

Werk

Label: Article

Jahr: 1958

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?311570321_0010|log21

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ ФУНКЦИЈА КОЈЕ СУ НЕПРЕКИДНЕ У СВУДА-ГУСТО РАСПОРЕЂЕНИМ ТАЧКАМА

СИМОН ЋЕТКОВИЋ, БЕОГРАД

У овом раду доказаћемо две теореме које се односе на изводљивост реалних функција једне независно променљиве, које су истовремено свуда-густо прекидне и свуда-густо непрекидне.

Теорема (I): *Ако је реална функција $f(x)$, $x \in (a, b)$, свуда-густо прекидна и истовремено свуда-густо непрекидна тада постоје свуда-густо распоређене тачке у којима је функција $f(x)$ непрекидна али у њима није диференцијабилна.*

Доказ. — 1. — Нека је $f(x)$, $x \in (a, b)$, реална функција која је свуда-густо прекидна и истовремено свуда-густо непрекидна на интервалу (a, b) . Узмимо макоја два броја $c_1 \in (a, b)$ и $c_2 \in (a, b)$ и нека је $c_1 < c_2$. У вези бројева c_1 и c_2 конструисаћемо један низ бројева $\{\beta_n\}$. Обзиром да је функција $f(x)$ свуда-густо непрекидна постоји број $\alpha_1 \in (c_1, c_2)$ такав да је функција $f(x)$ непрекидна у α_1 . Узмемо ли произвољан број $\epsilon_1 > 0$ тада ће бројевима α_1 и ϵ_1 одговарати бар један број $\delta_1 > 0$ такав да буду испуњени услови:

$$(\alpha_1 - \delta_1, \alpha_1 + \delta_1) \subset (c_1, c_2),$$

$$|f(x) - f(\alpha_1)| < \epsilon_1 \text{ за } x \in (\alpha_1 - \delta_1, \alpha_1 + \delta_1).$$

Пошто је функција $f(x)$ свуда-густо прекидна постоји број $\beta_1 \in (\alpha_1 - \delta_1, \alpha_1 + \delta_1)$ такав да је функција $f(x)$ прекидна у β_1 . Броју β_1 одговара бар један број $l_1 \in (0, 2\epsilon_1)$ такав да у свакој околини броја β_1 постоји бар један број γ_1 такав да је $f(\gamma_1) - f(\beta_1) > l_1$. Сем тога је

$$f(x) - f(\beta_1) < 2\epsilon_1 \text{ за } x \in (\alpha_1 - \delta_1, \alpha_1 + \delta_1).$$

Аналогно горњем постоји број

$$\alpha_2 \in (\beta_1 - l_1, \beta_1 + l_1) \cap (\alpha_1 - \delta_1, \alpha_1 + \delta_1),$$

такав да је функција $f(x)$ непрекидна у α_2 . Узмемо ли број $\epsilon_2 > 0$, који задовољава услов $\epsilon_2 \in (0, l_1/4)$ тада ће бројевима α_2 и ϵ_2 одго-

варати бар један број $\delta_2 > 0$ који има особину

$$(\alpha_2 - \delta_2, \alpha_2 + \delta_2) \subset (\beta_1 - l_1, \beta_1 + l_1) \cap (\alpha_1 - \delta_1, \alpha_1 + \delta_1),$$

$$|f(x) - f(\alpha_2)| < \epsilon_2 \quad \text{за} \quad x \in (\alpha_2 - \delta_2, \alpha_2 + \delta_2).$$

Обзиром да је функција $f(x)$ свуда-густо прекидна постоји број $\beta_2 \in (\alpha_2 - \delta_2, \alpha_2 + \delta_2)$ такав да је функција $f(x)$ прекидна у β_2 . Броју β_2 одговара бар један број $l_2 \in (0, 2\epsilon_2)$ такав да у свакој околини броја β_2 постоји бар један број γ_2 такав да је

$$|f(\gamma_2) - f(\beta_2)| > l_2.$$

Сем тога је

$$|f(x) - f(\beta_2)| < 2\epsilon_2 \quad \text{за} \quad x \in (\alpha_2 - \delta_2, \alpha_2 + \delta_2).$$

