

Werk

Label: Article

Jahr: 1957

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?311570321_0009|log50

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

APPLICATION DES SPECTRES MATHÉMATIQUES À LA RÉSO- LUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

par CONSTANTIN ORLOFF, BEOGRAD

Le but de ce travail est de donner une méthode purement arithmétique, applicable à la résolution des équations différentielles et donnant leurs intégrales sous forme de série de Taylor. L'avantage d'une telle méthode est le suivant: parce qu'on calcule exclusivement avec les nombres, on y peut se servir des machines à calculer, celles de bureau, ainsi que des machines électroniques. Cependant l'état actuel de la théorie des spectres ne donne pas de telle possibilité. Pour cette raison nous devons antérieurement, compléter cette théorie.

Pour le faire nous devons d'abord exposer le procédé numérique de Petrovitch [1], auquel il a donné le nom de la méthode spectrale, en traits courts et sous une forme un peu simplifiée. Nous l'exposerons, notamment, pour le cas des spectres cannelés, sans tranches parasites et avec le rythme spectral uniforme, cette simplification n'apportant aucun changement essentiel dans ce procédé lui-même. Le procédé en question a pour but la recherche d'un nombre limité ou illimité d'inconnues a_i ($i=0,1,2,3\dots$), a condition de savoir d'avance que ces inconnues sont des nombres entiers positifs, admettant une borne supérieure 10^h , où h est un entier positif. Cette condition doit être comprise de telle manière, que dans les problèmes à résoudre, il est toujours possible de faire, sur les a_i les conclusions citées, *avant* d'aborder le procédé spectral. Pour atteindre ce but on part des données b_k , qui sont aussi en nombre limité ou illimité, elles peuvent être des nombres ou des fonctions de forme quelconque. Le procédé spectral consiste à appliquer une suite d'opérations (au sens le plus large) à ces b_k , et à l'entier h , appelé rythme spectral uniforme. Les opérations en question dérivent du problème à résoudre et servent à obtenir un nombre S , appelé spectre résultant du problème. Ce nombre mis sous la forme d'un nombre décimal et partagé, à partir de virgule décimale, en tranches de h chiffres chacune, donne les valeurs de tous les a_i , de telle façon que chaque a_i est égal au nombre inscrit dans la tranche correspondante, traité comme nombre entier.

Ainsi le spectre résultant S dépend des données b_k et de h et on peut écrire

$$S = f(b_k, h) = F(h) \quad (1)$$

où par le symbole f est désigné l'ensemble des opérations à faire. Les b_k étant donnés, le spectre S ne dépend définitivement que du rythme h .

Un théorème très important de la théorie des spectres mathématiques est le suivant:

Théorème. Si h est un rythme uniforme compatible avec le problème et les données b_k , alors chaque entier h_1 , plus grand que h est aussi compatible avec le problème et les données en question et peut aussi servir de rythme uniforme.

Ainsi pour les mêmes données b_k au moyen des mêmes opérations f , mais avec des rythmes différents, h et h_1 , on peut former deux spectres résultants S et S_1 du même problème

$$S = f(b_k, h) = F(h), \quad S_1 = f(b_k, h_1) = F(h_1), \quad (2)$$

Les nombres S et S_1 seront, naturellement, différents, mais traités comme spectres auront des tranches correspondantes avec les mêmes valeurs effectives. La différence n'est donc qu'en largeur de tranches, S ayant les tranches de largeur h et S_1 de largeur h_1 . Ainsi la seule différence entre S_1 et S est que chaque tranche de S_1 commence par $h_1 - h$ zéros, qui sont absents dans les tranches de S .

Il en résulte donc, que la valeur h dans la formule (1) peut être traitée comme *une variable — nombre entier* avec une borne inférieure, cette borne étant définie par les données b_k , et le problème même. Ce fait était déjà connu mais paraissait sans beaucoup d'intérêt. On en tirait deux conclusions suivantes. Premièrement, on ne doit par toujours prendre le rythme, le plus petit possible. Secondement, on peut pour contrôler le résultat obtenu, former encore un spectre, avec un rythme plus grand. Hors de cela il paraissait inutile de former deux spectres résultants du même problème avec les mêmes données, car le premier spectre donne la solution complète du problème.

