

Werk

Label: Article

Jahr: 1957

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?311570321_0009|log49

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ANWENDUNGEN FUNKTIONALANALYTISCHER METHODEN ZUR NUMERISCHEN BERECHNUNG DER LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

von L. COLLATZ, HAMBURG

Aus dem weiten Gebiet der numerischen Behandlung von Differentialgleichungen soll hier ein kurzer Bericht über einige Methoden funktionalanalytischer Art gegeben werden, mit denen man exakte Fehlerabschätzungen für die gesuchte Lösung erhält. Angesichts des dauernd steigenden Einsatzes von Großrechenanlagen haben derartige Abschätzungen erhöhtes Interesse, da die Maschinen, die irgendwelche Näherungsverfahren benutzen, die Näherungslösung mit einer bestimmten Anzahl von Dezimalstellen liefern und man gerne wissen möchte, wieviele dieser Stellen man garantieren kann.

Der folgende Überblick enthält keine Beweise und Einzelheiten; aber einige Zahlenbeispiele mögen jeweils die Wirksamkeit der Methoden illustrieren. Es sind hier ganz einfache Beispiele gewählt worden, damit das Typische an den Methoden deutlicher hervortritt; die Methoden sind aber auch auf viel kompliziertere Aufgaben anwendbar; um nur ein Beispiel zu nennen: es wurden Abschätzungen durchgeführt für die kompressible Unterschallströmung um eine Kugel.

I. Der allgemeine Fixpunktsatz bei Transformationen in Banachräumen

1. Der Fixpunktsatz

Der Fixpunktsatz wurde schrittweise mehr und mehr verallgemeinert; er wurde zunächst für lineare Transformationen aufgestellt. Bei nichtlinearen Transformationen wurde es nötig, genauer auf die jeweiligen Bereiche zu achten. Es sei hier eine Formulierung genannt, die nicht nur in Banachschen Räumen, sondern allgemeiner in linearen vollständigen Räumen R gilt, in denen ein Abstand $\|f-g\|$ zweier Elemente f, g als nichtnegative Zahl mit den üblichen Abstandspostulaten (vergl. z. B. Aumann [1], S. 83, J. Weissinger [16]) erklärt ist.

Als Elemente von R werden in der praktischen Analysis gewöhnlich Zahlen, Vektoren, Matrizen, Funktionen, Systeme von Funktionen u. dergl. verwendet; bei der Anwendung auf Differentialgleichungen treten meist folgende Banachräume R auf: R enthält alle Funktionen $f(x)$ oder $f(x_1, \dots, x_m)$, die in einem Intervall $[a, b]$ oder allgemeiner in einem abgeschlossenen Bereich \bar{B} des x_1, \dots, x_m — Raumes definiert und stetig (oder mit stetigen partiellen Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung versehen) sind. Als Norm wird bei theoretischen Untersuchungen häufig einfach $\|f\| = \sup_B |f|$ benutzt; für die Güte der erzielten Abschätzungen ist es aber oft von entscheidender Wichtigkeit, eine Norm

$$(1.1) \quad \|f\| = \sup_B \varphi(x_j) |f(x)|$$

mit einer günstig gewählten in B positiven (in besonderen Fällen nichtnegativen) stetigen Funktion $\varphi(x_j)$ zu verwenden. In manchen Fällen, z. B. wenn auch die Werte der Ableitungen der gesuchten Funktion interessieren empfiehlt es sich, Normen mit Ableitungen zu verwenden, z. B. bei dem Banachraum der in einem abgeschlossenen Intervall $\langle a, b \rangle$ stetigen und k -mal stetig differenzierbaren Funktionen $f(x)$:

$$(1.2) \quad \|f(x)\| = \sup_{\langle a, b \rangle} \sum_{\nu=0}^k \varphi_\nu(x) |f^{(\nu)}(x)|$$

mit fest gewählten in $\langle a, b \rangle$ nichtnegativen stetigen Funktionen $\varphi_\nu(x)$ mit $\varphi_\nu(x) > 0$ in $\langle a, b \rangle$ (entsprechend bei Funktionen mehrerer Veränderlicher).