Продужавајући на горњи начин са формирањем бројева, претпоставимо да већ имамо бројеве $\alpha_m, \epsilon_m, \delta_m, \beta_m$ и l_m , где је $m \in$ природних бројева. Уочимо затим један број

$$\alpha_{m+1} \in (\alpha_m - \delta_m, \alpha_m + \delta_m) \cap (\beta_m - l_m, \beta_m + l_m)$$

такав да функција $f(x)$ буде непрекидна у тачки α_{m+1} . Узмимо неки број $\epsilon_{m+1} > 0$ који задовољава услов

$$\epsilon_{m+1} \in (0, l_m/4). \quad (1)$$

Бројевима $\alpha_{m+1}, \epsilon_{m+1}$ одговара бар један број $\delta_{m+1} > 0$ који задовољава услове

$$(\alpha_{m+1} - \delta_{m+1}, \alpha_{m+1} + \delta_{m+1}) \subset (\beta_m - l_m, \beta_m + l_m) \cap (\alpha_m - \delta_m, \alpha_m + \delta_m), \quad (2)$$

$$|f(x) - f(\alpha_{m+1})| < \epsilon_{m+1} \quad \text{за} \quad x \in (\alpha_{m+1} - \delta_{m+1}, \alpha_{m+1} + \delta_{m+1}). \quad (3)$$

Обзиром да је функција $f(x)$ свуда-густо прекидна постоји број

$$\beta_{m+1} \in (\alpha_{m+1} - \delta_{m+1}, \alpha_{m+1} + \delta_{m+1}), \quad (4)$$

такав да је функција $f(x)$ прекидна и у β_{m+1} .

Броју β_{m+1} одговара бар један број

$$l_{m+1} \in (0, 2\epsilon_{m+1}) \quad (5)$$

такав да у свакој околини броја β_{m+1} постоји бар један број γ_{m+1} такав да је

$$|f(\gamma_{m+1}) - f(\beta_{m+1})| > l_{m+1}. \quad (6)$$

Сем тога задовољен је и услов

$$|f(x) - f(\beta_{m+1})| < 2\epsilon_{m+1} \quad \text{за} \quad x \in (\alpha_{m+1} - \delta_{m+1}, \alpha_{m+1} + \delta_{m+1}).$$

Продужавајући на овај начин формирали би бесконачан низ бројева $\{\beta_n\}$.

2. — Покажимо да је низ $\{\beta_n\}$ конвергентан. Према (2) је:

$$(\alpha_{n+1} - \delta_{n+1}, \alpha_{n+1} + \delta_{n+1}) \subset (\alpha_n - \delta_n, \alpha_n + \delta_n). \quad (7)$$

Из (4) и (7) следује да се ван интервала $(\alpha_{n+1} - \delta_{n+1}, \alpha_{n+1} + \delta_{n+1})$ може налазити највише n чланова низа $\{\beta_n\}$, односно да се скоро сви чланови низа $\{\beta_n\}$ налазе у интервалу $(\alpha_{n+1} - \delta_{n+1}, \alpha_{n+1} + \delta_{n+1})$. (8)

Из (5) следује

$$l_n \leq 2\epsilon_n, \quad (9)$$

а према (1.1)
$$\epsilon_{n+1} \leq l_n/4. \quad (10)$$

Из (9) и (10) произилази:

$$2\epsilon_n \geq 4\epsilon_{n+1}, \text{ односно } \epsilon_{n+1} \leq \epsilon_n/2. \quad (11)$$

Према (2) је

$$(\alpha_{n+1} - \delta_{n+1}, \alpha_{n+1} + \delta_{n+1}) \subset (\beta_n - l_n, \beta_n + l_n),$$

а одатле следи да је

$$\delta_{n+1} < l_n. \quad (12)$$

Из (9) и (12) произилази да је

$$\delta_{n+1} < l_n < 2\epsilon_n. \quad (13)$$

Из (11) следи да је низ

$$\{\epsilon_n\} \quad (14)$$

монотонно опадајући и нула низ, па су, тим пре, према (13), и низови $\{l_n\}$ и $\{\delta_n\}$ нула низови. Како је низ $\{\delta_n\}$ нула низ произилази да дужина интервала $(\alpha_{n+1} - \delta_{n+1}, \alpha_{n+1} + \delta_{n+1})$ тежи нули када $n \rightarrow \infty$. Из овог и тврдње (8) произилази да је низ $\{\beta_n\}$ конвергентан. Означимо његову граничну вредност са β . (15)