Avant de passer aux avantages qu'on peut tirer de ce fait fondamental, faisons un court résumé des conditions qui doivent être remplies, pour que le procédé de Petrovitch soit applicable: 1) Il faut savoir d'avance que toutes les inconnues a_i sont des entiers positifs, 2) pouvoir, au moyen des b_k et du problème même, déterminer l'entier auxiliaire h compatible avec les données et le problème, 3) connaître les opérations f à faire, pour obtenir le spectre S .

Ces conditions, difficiles à satisfaire, ont été modérées par les recherches postérieures. La première condition a été changée [2] de cette façon qu'il faut seulement connaître d'avance que les a_i sont des nombres entiers

de n'importe quel signe. Puis il a été démontré [3] que la condition, que les a_i soient des nombres entiers n'est pas essentielle. Il s'agit seulement de savoir d'avance *la classe* à laquelle appartiennent tous les a_i , pourvu que cette classe contienne un nombre limité de nombres. Traitée plus généralement, pour les rythmes non-uniformes, cette condition n'exige pas que la classe en question ait un nombre limité de nombres, celui-ci peut être illimité, mais alors l'ensemble des nombres de cette classe ne doit pas avoir de points d'accumulation.

La troisième condition n'apporte pas beaucoup de difficultés, mais la seconde, la recherche antérieure du rythme compatible h , en apporte beaucoup. On les surmonte par plusieurs majorations successives plus ou moins heureuses, mais le rythme obtenu de telle façon, surtout dans les problèmes assez généraux, est très grand, beaucoup plus grand que ne l'exige le problème en question. Malheureusement on s'aperçoit de ce fait postérieurement, après avoir déjà effectué des calculs compliqués. D'autre part il n'y a aucun moyen satisfaisant de préciser le rythme h dans les problèmes généraux d'Analyse que nous voulons maintenant aborder.

Ces difficultés avec le rythme h , n'étaient pas de trop grand inconvénient dans la première période de l'application de la Méthode spectrale (1917—1953), quand elle était traitée comme une méthode théorique, avec le but de démontrer seulement la possibilité de transformer certains problèmes et procédés algébriques et analytiques en procédés purement arithmétiques, sans prétention d'être utilisée en pratique.

Mais avec la fondation d'une nouvelle branche de la Théorie des spectres mathématiques — Mathématique spectrale pratique [4], la grandeur non-nécessaire de h , est devenue un grand inconvénient pour le développement de cette nouvelle branche.

Nous proposons donc, dans ce travail, d'introduire un nouveau procédé. Au lieu de former d'après la formule (1) un seul nombre — spectre S , avec un h préalablement calculé, nous proposons de calculer plusieurs nombres de la même forme

$$S_j = f(b_k, h_j) = F(h_j), \quad (j = 1, 2 \dots) \quad (3)$$

où f est le même ensemble d'opérations que dans la formule (1) et h_1, h_2, \dots sont des entiers positifs croissants *arbitrairement choisis*. Puis de comparer les nombres S_1, S_2, \dots entre eux et d'obtenir ainsi un certain nombre d'inconnues a_i , d'après *les théorèmes de comparaison*, antérieurement établis. En prolongeant la formation des nombres (3) on pourrait, en principe, obtenir toutes les inconnues a_i . Il est évident que ce procédé peut donner des résultats complets (calcul de tous les a_i) toutes les fois qu'il

s'agit d'un nombre limité d'inconnus, et cela est toujours le cas en Analyse numérique, ainsi que dans le cas où le nombre des inconnues est illimité, mais ils ont une borne supérieure. En ces cas pour un certain h_k le nombre (3) serait le spectre résultant du problème.