Nun sei T ein Operator, der in einem Teilraum F von R definiert ist und dort einer Lipschitzbedingung genügt:

$$(1.3) \quad \|Tf_1 - Tf_2\| \leq K \|f_1 - f_2\| \text{ für alle } f_1, f_2 \in F.$$

F sei ein vollständiger Teilraum, der auch mit R zusammenfallen darf.

Fragt man dann nach Lösungen u der Gleichung

$$(1.4) \quad Tf = f,$$

also nach Fixpunkten der Transformation T , so kann man, ausgehend von einem Element $u_0 \in F$, ein Iterationsverfahren aufstellen:

$$(1.5) \quad u_{n+1} = Tu_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

es gilt dann (vergl. [3], [16]) der

Fixpunktsatz: Außer den obigen allgemeinen Voraussetzungen über R, F und T sei $K < 1$ und es sei mindestens eine der beiden Voraussetzungen erfüllt:

- a) man weiss, dass alle u_n in F liegen, oder
 b) es liegen u_0 und alle Elemente h der Kugel S

$$(1.6) \quad \|h - u_1\| \leq \frac{K}{1-K} \|u_1 - u_0\|$$

in F .

Dann gilt: Die Gleichung (1.4) hat genau eine Lösung u in F , die Folge u_n konvergiert gegen u

$$(1.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\| = 0$$

und u gehört sogar der Kugel S an.

Man hat damit Existenz der Lösung, Eindeutigkeit im Teilraum F und eine Fehlerabschätzung für die Näherung u_1 .

Es gilt dann übrigens allgemein

$$(1.8) \quad \|u - u_n\| \leq \frac{K^n}{1-K} \|u_1 - u_0\| \quad \text{für } n=0,1,2,\dots$$

2. Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen (vergl. L. Collatz [5] S. 32 – 40)

Vorgelegt sei die Randwertaufgabe

$$(2.1) \quad \begin{cases} Lu = f(x_1, \dots, x_m, u) & \text{in } B \\ U_\mu u = \gamma_\mu & \text{auf } \Gamma_\mu \quad (\mu = 1, \dots, k). \end{cases}$$

Dabei sind L und U_μ lineare homogene Differentialoperatoren, f eine gegebene stetige, nach u stetig partiell differenzierbare Funktion. Γ_μ sind $(m-1)$ dimensionale Hyperflächen (gewöhnlich Randflächen des Bereiches B), auf denen die Randbedingungen vorgegeben sind. γ_μ sind gegebene Ortsfunktionen auf Γ_μ . Das Iterationsverfahren (1.5) besteht dann in der Bestimmung von u_{n+1} aus u_n nach

$$(2.2) \quad Lu_{n+1} = f(x_j, u_n) \text{ in } B, \quad U_\mu u_{n+1} = \gamma_\mu \text{ auf } \Gamma_\mu.$$

Die Randwertaufgabe

$$(2.3) \quad Lu = r(x_j) \text{ in } B, \quad U_\mu u = 0 \text{ auf } \Gamma_\mu$$

besitze bei stetigem r die eindeutig bestimmte Lösung

$$(2.4) \quad u(x_j) = \int_B G(x_j, \xi_j) r(\xi_j) d\xi_j$$

mit einer Greenschen Funktion $G(x_j, \xi_j)$.

Es sei H ein Bereich des x_1, \dots, x_m, u -Raumes, der eine Lösung u von (2.1) und die u_1 ($j=0,1,\dots$) enthält; in H gelte

$$(2.5) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| \leq N(x_j).$$

Dann ist bei der Norm (1.1) als Lipschitzkonstante

$$(2.6) \quad K = \sup_B \left[\varphi(x) \cdot \int_B |G(x_j, \xi_j)| N(\xi_j) \frac{1}{\varphi(\xi_j)} d\xi_j \right]$$

verwendbar.