3. — Показаћемо сада да је функција $f(x)$ непрекидна у тачки β . Узмимо произвољно мали број $\epsilon > 0$. Како је према (14) низ $\{\epsilon_n\}$ монотонно опадајући и нула низ, произилази да он има члан $\epsilon_k < \epsilon/2$ па ће на основу (3) бити

$$|f(x) - f(\alpha_k)| < \epsilon_k < \epsilon/2 \text{ за } x \in (\alpha_k - \delta_k, \alpha_k + \delta_k),$$

а пошто је

$$\beta \in (\alpha_k - \delta_k, \alpha_k + \delta_k)$$

имамо да је

$$|f(x) - f(\beta)| < 2\epsilon_k < \epsilon, \quad \text{за } x \in (\alpha_k - \delta_k, \alpha_k + \delta_k).$$

Из овог следи да је функција $f(x)$ непрекидна у тачки $\beta \in (c_1, c_2)$.

4. — Покажимо да функција $f(x)$ не може имати коначан извод у тачки β . Кад би постојао коначан извод у тачки β он би био неки број којег ћемо означити са M . Претпоставимо сада да функција $f(x)$ има извод у тачки β то јест да је

$$\lim_{x \rightarrow \beta} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} = M. \quad (16)$$

Из претпоставке (16) следило би да произвољно малом броју $\theta \in (0, 1/2)$ одговара један број $\varphi > 0$ тако да буде испуњен услов:

$$\left| \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} - \frac{f(x_2) - f(\beta)}{x_2 - \beta} \right| < \theta, \quad \text{за } \begin{matrix} x_1 \in (\beta - \varphi, \beta + \varphi) \\ x_2 \in (\beta - \varphi, \beta + \varphi) \end{matrix}. \quad (17)$$

Покажимо да услов (17) не може бити испуњен. Уочимо β_k члан низа $\{\beta_n\}$ који задовољава услов

$$\beta_k \in (\beta - \varphi, \beta + \varphi), \beta_k \neq \beta,$$

а то можемо према (15). Према (6), (2), и (4) броју β_k одговарају три броја l_k , γ_k и λ који задовољавају услове

$$l_k > |\beta_k - \beta|, \quad \gamma_k \in (\beta - \varphi, \beta + \varphi), \quad \gamma_k \neq \beta,$$

$$\frac{\beta_k - \beta}{\gamma_k - \beta} = 1 + \lambda, \quad |\lambda| < \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{\beta_k - \beta}{f(\gamma_k) - f(\beta)} \right|.$$

Да постоје бројеви γ_k и λ јасније нам је ако приметимо да су исправне следеће (18) и (19) релације:

$$1 \neq \frac{\beta_k - \beta}{\gamma_k - \beta} \rightarrow 1, \quad \text{кад } \gamma_k \rightarrow \beta_k, \quad (18)$$

$$\left| \frac{\beta_k - \beta}{f(\gamma_k) - f(\beta)} \right| > \left| \frac{\beta_k - \beta}{2\epsilon_1} \right| = \text{const}, \quad \text{за } \gamma_k \in (\alpha_1 - \delta_1, \alpha_1 + \delta_1). \quad (19)$$

Према томе за γ_k можемо узети макоје γ_k које задовољава неједначину

$$\left| \frac{\beta_k - \beta}{\gamma_k - \beta} - 1 \right| < \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{\beta_k - \beta}{2\epsilon_1} \right|.$$

Помоћу тако узетог γ_k имамо

$$\lambda = \frac{\beta_k - \beta}{\gamma_k - \beta} - 1.$$

Ако је $f(\gamma_k) = f(\beta)$ треба место

$$|\lambda| < \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{\beta_k - \beta}{f(\gamma_k) - f(\beta)} \right|$$

узети

$$|\lambda| \in (0, \infty).$$

Из горњег произилази

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\beta_k) - f(\beta)}{\beta_k - \beta} - \frac{f(\gamma_k) - f(\beta)}{\gamma_k - \beta} \right| &= \left| \frac{f(\beta_k) - f(\beta) - (1 + \lambda)(f(\gamma_k) - f(\beta))}{\beta_k - \beta} \right| = \\ &= \left| \frac{f(\beta_k) - f(\gamma_k) - \lambda(f(\gamma_k) - f(\beta))}{\beta_k - \beta} \right| \geq \left| \frac{f(\beta_k) - f(\gamma_k)}{\beta_k - \beta} \right| - \\ &\quad - \left| \lambda \frac{f(\gamma_k) - f(\beta)}{\beta_k - \beta} \right| > 1 - 1/2 > \theta. \end{aligned}$$