Avant de passer aux avantages de ce nouveau procédé, qui ne sont guère évidents, comparons un nombre de la forme (3) avec un spectre au sens classique. Un spectre donne tous les a_i , c'est-à-dire tous les chiffres de chaque a_i . Dans un spectre tous les chiffres de tous les a_i sont placés *distinctement*, et dans un nombre (3) les chiffres de plusieurs a_i sont mêlés d'une certaine façon.

Je propose donc, n'ayant pas trouvé de terme plus heureux, d'appeler un tel nombre — accord numérique à cause de ce mélange de chiffres, analogue au mélange des notes de musique dans un accord.¹⁾ Un accord peut aussi être partagé en parties de h chiffres chacune. Nous appellerons une telle partie *note de l'accord*, et nous parlerons de la valeur effective d'une note de l'accord, analogiquement à la valeur effective d'une tranche de spectre. Si cette partie contient seulement un des a_i nous appellerons cette partie *note pure* de l'accord, dans le cas contraire nous parlerons d'une *note impure* de l'accord. Aussi on nommera comme *partie pure de l'accord* la partie formée de notes pures. Le nom de rythme, pour l'entier h_j , peut rester, car il est compatible avec cette terminologie suggérée par la musique.

L'introduction des accords numériques paraît à première vue être désavantageuse, car au lieu de former *un nombre*, nous devons former *deux nombres au moins*. Premièrement, dans les cas où l'on n'a pas trouvé la formule pour le rythme compatible h , la méthode des accords numériques est la seule méthode à suivre, car sans la connaissance du rythme compatible h la méthode spectrale est inapplicable. Secondement, si le rythme trouvé h est par exemple plusieurs fois plus grand, que ne le serait h_1 et h_2 des accords numériques, alors deux accords S_1 et S_2 auront ensemble moins de chiffres que le spectre S , et il sera donc plus facile de les calculer. Notons encore, que les machines électroniques à calculer peuvent calculer les accords les uns après les autres, les comparer automatiquement entre eux et terminer le calcul après avoir obtenu les accords avec une partie pure suffisamment grande pour trouver tous les a_i cherchés. Notons, que dans de certains problèmes, il ne s'agit pas de trouver un certain nombre de a_i fixé d'avance, mais on apprend par les valeurs des a_i trouvées, de quel nombre de a_i on peut se contenter. Ce cas donne un nouvel avantage aux accords numériques.

¹⁾ On pourrait aussi adopté le nom „quasi-spectre“ ou „pseudo-spectre“.

Passons maintenant au théorème fondamental de comparaison des accords numériques.

Théorème. *Soit à résoudre un problème, dont la solution est en forme d'une suite limitée ou illimitée de nombres entiers positifs bornés a_i . Si deux accords numériques résultants de ce problème, formés avec les rythmes uniformes différents, ont pour leurs k notes initiales correspondantes les mêmes valeurs effectives, alors ces dernières sont les k premiers termes de la suite cherchée.¹⁾*

Ce théorème fournit donc, pour les a_i bornés, entiers et positifs, les conditions nécessaires et suffisantes. Pour les a_i bornés et entiers il est valable, mais donne des conditions qui ne sont que nécessaires. En ce cas il faut que les conditions supplémentaires soient remplies. Nous n'allons pas maintenant parler de ces conditions supplémentaires pour les raisons suivantes. Premièrement ces conditions supplémentaires peuvent être de genre assez différent, et pour cela il est mieux d'en parler dans des problèmes concrets, que dans un exposé purement théorique. Secondement dans les problèmes pratiques, et ce sont bien de tels problèmes que nous voulons aborder, il s'agit d'obtenir une suite de a_i , en acceptant le risque plus théorique que réel d'ailleurs, que ces valeurs soient incorrectes, car on a beaucoup de contrôles spectraux, accordiaux et ordinaires, qu'on peut faire intervenir avant d'adopter la suite des a_i comme correcte. Si on constate par un de ces contrôles la faute, ou même sur le moindre soupçon de possibilité d'une telle faute on peut calculer encore un accord avec un plus grand rythme et éliminer la faute éventuelle.

