L'EXISTENCE DES CERTAINES CLASSES DE FONCTIONS RÉELLES DÉPENDANT D'UNE MULTITUDE INFINIE DE VARIABLES INDÉPENDANTES

par SIMON ĆETKOVIĆ, BEOGRAD

Résumé

Dans le présent travail l'auteur démontre l'existence des classes G_p, G_q, et G_t et forme les fonctions appartenant à ces classes.

1.— Par G_p il dénote la classe de toutes les fonctions réelles dépendant d'une multitude infinie dénombrable de variables indépendantes, dont chacune possède en même temps les caractéristiques suivantes:

1°. Elle est discontinue dans tous les points;

2°. Dans les points partout-densement disposés elle possède toutes les dérivées partielles, quoiqu'elle soit discontinue dans tous ces points;

3°. Dans les points partout-densement disposés elle possède des dérivées partielles d'après, et rien que d'après un groupe arbitrairement envisagé par avance, de variables indépendantes, quoiqu'elle soit discontinue dans tous ces points.

2. — Par G_q il a dénoté la classe composée de toutes les fonctions réelles dépendant d'une multitude infinie dénombrable de variables indépendantes dont chacune possède en même temps des propriétés suivantes:

1°. Elle est discontinue dans les points partout-densement disposées:

2°. Elle est continue dans les points partout-densement disposées, mais ne possède, dans ceux-ci, aucune dérivée partielle;

3°. Elle est continue dans les points partout-densement disposés et possède, dans ceux-ci, toutes les dérivées partielles;

4°. Elle est continue dans les points partout-densement disposés et possède, dans ceux-ci, des dérivées partielles d'après, et rien que d'après un groupe de variables indépendantes, arbitrairement envisagé par avance;

5°. Elle n'est différentiable dans aucun point.

3. — Par G_t il a dénoté la classe composé de toutes les fonctions réelles dépendant d'une multitude infinie dénombrable de variables indépendantes, dont chacune possède en même temps des propriétés suivantes:

1°. Elle est discontinue dans les points partout-densement disposés;

2°. Elle est continue dans les points partout-densement disposés, mais ne possède de dérivée d'après aucunne de variables;

3°. Elle possède, dans les poins partout-densement disposés, des dérivées partielles d'après, et rien que d'après un groupe de variables indépendantes, envisagés arbitrairement par avance;

4°. Elle est différentiable dans les points partout-densement disposés.

4. — Afin de démontrer l'existence des cllasses G_p, G_q et G_t l'auteur énonce un principe pour la formation des fonctions pareilles. Soit donnée une suite infinie des variables indépendantes: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \equiv \{x_n\}$. Soient a, b et R trois nombres réels. Formons les fonctions réelles $F_{ab}(\{x_n\})$ de la façon suivante:

$F_{ab}(\{x_n\}) = 0$, lorsque tous les termes de la suite $\{x_n\}$ sont des nombres irrationnels;

$F_{ab}(\{x_n\}) = 1/q^a$, lorsqu'une, et rien qu'une des variables indépendantes possède une valeur rationnelle et que q soit le dénominateur de cette valeur rationnelle;

$F_{ab}(\{x_n\}) = 1\,(\min(q_i, q_j))^b$, lorsque deux, et rien que deux variables indépendantes assument une valeur rationnele, et que q_i et q_j soient des dénominateurs de ces valeurs rationnelles;

$F_{ab}(\{x_n\}) = R$, si plus de deux variables indépendantes assument une valeur rationnelle.

De cette façon-là il a formé un ensemble de fonctions. A chaque couple de valeurs (a, b) correspond une fonction. Nous avons ici des fonctions d'une multitude infinie de ·variables indépendantes, mais ces fonctions pourraient être nommées aussi les fonctions de la suite a ou les fonctions dans l'espace élargi de Hilbert (élargi, car on y prend aussi les suites aux modules divergents). Chacune de ces fonctions est en effet la transformation de l'ensemble de toutes les suites réelles, convergentes et divergentes, limitées et illimitées sur l'ensemble de nombres réels.

Dans le travail on montre ensuite que:

$$F_{ab}(\{x_n\}) \in G_p, \text{ pour } a > 2,\ b \leqslant 0,\ R \text{ nombre réel arbitraire;}$$

$$F_{ab}(\{x_n\}) \in G_q, \text{ pour } a > 2,\ b \in (0, 1],\ R = 0;$$

$$F_{ab}(\{x_n\}) \in G_t, \text{ pour } a > 2,\ b \in (2, \infty),\ R = 0.$$

Dans la formation des fonctions susmentionnées et dans les démonstrations qui suivirent ensuite, l'auteur a utilisé l'ensemble de nombres irrationnels partout-densement disposés (0.4) qu'il avait formé dans l'introduction du présent travail.