Значи

$$\left| \frac{f(\beta_k) - f(\beta)}{\beta_k - \beta} - \frac{f(\gamma_k) - f(\beta)}{\gamma_k - \beta} \right| > \theta, \quad \text{за} \quad \begin{matrix} \beta_k \in (\beta - \varphi, \beta + \varphi) \\ \gamma_k \in (\beta - \varphi, \beta + \varphi) \end{matrix}. \quad (20)$$

Како је (20) у супротности са (17), значи да претпоставка (16) није тачна а одатле следи: Функција $f(x)$ не може имати коначан извод у тачки β .

На основу изложеног закључујемо да је на почетку наведена теорема заиста тачна.

Теорема (II): Ако је реална функција $f(x)$, $x \in (c_1, c_2)$, свуда-густо непрекидна и истовремено свуда-густо прекидна тада је у сваком интервалу (c_3, c_4) , $((c_3, c_4) \subseteq (c_1, c_2))$, поштенција скупа свих тачака у којима је непрекидна-неизводљива једнака моћи континуума.

Доказ. — 1. — Нека је $f(x)$, $x \in (c_1, c_2)$, реална функција која је свуда-густо непрекидна и истовремено свуда-густо прекидна на интервалу (c_1, c_2) . У вези произвољно узетог фиксiranог подинтервала (c_3, c_4) , $((c_3, c_4) \subseteq (c_1, c_2))$, формираћемо извесне низове бројева и интервала на следећи начин:

Обзиром да је функција $f(x)$ свуда-густо непрекидна постоје два броја $a_1 \in (c_3, (c_3 + c_4)/2)$ и $a_2 \in ((c_3 + c_4)/2, c_4)$, таква да је функција $f(x)$ непрекидна и у броју a_1 и у броју a_2 . Узмемо ли два произвољна броја $\epsilon_1 > 0$ и $\epsilon_2 > 0$, тада ће бројевима a_1 , a_2 , ϵ_1 и ϵ_2 одговарати два броја d_1 и d_2 таква да буду испуњени услови:

$$(a_1 - d_1, a_1 + d_1) \subset (c_3, (c_3 + c_4)/2),$$

$$|f(x) - f(a_1)| < \epsilon_1, \quad \text{за} \quad x \in (a_1 - d_1, a_1 + d_1),$$

$$(a_2 - d_2, a_2 + d_2) \subset ((c_3 + c_4)/2, c_4),$$

$$|f(x) - f(a_2)| < \varepsilon_2, \quad \text{за } x \in (a_2 - d_2, a_2 + d_2).$$

Како је функција $f(x)$ свуда-густо прекидна постоје два броја $b_1 \in (a_1 - d_1, a_1 + d_1)$ и $b_2 \in (a_2 - d_2, a_2 + d_2)$ таква да је функција $f(x)$ прекидна и у b_1 и у броју b_2 . Бројевима b_1 и b_2 одговарају два броја $h_1 \in (0, 2\varepsilon_1)$ и $h_2 \in (0, 2\varepsilon_2)$ таква да у свакој околини броја b_1 постоји бар један број c_1 , а у свакој околини броја b_2 бар један број c_2 таква да буду испуњени услови:

$$|f(c_1) - f(b_1)| > h_1, \quad |f(c_2) - f(b_2)| > h_2.$$

Узмимо сада фиксирани број k_1 који је елеменат скупа $\{1, 2\}$. Слично горњем закључујемо сада да постоје два реална броја $a_{k_1 1}$ и $a_{k_1 2}$ који задовољавају услове:

$$a_{k_1 1} \in (b_{k_1} - h_{k_1}, b_{k_1}) \cap (a_{k_1} - d_{k_1}, a_{k_1} + d_{k_1}),$$

$$a_{k_1 2} \in (b_{k_1}, b_{k_1} + h_{k_1}) \cap (a_{k_1} - d_{k_1}, a_{k_1} + d_{k_1}),$$