Notons, que les accords numériques peuvent être formés aussi dans les cas, où le rythme n'est pas uniforme.

Après cette introduction, assez longue mais inévitable à cause que les résultats exposés n'étaient pas encore publiés, passons au problème d'intégration des équations différentielles ordinaires du premier ordre. Il s'agit d'obtenir les intégrales particulières aux valeurs initiales x_0, y_0 en forme d'une série de Taylor. Pour point de départ je prendrai ma méthode sur ce sujet publiée en 1934 [5].

Il s'agit d'obtenir l'intégrale en question de l'équation

$$y' = f(x, y),$$

les valeurs initiales x_0, y_0 déterminant un point ordinaire de la fonction f , qui alors est développable en série double de Taylor au voisinage de ce point

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} (x - x_0)^m (y - y_0)^n. \quad (4)$$

¹⁾ Ce théorème peut être formulé d'une manière plus générale. La démonstration est omise à cause de manque de place.

Pour cela il faut former l'expression

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx,$$

faire le développement de l'intégrand en série de Taylor avec un terme, retrancher le résidu $R_1(x)$ et effectuer l'intégration. De cette manière on obtient la première approximation y_1

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x \overrightarrow{f(x, y_0)} dx = y_0 + \int_{x_0}^x [\alpha_1 + \overrightarrow{R_1(x)}] dx = y_0 + \alpha_1 (x - x_0) \quad (5)$$

le symbole $\overrightarrow{}$ représentant le retranchement du résidu R_1 , et le symbole $\overleftarrow{}$ le rejet de l'expression entière. La deuxième approximation s'obtient de manière analogue

$$\begin{aligned} y_2 &= y_0 + \int_{x_0}^x \overrightarrow{f(x, y_1)} dx = y_0 + \int_{x_0}^x [\alpha_1 + \alpha_2 (x - x_0) + \overrightarrow{R_2(x)}] dx = \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x [\alpha_1 + \alpha_2 (x - x_0)] dx = y_0 + \alpha_1 (x - x_0) + \frac{\alpha_2}{2} (x - x_0)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Il est démontré dans l'article cité, que le coefficient α_i de la formule (6) est le même que dans la formule (5), et cela vaut pour chaque coefficient α_i . C'est-à-dire, les coefficients une fois obtenus restent invariables. L'approximation du rang i s'obtient, donc, par la formule

$$\begin{aligned} y_i &= y_0 + \int_{x_0}^x \overrightarrow{f(x, y_{i-1})} dx = y_0 + \int_{x_0}^x [\alpha_1 + \alpha_2 (x - x_0) + \dots + \alpha_i (x - x_0)^{i-1} + \\ &+ \overrightarrow{R_i(x)}] dx = y_0 + \alpha_1 (x - x_0) + \frac{\alpha_2}{2} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{\alpha_i}{i} (x - x_0)^i \\ &\quad (i=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (7)$$

Les coefficients α_i ainsi obtenus sont les coefficients correspondants du développement de l'intégrale particulière cherchée y , en série de Taylor

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{i} (x - x_0)^i.$$

Ainsi la méthode exposée permet d'obtenir n'importe quel nombre de coefficients α_i de développement en question. Pour établir une méthode spectrale, prenons le cas le plus simple; supposons connu d'avance que x_0, y_0 ainsi que les $A_{m,n}$ de développement (4) sont des nombres entiers. Supposons quand même que les valeurs des $A_{m,n}$ ne sont pas connues et restent toujours inconnues. On peut modérer ces conditions pour pouvoir étendre la méthode à la classe plus large de fonctions $f(x, y)$, mais même ces conditions là sont remplies pour une classe assez vaste de fonctions $f(x, y)$. Par exemple pour la fonction

$$f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \tag{8}$$

où $Q(x_0, y_0) = 1$, P et Q étant les polynômes en x, y ayant des coefficients nombres entiers. D'ailleurs chaque fonction $f(x, y)$ rationnelle à coefficients nombres entiers se réduit, x_0, y_0 étant nombres entiers, à la fonction de la forme (8) par une transformation élémentaire. Cette transformation ne doit pas être effectuée par un moyen algébrique, elle s'effectue automatiquement dans la formation des accords.