Ist überdies die Greensche Funktion $G(x_j, \xi_j) \geq 0$ und hat die Eigenwertaufgabe

$$(2.7) \quad Lz = \lambda z \text{ in } B, \quad U_{\mu} z = 0 \text{ auf } \Gamma_{\mu}$$

eine in B nichtnegative Eigenfunktion $z(x_j)$ mit dem Eigenwert λ_z , so kann man $\varphi(x_j) = [z(x_j)]^{-1}$ wählen und erhält mit der dann nach (1.1) festgelegten Norm den einfachen (allerdings auch meist etwas größeren, aber ohne Benutzung der Greenschen Funktion berechenbaren) Wert der Lipschitzkonstanten

$$(2.8) \quad K = \frac{1}{\lambda_z} \cdot \text{Max}_B N(x_j).$$

Beispiel I: Bei der Randwertaufgabe (die aus einem mechanischen Problem entspringt) (hier ist y statt u geschrieben):

$$(2.9) \quad -y'' = 1 + (1 + x^2)y, \quad y(\pm 1) = 0$$

lassen sich leicht nach der Iterationsvorschrift

$$(2.10) \quad -y_{n+1}'' = 1 + (1 + x^2)y_n, \quad y_{n+1}(\pm 1) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ausgehend von einer die Randbedingungen erfüllenden Funktion $y_0(x) = \alpha(1 - x^2)$ einige weitere Funktionen der Folge $y_n(x)$ ermitteln. Wählt man α so, dass y_0 und y_1 bei $x=0$ übereinstimmen, so wird $\alpha = \frac{15}{16}$, und

$$(2.11) \quad y_1 - y_0 = \frac{1}{32}(-x^2 + x^6), \quad y_2 - y_1 = \frac{1}{32} \left(\frac{221}{2520} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{30} + \frac{x^8}{56} + \frac{x^{10}}{90} \right).$$

Als Banachraum werde die Menge der in $\langle -1, 1 \rangle$ stetigen Funktionen mit der Norm (1.1) gewählt. Mit Hilfe der hier leicht angebbaren Greenschen Funktion kann man die Lipschitzkonstante K ermitteln (Durchführung der Rechnungen in [5]S. 184) und man erhält:

bei der Gewichtsfunktion $\varphi(x) \equiv 1$ die Abschätzung

$$|y_2(x) - y(x)| \leq 0,0384;$$

und bei der Gewichtsfunktion $\varphi(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)^{-1}$ die Abschätzung

$$|y_2(x) - y(x)| \leq 0,0325 \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right).$$

Der tatsächliche Fehler bei $x=0$ beträgt $|y_2(0) - y(0)| = 0,0271$. In Beispiel II wird gezeigt, wie man die Abschätzung noch verbessern kann.

II. Verwendung allgemeiner Abstandsbegriffe

3. Abstandsbegriff

J. Schröder [11] bis [14] hat den Fixpunktsatz verallgemeinert, indem er als Abstand $\|f-g\|$ zweier Elemente $f, g \in R$ nicht mehr reelle Zahlen, sondern allgemeinere Größen $\rho(f, g)$ verwendet, die selbst Elemente eines halbgeordneten Raumes N sind. R heißt dann ein pseudometrischer Raum; solche Räume wurden von Kurepa [9] eingeführt. Der Abstand ρ soll die üblichen Abstandspostulate erfüllen

$$(3.1) \quad \begin{cases} \rho(f, g) = \theta & \text{genau für } f = g \\ \rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(g, h) \end{cases}$$

für irgend drei Elemente f, g, h aus R .

In N kann man für Elemente ρ, σ mit reellen c_1, c_2 das Element $c_1\rho + c_2\sigma$ bilden; es gelten hierfür die Regeln der Vektoralgebra; für gewisse Elemente ρ hat $\rho \geq \theta$ (θ als Nullelement von N) einen Sinn, und es gelten die üblichen Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen:

$$c \geq 0, \rho \geq \theta \text{ ergibt } c\rho \geq \theta; \text{ ferner } \rho \geq 0, \sigma \geq 0 \text{ ergibt } \rho + \sigma \geq \theta; \theta \leq \rho \leq \theta \text{ gilt genau für } \rho = \theta \text{ und } \rho \geq \sigma \text{ bedeutet } \rho - \sigma \geq \theta.$$

Weiter benötigt man einen Grenzbegriff; für $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \rho$ wird verlangt:

1. Aus $\rho_n = \text{const} = \rho$ folgt $\rho_n \rightarrow \rho$.
2. Bei $\rho_n \rightarrow \rho$ strebt auch jede Teilfolge der ρ_n gegen ρ .
3. Aus $\rho_n \rightarrow \rho, \sigma_n \rightarrow \sigma, c_n \rightarrow c$ folgen $\rho_n + \sigma_n \rightarrow \rho + \sigma, c_n \rho_n \rightarrow c\rho$.
4. Aus $\theta \leq \rho_n \leq \sigma_n$ und $\sigma_n \rightarrow \theta$ folgt $\rho_n \rightarrow \theta$.
5. Aus $\rho_n \rightarrow \rho$ und $\rho_n \geq \theta$ folgt $\rho \geq \theta$.