и услов да је функција $f(x)$ непрекидна и у броју $a_{k_1 1}$ и у броју $a_{k_1 2}$. Узмемо ли два броја $\varepsilon_{k_1 1} > 0$ и $\varepsilon_{k_1 2} > 0$, који задовољавају услове $\varepsilon_{k_1 1} \in (0, h_{k_1}/4)$, $\varepsilon_{k_1 2} \in (0, h_{k_1}/4)$, тада ће бројевима $a_{k_1 1}$, $a_{k_1 2}$, $\varepsilon_{k_1 1}$ и $\varepsilon_{k_1 2}$ одговорати бар два броја $d_{k_1 1}$ и $d_{k_1 2}$, који имају особине:

$$(a_{k_1 1} - d_{k_1 1}, a_{k_1 1} + d_{k_1 1}) \subset (b_{k_1} - h_{k_1}, b_{k_1}) \cap (a_{k_1} - d_{k_1}, a_{k_1} + d_{k_1}),$$

$$(a_{k_1 2} - d_{k_1 2}, a_{k_1 2} + d_{k_1 2}) \subset (b_{k_1}, b_{k_1} + h_{k_1}) \cap (a_{k_1} - d_{k_1}, a_{k_1} + d_{k_1}),$$

$$|f(x) - f(a_{k_1 1})| < \varepsilon_{k_1 1}, \quad \text{за } x \in (a_{k_1 1} - d_{k_1 1}, a_{k_1 1} + d_{k_1 1}),$$

$$|f(x) - f(a_{k_1 2})| < \varepsilon_{k_1 2}, \quad \text{за } x \in (a_{k_1 2} - d_{k_1 2}, a_{k_1 2} + d_{k_1 2}).$$

Обзиром да је функција $f(x)$ свуда-густо прекидна постоје два броја

$$b_{k_1 1} \in (a_{k_1 1} - d_{k_1 1}, a_{k_1 1} + d_{k_1 1}),$$

$$b_{k_1 2} \in (a_{k_1 2} - d_{k_1 2}, a_{k_1 2} + d_{k_1 2}),$$

са особиним да је функција $f(x)$ прекидна и у броју $b_{k_1 1}$ и у $b_{k_1 2}$. Бројевима $b_{k_1 1}$ и $b_{k_1 2}$ одговарају два броја $h_{k_1 1} \in (0, 2 \cdot \varepsilon_{k_1 1})$ и $h_{k_1 2} \in (0, 2 \cdot \varepsilon_{k_1 2})$, таква да у свакој околини броја $b_{k_1 1}$ постоји бар један број $c_{k_1 1}$ а у свакој околини броја $b_{k_1 2}$ бар један број $c_{k_1 2}$ таква да задовољавају услове:

$$|f(c_{k_1 1}) - f(b_{k_1 1})| < h_{k_1 1}, \quad |f(c_{k_1 2}) - f(b_{k_1 2})| < h_{k_1 2}.$$

Претпоставимо да смо наставили према горњем начину са формирањем одговарајућих бројева и да смо већ добили бројеве:

$$a_{k_1 k_2 \dots k_m}, \quad \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_m}, \quad b_{k_1 k_2 \dots k_m}, \quad d_{k_1 k_2 \dots k_m} \quad \text{и} \quad h_{k_1 k_2 \dots k_m},$$

где су $k_1, k_2, \dots, k_m$ и m фиксирани реални бројеви који задовољавају услове:

$$k_1, k_2, \dots, k_m \in \{1, 2\}, \quad m \in \text{природних бројева}.$$

Настављамо наш процес и констатујемо да постоје два реална броја $a_{k_1 k_2 \dots k_m 1}$ и $a_{k_1 k_2 \dots k_m 2}$ који задовољавају услове:

$$a_{k_1 k_2 \dots k_m 1} \in (b_{k_1 k_2 \dots k_m} - h_{k_1 k_2 \dots k_m}, b_{k_1 k_2 \dots k_m}) \cap \\ \cap (a_{k_1 k_2 \dots k_m} - d_{k_1 k_2 \dots k_m}, a_{k_1 k_2 \dots k_m} + d_{k_1 k_2 \dots k_m}),$$

$$a_{k_1 k_2 \dots k_m 2} \in (b_{k_1 k_2 \dots k_m}, b_{k_1 k_2 \dots k_m} + h_{k_1 k_2 \dots k_m}) \cap \\ \cap (a_{k_1 k_2 \dots k_m} - d_{k_1 k_2 \dots k_m}, a_{k_1 k_2 \dots k_m} + d_{k_1 k_2 \dots k_m}),$$