Dans la méthode analytique exposée il s'agissait donc de trois sortes de fonctions en x qu'on calcule par un procédé de récurrence, à savoir

$$\begin{array}{rcc}
 & & y_0 \\
 f(x, y_0) & \xrightarrow{1} & f(x, y_0) & y_1 \\
 f(x, y_1) & \xrightarrow{2} & f(x, y_1) & y_2 \\
 f(x, y_2) & \xrightarrow{3} & f(x, y_2) & y_3 \\
 \dots & & \dots & \dots
 \end{array} \tag{9}$$

Pour donner une méthode spectrale (ou accordiale), basée sur la méthode analytique citée antérieurement, il faut trouver les nombres correspondants aux fonctions en question (leurs spectres ou accords), trouver le procédé arithmétique, par récurrence, entre ces nombres, équivalant au procédé analytique cité plus haut et encore trouver le moyen de faire ressortir des quasi-spectres leurs parties effectives de telle façon qu'on puisse trouver n'importe quel nombre de coefficients a_i de développement de l'intégrale particulière en question en série de Taylor

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i!} (x - x_0)^i.$$

Faisons pour cela premièrement un tableau analogue au tableau (9)

$$\begin{array}{ccc}
 & & s_0 \\
 \Sigma_1 & \bar{\Sigma}_1 & s_1 \\
 \Sigma_2 & \bar{\Sigma}_2 & s_2 \\
 \Sigma_3 & \bar{\Sigma}_3 & s_3 \\
 \dots & \dots & \dots
 \end{array} \tag{9'}$$

et analysons le. Premièrement, on voit clairement que les s_i doivent être des accords de y_i , les coefficients de ceux-ci étant des nombres non-entiers. Secondement on voit qu'il doit exister une relation de la forme

$$\Sigma_i = f(10^{-h}, s_{i-1}) \tag{10}$$

entre Σ_i et s_{i-1} , et enfin que $\bar{\Sigma}_i$ représente le nombre Σ_i abrégé avec $(i-1)h$ décimales (h étant nombre entier positif convenablement choisi, rythme des spectres et accords). Mais les Σ_i , définis par la formule (10), seront aussi les accords de $f(x, y_{i-1})$ dont les coefficients sont non-entiers et par cela on ne pourrait pas en tirer les coefficients a_i . Pour cela rappelons nous un théorème de la Théorie des spectres:

Si S est un spectre, au rythme uniforme h, de la suite de nombres entiers c_i , alors le nombre KS (K étant nombre entier) est le spectre de la suite de nombres Kc_i , avec le même rythme, pourvu que le rythme h soit assez grand, pour qu'être compatible avec la suite Kc_i .

Le nouveau spectre peut être aussi traité comme spectre de la suite c_i sous l'influence de l'entier K.

Si S n'est pas un spectre, mais un accord, et c_i les nombres rationnels alors à condition que leur nombre soit limité, le théorème antérieur est valable pour les accords aussi, et on peut toujours trouver le nombre K tel que les Kc_i deviennent nombres entiers et KS devient le spectre ou accord (selon la grandeur de h) de la suite Kc_i . C'est bien notre cas, car $\bar{\Sigma}_i$ est un accord et ces c_i , dont le nombre est limité, sont des nombres rationaux. En ce cas comme nombre K — facteur révélateur (le nom est emprunté à la photographie) on peut prendre $(i-1)!$