Diese Forderungen sind so schwach, daß hier viele praktisch wichtige Räume, z. B. mit stetigen Funktionen erfaßt werden.

Wieder liege eine zu lösende Gleichung (1.4) vor, die durch das Iterationsverfahren (1.5) behandelt werde. Für den Operator T gebe es dann einen in N erklärten Operator P mit

$$(3.2) \quad \rho(Tf_1, Tf_2) \leq P\rho(f_1, f_2) \text{ für alle } f_1, f_2 \in F.$$

Der Operator P sei linear, stetig (aus $\rho_n \rightarrow \rho$ folge $P\rho_n \rightarrow P\rho$), positiv (aus $\rho \geq \theta$ folge $P\rho \geq \theta$) und für jedes Element ρ aus N sei die Folge

$$(3.3) \quad \sigma_n = \sum_{j=1}^n \rho^{j-1} \rho$$

konvergent.

Es möge F das Ausgangselement u_0 der Iteration und alle Elemente h der Kugel S

$$\|h - u_1\| \leq \sigma$$

enthalten wobei σ die Ungleichung

$$(3.4) \quad (E - P)\sigma \geq P\|u_1 - u_0\|$$

erfüllt ($E =$ identischer Operator). Dann gelten die gleichen Aussagen wie beim Fixpunktsatz; Gleichung (1.4) hat genau eine Lösung in F , u_n konvergiert gegen u und u gehört sogar der Kugel S an.

4. Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. (vergl. J. Schröder [12])

Die Methode werde auf den speziellen Fall der Randwertaufgabe (2.1) angewendet und es werde der Einfachheit halber angenommen, daß die zugehörige Randwertaufgabe (2.3) eine in B nichtnegative Greensche Funktion $G(x_j, \xi_j)$ besitze. Dann kann man als halbgeordneten Raum N die Menge der in B stetigen Funktionen und als P den Operator

$$(3.5) \quad P\rho(x_j) = \int_B G(x_j, \xi_j) N(\xi_j) \rho(\xi_j) d\xi_j$$

verwenden; man gelangt dann zu folgender Fassung, bei der man die Greensche Funktion nicht explizit zu kennen braucht: Man habe mit Hilfe des Iterationsverfahrens (2.2) zwei Funktionen u_0, u_1 ermittelt und es sei

$$(3.6) \quad |u_1 - u_0| \leq \sigma_0(x_j) \text{ in } B.$$

(3.4) ist dann gleichbedeutend mit

$$(3.7) \quad L\sigma - N(x_j)\sigma \geq N(x_j)\sigma_0(x_j); U_1\sigma = 0;$$

man hat also nur noch eine nichtnegative Funktion $\sigma(x_j)$ zu suchen, welche die homogenen Randbedingungen und in B die Ungleichung (3.7) erfüllt; dann gilt

$$(3.8) \quad |u_1 - u| \leq \sigma(x_j) \text{ in } B.$$

Diese Abschätzung ist in gewissem Sinne nicht mehr verbesserbar. Wenn nämlich speziell in (2.1) $f(x_j, u) = N(x_j) \cdot u$ mit $N \geq 0$ steht, wenn $u_1 - u_0 \geq 0$ in B gilt und man also $\sigma_0 = u_1 - u_0$ setzen kann, so liefert diejenige Funktion $\sigma(x_j)$, für die in (3.7) das Gleichheitszeichen steht, den genauen Fehler $u - u_1 = \sigma$. Es wird also für numerische Zwecke darauf ankommen, die Ungleichung (3.7) „möglichst gut zu erfüllen“ (d. h., daß $L\sigma - N\sigma - N\sigma_0$ der Null möglichst nahe kommt), was man häufig mit Hilfe der Relaxationsmethode durchführen kann.