и услов да је функција $f(x)$ непрекидна и у тачки $a_{k_1 k_2 \dots k_m 1}$ и у тачки $a_{k_1 k_2 \dots k_m 2}$. Узмемо ли два броја $\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_m 1}$ и $\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_m 2}$, који задовољавају услове

$$\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_m 1} \in (0, h_{k_1 k_2 \dots k_m}/4), \quad \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_m 2} \in (0, h_{k_1 k_2 \dots k_m}/4),$$

тада ће бројевима $a_{k_1 k_2 \dots k_m 1}$, $a_{k_1 k_2 \dots k_m 2}$, $\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_m 1}$ и $\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_m 2}$ одговарати бар два броја $d_{k_1 k_2 \dots k_m 1}$ и $d_{k_1 k_2 \dots k_m 2}$, који имају особину:

$$(a_{k_1 k_2 \dots k_m 1} - d_{k_1 k_2 \dots k_m 1}, a_{k_1 k_2 \dots k_m 1} + d_{k_1 k_2 \dots k_m 1}) \subset \\ \subset (b_{k_1 k_2 \dots k_m} - h_{k_1 k_2 \dots k_m}, b_{k_1 k_2 \dots k_m}) \cap (a_{k_1 k_2 \dots k_m} - \\ - d_{k_1 k_2 \dots k_m}, a_{k_1 k_2 \dots k_m} + d_{k_1 k_2 \dots k_m});$$

$$(a_{k_1 k_2 \dots k_m 2} - d_{k_1 k_2 \dots k_m 2}, a_{k_1 k_2 \dots k_m 2} + d_{k_1 k_2 \dots k_m 2}) \subset \\ \subset (b_{k_1 k_2 \dots k_m}, b_{k_1 k_2 \dots k_m} + h_{k_1 k_2 \dots k_m}) \cap (a_{k_1 k_2 \dots k_m} - \\ - d_{k_1 k_2 \dots k_m}, a_{k_1 k_2 \dots k_m} + d_{k_1 k_2 \dots k_m});$$

$$|f(x) - f(a_{k_1 k_2 \dots k_m 1})| < \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_m 1},$$

$$\text{за } x \in (a_{k_1 k_2 \dots k_m 1} - d_{k_1 k_2 \dots k_m 1}, a_{k_1 k_2 \dots k_m 1} + d_{k_1 k_2 \dots k_m 1});$$

$$|f(x) - f(a_{k_1 k_2 \dots k_m 2})| < \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_m 2},$$

$$\text{за } x \in (a_{k_1 k_2 \dots k_m 2} - d_{k_1 k_2 \dots k_m 2}, a_{k_1 k_2 \dots k_m 2} + d_{k_1 k_2 \dots k_m 2}).$$

Узимајући затим у обзир да је функција $f(x)$ свуда-густо прекидна, постоје бар два броја

$$b_{k_1 k_2 \dots k_m 1} \in (a_{k_1 k_2 \dots k_m 1} - d_{k_1 k_2 \dots k_m 1}, a_{k_1 k_2 \dots k_m 1} + d_{k_1 k_2 \dots k_m 1}),$$

$$b_{k_1 k_2 \dots k_m 2} \in (a_{k_1 k_2 \dots k_m 2} - d_{k_1 k_2 \dots k_m 2}, a_{k_1 k_2 \dots k_m 2} + d_{k_1 k_2 \dots k_m 2}),$$