Multiplions les deux premières colonnes du tableau (9') par $K = (i-1)!$ c'est-à-dire que Σ_1 et $\bar{\Sigma}_1$ seront multipliés par 0!, Σ_2 et $\bar{\Sigma}_2$ par 1! etc., alors le tableau deviendra

$$\begin{array}{ccc}
 & & s_0 \\
 S_1 & \bar{S}_1 & s_1 \\
 S_2 & \bar{S}_2 & s_2 \\
 S_3 & \bar{S}_3 & s_3 \\
 \dots & \dots & \dots
 \end{array} \tag{9''}$$

où

$$S_i = (i-1)! \Sigma_i \quad \bar{S}_i = (i-1)! \bar{\Sigma}_i \\ i = 1, 2, 3, \dots$$

Les S_i sont les accords et les \bar{S}_i sont les spectres ou accords (d'après la grandeur de h) de suivantes fonctions de x , à savoir $f(x, y_{i-1})$ respectivement $f(x, y_{i-1})$, sous l'influence de $(i-1)!$. La relation entre S_i et \bar{S}_i est la même qu'entre Σ_i et $\bar{\Sigma}_i$, notamment \bar{S}_i est la valeur abrégé de S_i avec $(i-1)h$ décimales.

La formule (10) se transforme en formule suivante

$$S_i = (i-1)! f(10^{-h}, s_{i-1}) \quad i = 1, 2, \dots \quad (11)$$

et nous obtenons encore pour a_{i+1} la formule

$$a_{i+1} = 10^{ih} (\bar{S}_{i+1} - i\bar{S}_i) \quad i = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Le fait que y_{i+1} est la somme de y_i et du membre

$$\frac{a_{i+1}}{(i+1)!} (x-x_0)^{i+1},$$

donne la relation suivante entre s_{i+1} et s_i

$$s_{i+1} = s_i + 10^{-h} \frac{\bar{S}_{i+1} - i\bar{S}_i}{(i+1)!} \quad i = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Il faut encore établir les formules pour les valeurs initiales s_0, s_1, a_0, a_1 qui échappent à ce calcul de récurrence. Cependant on trouve

$$s_0 = y_0 \\ s_1 = s_0 + 10^{-h} \bar{S}_1 \\ a_0 = y_0 \quad a_1 = \bar{S}_1. \quad (14)$$

Ainsi les formules (11), (12), (13) et (14) donnent la possibilité de calculer tous les coefficients a_i , jusqu'à n'importe quel rang. Il semble que le problème soit résolu, mais il nous resterait encore à calculer le rythme h , que nous avons laissé indéfini, avec la remarque qu'il est assez grand.

Dans les problèmes résolus par la méthode spectrale le calcul de h est quelquefois bien compliqué. Dans le présent problème il pourrait être trouvé par majoration, seulement si on connaissait l'allure de la croissance des $A_{m,n}$. Cependant la supposition est que les $A_{m,n}$ sont et restent inconnus. Alors nous devons définitivement renoncer à la recherche de h , calcul inévitable dans les méthodes spectrales, et passer à la méthode accordiale. Jusqu'ici bien que nous nous soyons servis des accords, la

méthode est restée spectrale (ou presque spectrale). En renonçant, maintenant, au rythme fixe h nous passons à la méthode accordiale. Les formules (11), (12), (13), (14) restent les mêmes, mais chaque pas dans ces évaluations de récurrence doit être fait par deux (ou plusieurs) calculs avec deux rythmes différents, (h_1 et h_2) pris arbitrairement. Si les deux calculs donnent le même a_i , le pas est „pratiquement“ correct, au cas contraire on doit prendre un rythme plus grand h_3 et recommencer le pas de nouveau avec les rythmes h_2 ($h_2 > h_1$) et h_3 . On en fait de même jusqu'à obtenir le même coefficient a_i . Pour raison de manque de place nous devons renoncer de parler des contrôles, applicables en cette méthode. Remarquons que chaque formule (11), (12), (13), (14), n'est valable que pour les spectres ou accords ayant le même rythme h , à quoi on doit faire attention. Notons encore, que si l'équation différentielle, avec les conditions initiales x_0, y_0 admet comme résolution un polynôme, l'évaluation se terminera d'elle-même, ce polynôme étant obtenu.

