзиром на (1.2), после деобе са mdt добијамо:

$$g_{\alpha\beta} \ddot{x}^\beta + \frac{1}{2} (\partial_\beta g_{\alpha\delta} \dot{x}^\beta \dot{x}^\delta + \partial_\delta g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta \dot{x}^\delta - \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma) = Q_\alpha + \psi_{1\alpha} + \psi_{2\alpha}$$

јер је $\partial_\delta g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta \dot{x}^\delta = \frac{1}{2} (\partial_\delta g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\delta\alpha}) \dot{x}^\beta \dot{x}^\delta$. Са $Q_\alpha = \frac{X_\alpha}{m}$ означаваћемо коваријантне координате генералисаних активних сила, а са

$$(1.7)\qquad \psi_{1\alpha} = \frac{1}{m}\left(P_{1\alpha} - \frac{dm_1}{dt} \dot{x}_\alpha\right); \quad \psi_{2\alpha} = \frac{1}{m}\left(P_{2\alpha} - \frac{dm_2}{dt} \dot{x}_\alpha\right)$$

одговарајуће координате реактивних сила. Изједначењем немих индекса δ и γ, и користећи се Кристофеловим симболима прве $[\alpha, \beta\gamma]$ и друге $\left\{ {\delta \atop \beta\gamma} \right\}$ врсте, добијамо коваријантне једначине

$$(1.8)\qquad g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\beta}{dt^2} + [\alpha, \beta\gamma] \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = Q_\alpha \psi_{1\alpha} + \psi_{2\alpha} \overset{\text{def}}{=} \frac{\delta \dot{x}_\alpha}{\delta t},$$

а после композиције са $g^{\alpha\beta}$ и контраваријантне једначине

$$\frac{d^2 x^\delta}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = Q^\delta + \psi_1^\delta + \psi^\delta \overset{\text{def}}{=} \frac{\delta \dot{x}^\delta}{\delta t} \tag{1.9}$$

кретања динамички променљиве (услед отпадања и припајања честица) тачке у простору V_n са метриком

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta . \tag{1.10}$$

Ако се ради само о класичном кретању материјалне тачке са константном масом очигледно је да се овим путем веома лако изводе тензорске једначине кретања без претходних трансформација.

2. Диференцирањем израза за кинетичку енергију (1.2) добијамо

$$\frac{dT}{dt} = m \frac{\delta \dot{x}_\alpha}{\delta t} \dot{x}^\alpha + \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} \dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha$$

или, због (1.8), (1.7) и (1.5),

$$\frac{dT}{dt} = \left(X_\alpha - \frac{dm_1}{dt} (u_{1\alpha} - \dot{x}_\alpha) + \frac{dm_2}{dt} (u_{2\alpha} - \dot{x}_\alpha) \right) \dot{x}^\alpha + \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} \dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha \tag{2.1}$$

што представља закон кинетичке енергије динамички променљиве тачке. Ако активне силе имају функцију силе $U(x)$, независну од времена t, и ако су вектори апсолутних брзина отпадања и припајања честица колинеарни и једнако пропорционални са вектором брзине кретања основне тачке, тј. $u_{1\alpha} = \lambda \dot{x}_\alpha$ и $u_{2\alpha} = \lambda \dot{x}_\alpha$, онда (2.1) мења облик у

$$\frac{dT}{dt} = \left[X_\alpha - \frac{dm_1}{dt} (\lambda - 1) \dot{x}_\alpha + \frac{dm_2}{dt} (\lambda - 1) \dot{x}_\alpha \right] \dot{x}^\alpha + \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} \dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha$$

односно. због (1.1), у

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} + \frac{dm}{dt} (\lambda - 1) \dot{x}_\alpha \right) \dot{x}^\alpha + \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} \dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha \tag{2.2}$$

јер је

$$X_\alpha = \frac{\partial U}{\partial x^\alpha} .$$

Израз (2.2) написан у облику

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt} + \frac{dm}{dt} \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha$$

показује да за $\lambda = \frac{1}{2}$ важи интеграл енергије

$$T - U = T + V = H = \text{const.}, \tag{2.4}$$

где је V потенцијална а H тотална енергија кретања динамички променљиве тачке. Интеграл (2.4) важи у општијем случају ако је испуњен услов

$$\dot{x}_\alpha = 2\,\frac{dm_2\,u_{2\alpha} - dm_1\,u_{1\alpha}}{dm_2 - dm_1}, \tag{2.5}$$

али ћемо се у овом раду задржати на разматрање кретања тачке при условима описаних до (2.4).

3. У простору $\overline{V}_n$ с метриком

$$d\sigma^2 = 2\,(H - V)\,g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta = \overline{g}_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta \tag{3.1}$$

и коефицијентима повезаности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, за случај постојања интеграла енергије (2.4), динамички променљива тачка креће се по геодезијским линијама. Да би то доказали довољно је израчунати тензор $T^\alpha_{\beta\gamma}$, који се јавља као веза коефицијената повезаности $\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}$ простора V_n и $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ простора $\overline{V}_n$, тј.

$$\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = T^\alpha_{\beta\gamma}. \tag{3.2}$$

Због услова конформности простора $\overline{V}_n$ и V_n из (3.1), или

$$\overline{g}_{\alpha\beta} = 2\,(H - V)\,g_{\alpha\beta} \tag{3.3}$$

није тешко одредити тензор $T^\alpha_{\beta\gamma}$ ([1], [5]). У односу на услов конформности он је једнак:

$$T^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2\,(H - V)}\,(\delta^\alpha_\gamma\,\partial_\beta V + \delta^\alpha_\beta\,\partial_\gamma V - \partial_\lambda V \overline{g}_{\beta\gamma}\,\overline{g}^{\alpha\lambda}). \tag{3.4}$$

Сада једначине кретања (1.9), редом због (3.2), (3.4), (2.3), (1.2) и (1.1) се своде у простору $\overline{V}_n$ на облик

$$\frac{d\dot{x}^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\,\frac{dx^\beta}{dt}\,\frac{dx^\gamma}{dt} = -\,\frac{1}{H - V}\,\frac{dV}{dt}\,\dot{x}^\alpha - \frac{dx^\alpha}{dt}\,\frac{d}{dt}\,ln\,\sqrt{m}\,. \tag{3.5}$$