Beispiel II. Bei der Randwertaufgabe (2.9) werde wie in (2.10), (2.11) iteriert, jetzt aber schärfer abgeschätzt. Hier ist $N(x) = 1 + x^2$; man hat

also nach (3.7) eine Funktion $\sigma(x)$ zu ermitteln, für welche $\sigma(\pm 1) = 0$ und

$$(3.9) \quad -\sigma' - (1+x^2)\sigma \geq (1+x^2)|y_2 - y_1|$$

gilt. Man setzt σ am einfachsten als Polynom mit einigen freien Parametern c_ν an und bestimmt die c_ν nach der erwähnten Relaxationsmethode.

Hier erhält man bereits mit $\sigma = \frac{0,0243}{8}(1-x^2)$ brauchbare Ergebnisse. Nach

(3.8) gilt somit

$$(3.10) \quad |y_2(x) - y(x)| \leq 0,0304(1-x^2).$$

Schon mit diesem Polynom 2. Grades hat man also eine bessere Abschätzung erhalten als in Beispiel I. Nimmt man für $\sigma(x)$ Polynome höheren Grades, so kann man mit der Abschätzung dem wirklichen Fehlerverlauf beliebig nahe kommen, da hier $y_2 - y_1$ in $(-1, 1)$ das Vorzeichen nicht wechselt.

Beispiel III. Randwertaufgabe bei der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung (Wärmeleitungsaufgabe):

$$(3.11) \quad -\Delta u = 1 - u - u^2 \text{ für } r < 1 \text{ (mit } r^2 = x^2 + y^2) \quad (\text{im Bereich } B)$$

mit der Randbedingung

$$(3.12) \quad u = 1 \text{ für } r = 1 \quad (\text{auf dem Rande } \Gamma).$$

Zunächst hat man 2 Funktionen u_0, u_1 zu ermitteln, die die Randbedingung und

$$(3.13) \quad -\Delta u_1 = 1 - u_0 - u_0^2$$

erfüllen.

Es werde $u_1 = 1 + a(1-r^2) + b(1-r^4)$ angesetzt, daraus u_0 berechnet nach (3.13) und die Parameter a, b so bestimmt, daß auch u_0 die Randbedingung erfüllt und u_0 nahe bei u_1 liegt. So wurde gewählt

$$u_1 = 1 - 0,13(1-r^2) - 0,03(1-r^4)$$

$$u_0 = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{7,08 + 1,92r^2} \right).$$

Im Teilbereich der stetigen Funktionen $u(x, y)$ mit $0 \leq u \leq 1$ ist nach (2.5) $N=3$ wählbar; also benötigt man eine auf dem Rande Γ verschwindende Funktion σ mit

$$-\Delta \sigma - 3\sigma \geq 3\sigma_0 \text{ mit } \sigma_0 = |u_1 - u_0|.$$

Hier wird angesetzt

$$\sigma = \sum_{\nu=1}^3 c_\nu (1-r^{2\nu}),$$

und Relaxation gibt rasch brauchbare Werte für die c_v . Man erhält

$$|u - u_1| \leq \sigma = 0,0024 (8 - 9r^2 + r^6).$$

Es liegt hier kein so günstiger Fall wie in Beispiel II vor, da $u_1 - u_0$ in B das Vorzeichen wechselt.

III. Newtonsches Verfahren mit Varianten

5. Verwendung des Begriffs der Ableitung eines Operators

Die zu lösende Gleichung laute jetzt

$$(5.1) \quad Tu = 0$$

und T sei ein im Frechetschen Sinne im Teilraum F differenzierbarer Operator (sonst aber die Voraussetzungen über T, F, R wie in Nr. 1). Die Gleichung möge iterativ behandelt werden, beginnend mit einem Element u_0 in F . Es liegt nahe, die Differenz $\delta_n = u_{n+1} - u_n$ mit Tu_n im Zusammenhang zu bringen; denn beide sollen zugleich verschwinden. Wir setzen daher

$$(5.2) \quad \delta_n = u_{n+1} - u_n = A_n Tu_n \quad \text{oder}$$

$$(5.3) \quad u_{n+1} = V_n u_n \quad \text{mit} \quad V_n = E + A_n T,$$

wobei A_n (oder im einfacheren Falle: $A_n =$ konstante Transformation A) Transformationen sind, die das Nullelement und nur dieses wieder in das Nullelement überführen. Gewöhnlich wählt man als A_n lineare Transformationen.