L'exemple qui va suivre rendra la théorie plus concrète.

Exemple

Soit donnée l'équation différentielle

$$y' = \frac{1 - x + y}{1 + x^2 y},$$

on cherche l'intégrale, pour laquelle $x_0 = 0, y_0 = 0$, en forme de série de Taylor. Le calcul doit donner cinq premiers coefficients. La fonction $f(x, y)$ étant de forme (8), et la condition

$$Q(x_0, y_0) = 1$$

étant satisfaite, la méthode accordiale exposée peut être appliquée.

Prenons pour les rythmes h_1 et h_2 les nombres 1 et 2. Les accords formés avec le premier rythme porteront un index (1), et ceux -- la formé avec le second rythme un index (2). Nous obtenons

		$a_0 = 0$	$s_0 = 0$
(1)	(1)		(1)
$S_1 = 0,9$	$\bar{S}_1 = 1$		$s_1 = 0,1$
(2)	(2)	$a_1 = 1$	(2)
$S_1 = 0,99$	$\bar{S}_1 = 1$		$s_1 = 0,01$
(1)	(1)		(1)
$S_2 = 0,99900099$	$\bar{S}_2 = 1,0$		$s_2 = 0,10$
(2)	(2)	$a_2 = 0$	(2)
$S_2 = 0,99999900$	$\bar{S}_2 = 1,00$		$s_2 = 0,0100$

	(1) (1)		(1)
	$\bar{S}_3 = 2 \bar{S}_2 = 2,00$		$s_3 = 0,100$
	(2) (2)	$a_3 = 0$	(2)
	$\bar{S}_3 = 2 \bar{S}_2 = 2,0000$		$s_3 = 0,010000$
	(1) (1)		(1)
	$\bar{S}_4 = 3 \bar{S}_3 = 5,994$		$s_4 = 0,099975$
	(2) (2)	$a_4 = -6$	(2)
	$\bar{S}_4 = 3 \bar{S}_3 = 5,999994$		$s_4 = 0,009999975$
(1)	(1)		
$S_5 = 23,975431$	$\bar{S}_5 = 23,9754$		
(2)	(2)	$a_5 = -6$	
$S_5 = 23,999975940$	$\bar{S}_5 = 23,99997594$		

L'intégrale cherchée est donc

$$y = x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{20} + \dots$$

On voit de cet exemple, que si la série en question a de lacunes, le calcul se simplifie.

On peut généraliser les résultats obtenus dans quelques directions. Premièrement on peut modérer la condition que $A_{m,n}$ soient des nombres entiers.

L'autre généralisation est d'étendre la même méthode accordiale aux équations différentielles d'ordre supérieur et aux systèmes d'équations différentielles ordinaires simultanées. Les généralisations citées se font sans grandes difficultés.

A la fin de ce travail je fais remarquer encore la possibilité d'employer les machines à calculer dans les procédés cités.

LITTÉRATURE

- [1] M. Petrovitch, *Les spectres numériques*. Gauthier-Villars, Paris, 1919.
M. Petrovitch, *Leçons sur les spectres mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
- [2] C. Orloff, *Les applications arithmétiques et analytiques des spectres mathématiques*, Thèse de doctorat, en serbo-croate, avec un résumé en français, Beograd, 1935.
- [3] C. Orloff, *Les spectres de nombres non-entiers*, Comptes rendus du I Congrès des mathématiciens et physiciens de Yougoslavie, en serbo-croate, Beograd, 1950.
- [4] C. Orloff, *Application pratique de la théorie des spectres mathématiques de Michel Petrovitch au calcul numérique*. La revue Scientifique, Paris, juillet-décembre 1953.
- [5] C. Orloff, *Un procédé d'approximation concernant les intégrales des équations différentielles*, Bull. de l'Académie Serbe № 2, Beograd, 1935.
- К. Орлов, *Једна метода апроксимирања за интеграле диференцијалних једначина*, Глас Срп. Акад. Наука CLXIII, први разред 80, 1934.