са особиним да је функција $f(x)$ прекидна и у тачки $b_{k_1 k_2 \dots k_m 1}$ и у тачки $b_{k_1 k_2 \dots k_m 2}$. Бројевима $b_{k_1 k_2 \dots k_m 1}$ и $b_{k_1 k_2 \dots k_m 2}$ одговарају два броја $h_{k_1 k_2 \dots k_m 1} \in (0, 2\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_m 1})$ и $h_{k_1 k_2 \dots k_m 2} \in (0, 2\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_m 2})$, таква да у свакој околини броја $b_{k_1 k_2 \dots k_m 1}$ постоји бар један број $c_{k_1 k_2 \dots k_m 1}$ а у свакој околини броја $b_{k_1 k_2 \dots k_m 2}$ бар један број $c_{k_1 k_2 \dots k_m 2}$ таква да задовољавају услове:

$$|f(c_{k_1 k_2 \dots k_m 1}) - f(b_{k_1 k_2 \dots k_m 1})| < h_{k_1 k_2 \dots k_m 1},$$

$$|f(c_{k_1 k_2 \dots k_m 2}) - f(b_{k_1 k_2 \dots k_m 2})| < h_{k_1 k_2 \dots k_m 2}.$$

Пођимо сада од претпоставке да је овај процес већ извршен пребројиво-бесконечно-много пута на тај начин што је m прошло скупом природних бројева.

Уочимо сада макоји фиксирани бесконачни низ

$$\{k_n\} \tag{21}$$

чији су чланови као што смо већ и рекли елементи скупа $\{1, 2\}$. Низова (21) имамо $2^{\aleph_0}$, то јест њихова потенција је једнака моћи континуума. Фиксираном низу (21) одговара један низ интервала

$$\{s_n\} \equiv \{(a_{k_1 k_2 \dots k_n} - d_{k_1 k_2 \dots k_n}, a_{k_1 k_2 \dots k_n} + d_{k_1 k_2 \dots k_n})\} \tag{22}$$

чији су чланови интервали

$$s_n \equiv (a_{k_1 k_2 \dots k_n} - d_{k_1 k_2 \dots k_n}, a_{k_1 k_2 \dots k_n} + d_{k_1 k_2 \dots k_n}); \tag{23}$$

односно низ

$$\{u_n\} \equiv \{(b_{k_1 k_2 \dots k_n} - h_{k_1 k_2 \dots k_n}, \quad b_{k_1 k_2 \dots k_n} + h_{k_1 k_2 \dots k_n})\} \quad (24)$$

чији су чланови интервали

$$u_n \equiv (b_{k_1 k_2 \dots k_n} - h_{k_1 k_2 \dots k_n}, \quad b_{k_1 k_2 \dots k_n} + h_{k_1 k_2 \dots k_n}). \quad (25)$$

Ови интервали имају особину:

$$\begin{aligned} s_1 \supset s_2 \supset s_3 \supset \dots \supset s_n \supset s_{n+1} \dots, \\ u_1 \supset u_2 \supset u_3 \supset \dots \supset u_n \supset u_{n+1} \supset \dots, \\ u_n \supset s_{n+1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Фиксираном низу (21) одговарају и низови

$$\{a_{k_1 k_2 \dots k_n}\}, \quad \{b_{k_1 k_2 \dots k_n}\}; \quad (27)$$

$$\{\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n}\}, \quad \{d_{k_1 k_2 \dots k_n}\}, \quad \{h_{k_1 k_2 \dots k_n}\}. \quad (28)$$

Кад $n \rightarrow \infty$, тада низови под (28) теже ка нули, јер

$$0 < \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \varepsilon_1 \rightarrow 0,$$

$$0 < h_{k_1 k_2 \dots k_n} < 2 \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n} \rightarrow 0,$$

$$0 < d_{k_1 k_2 \dots k_n} < 1/2 \cdot h_{k_1 k_2 \dots k_{n-1}} \rightarrow 0,$$

а из тога произилази да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (m(s_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (m(a_{k_1 k_2 \dots k_n} - d_{k_1 k_2 \dots k_n}, \quad a_{k_1 k_2 \dots k_n} + d_{k_1 k_2 \dots k_n})) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (m(u_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (m(b_{k_1 k_2 \dots k_n} - h_{k_1 k_2 \dots k_n}, \quad b_{k_1 k_2 \dots k_n} + h_{k_1 k_2 \dots k_n})) = 0,$$

при чему смо са $m(s_n)$ и са $m(u_n)$ означили меру интервала (23) и интервала (25).

Из горњег произилази да фиксираном низу (21) одговара један и само један реалан број, којег ћемо означити са $r(\{k_n\})$, а који припада свима члановима низа (22) а и свима члановима низа (24), он је истовремено гранична вредност низова из (27) кад n тежи бесконачности.