Hier ordnet sich das gewöhnliche Newtonsche Verfahren unter, vergl. [7] [8] [10]:

$$(5.4) \quad \delta_n = u_{n+1} - u_n = T_n'^{-1} Tu_n,$$

wobei $T_n' = T'(u_n)$ die Ableitung des Operators T an der Stelle u_n und $T_n'^{-1}$ die Inverse dazu bedeutet. Es gibt eine Variante, das vereinfachte Newtonsche Verfahren:

$$(5.5) \quad \delta_n = u_{n+1} - u_n = T_0'^{-1} Tu_n,$$

welches rechnerisch bequemer durchführbar ist, aber nicht so rasch konvergiert als (5.4): Dieses Verfahren ordnet sich dem Iterationsverfahren von I unter und läßt daher eine unmittelbare Fehlerabschätzung zu, die zugleich für das gewöhnliche Newtonsche Verfahren anwendbar ist, da man stets den letzten gerechneten Schritt des gewöhnlichen Newtonschen Verfahrens als ersten Schritt des vereinfachten Newtonschen Verfahrens auffassen kann; zugleich erhält man so für das gewöhnliche Newtonsche Verfahren eine Fehlerabschätzung, bei der man nicht die zweite Ableitung benötigt, vergl. [4].

Da $T_0'^{-1}$ als Inverse einer Ableitung ebenso wie T_0' linear ist, kann man die Ableitung von $V_n = V$ unmittelbar bilden und man erhält für irgendzwei Elemente f, f^* aus F :

$$(5.6) \quad \|Vf - Vf^*\| \leq \sup \|V'\| \|f - f^*\|,$$

man bekommt als Lipschitzkonstante K für das vereinfachte Newtonsche Verfahren

$$(5.7) \quad K = \sup_F \|V'\| \leq \|T_0'^{-1}\| \sup_F \|T_0' - T'\|$$

und (1.8) kann unmittelbar angewendet werden.

6. Gewöhnliches und verbessertes Newtonsches Verfahren

Neben dem vereinfachten Newtonschen Verfahren gibt es verbesserte Newtonsche Verfahren, bei denen man zweite oder höhere Ableitungen heranzieht. Von vielen verschiedenen Arten sei nur die folgende genannt:

Man berechnet δ_n aus

$$(6.1) \quad \theta = T_n + T_n' \delta_n + \frac{1}{2} T_0'' \varphi_n \varphi_n \text{ mit } T_n + T_n' \varphi_n = \theta.$$

Dabei bedeutet $T_n = Tu_n$ und T_0'' die zweite Ableitung an der Stelle u_0 .

Für das gewöhnliche Newtonsche Verfahren gibt es Konvergenzbeweise und Fehlerabschätzungen von Kantorowitsch, Ostrowski u. a. Man kann nun eine allgemeine Theorie aufstellen, die das gewöhnliche Newtonsche Verfahren und eine Reihe ihrer Verbesserungen als Spezialfälle enthält.

Das Verfahren bestehe in der Iterationsvorschrift

$$(6.2) \quad \delta_n = \Phi(T_n'^{-1}, T_n, T_n', T_n'', T_n''', \dots)$$

wo Φ eine gegebene Funktion der Argumente ist; das Verfahren lasse Abschätzungen der Form zu

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \|\delta_n\| &\leq h(b_n, \|T_n\|) \|T_n\| \\ \|T_{n+1}\| &\leq g(b_n, \|T_n\|) \|T_n\|^k, \end{aligned}$$

wobei k eine feste positive Zahl (die „Ordnung“ des Verfahrens), b_n eine obere Schranke für $\|T_n'^{-1}\|$ bedeutet und g und h bekannte in ihren (nicht-negativen) Argumenten monotone Funktionen sind.

Sind gewisse Bedingungen über die Ausgangsnäherung erfüllt, so lassen sich Konvergenz und eine Fehlerabschätzung der Form

$$(6.4) \quad \|u - u_n\| \leq \sigma \frac{\|T_0\|}{1 - \beta^k} \beta^{\frac{k^n - 1}{k - 1}}$$

beweisen.

IV. Monotonie-Eigenschaften

7. Aufgaben monotoner Art

Bei den Methoden von III kann die Bildung des inversen Operators zu T_n' Schwierigkeiten bereiten. Diese lassen sich oft umgehen, wenn der Operator von „monotoner Art“ ist. Man erhält in solchen Fällen unter Annahme der Existenz einer Lösung oft sehr einfache und scharfe Schranken, wie an Beispielen linearer und nichtlinearer Randwertaufgaben, auch bei partiellen Differentialgleichungen, gezeigt werden kann. Ein Operator T heißt in einem Teilraum F eines halbgeordneten Raumes R von „monotoner Art“, wenn für beliebige Elemente f_1, f_2 von F stets aus $Tf_1 \leq Tf_2$ folgt $f_1 \leq f_2$. Setzt man die Existenz u einer Lösung von

$$(7.1) \quad Tu = f$$

voraus, so hat man sofort die Möglichkeit der Eingabelung. Sind nämlich v_1 und v_2 zwei Näherungen mit

$$(7.2) \quad Tv_1 \leq f \leq Tv_2,$$

so folgt $v_1 \leq u \leq v_2$.

Man hat damit zugleich auch für das Relaxationsverfahren, bei dem man den „Defekt“ $d = dv = Tv - f$ einer Näherung v durch Anbringen kleiner Korrekturen dem Nullelement zu nähern sucht, die Möglichkeit einer Fehlerabschätzung; denn hat man z. B. $d \geq \theta$ erreicht, so weiß man $v \geq u$ und entsprechend folgt $v \leq u$ aus $d \leq \theta$. Es wurden eine Reihe von Typen von Randwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen 2. und 4. Ordnung (auch nichtlinearen) zusammengestellt, welche von monotoner Art sind. vgl. z. B. [2] [5] [6].

8. Monotone Operatoren

Es sei wieder (1.4) die zu lösende Gleichung in einem halbgeordneten Raum R .

A. Der Operator T sei monoton nichtfallend, d. h. aus

$$(8.1) \quad u \leq v \quad \text{folge} \quad Tu \leq Tv.$$

Man hat zwei Iterationsfolgen

$$(8.2) \quad u_{n+1} = Tu_n, \quad \hat{u}_{n+1} = T\hat{u}_n \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

wenn dann

$$(8.3) \quad u_0 \leq u_1 \leq \hat{u}_1 \leq \hat{u}_0$$

erfüllt ist, so gilt

$$(8.4) \quad u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq \hat{u}_2 \leq \hat{u}_1 \leq \hat{u}_0.$$

Die Greensche Funktion sei nichtnegativ, dann ist T im Falle $\frac{\partial f}{\partial u} \geq 0$ monoton nichtfallend und im Fall $\frac{\partial f}{\partial u} \leq 0$ monoton nichtwachsend.

Die Voraussetzung V_1 ist, wenn die v_n selbst als Bildelemente von stetigen Funktionen w_n auftreten ($v_n = Tw_n$), wie es beim Iterationsverfahren der Fall ist, für die Greensche Funktion bei gewöhnlichen Differentialgleichungen normalerweise erfüllt und bei einfachen Fällen partieller Differentialgleichungen (wie z. B. bei dem Laplaceschen Ausdruck $Lu = -\Delta u$ bei einem Kreisbereich) ebenfalls. (Näheres in [15]). Für die Voraussetzung V_2 wird die Differenz $\delta = u - w$ betrachtet. Für diese wird

$$(9.2) \quad L\delta = f(x_j, w) - f(x_j, u) = \delta\Phi, \quad U_\mu \delta = 0 \text{ auf } \Gamma_\mu;$$

dabei ist Φ der Wert von $\frac{\partial f}{\partial u}$ an einer Zwischenstelle zwischen u und w .

Wenn in dem durch M gegebenen Streifen $u_0 \leq u \leq u_1$ gilt

$$(9.3) \quad |\Phi| < |\lambda_1|,$$

wobei λ_1 der betragskleinste Eigenwert von $L\delta = \lambda\delta$ in B , $U_\mu \delta = 0$ auf Γ_μ ist, so ist Voraussetzung V_2 erfüllt.

Beispiel IV. Für die Randwertaufgabe

$$(9.4) \quad -y'' = 1 + ay^2, \quad y(\pm 1) = 0$$

sind unter Annahme von $0 \leq u$ für $a > 0$ die Voraussetzungen von A (monoton nichtfallender Operator) und für $a < 0$ die Voraussetzungen von B (monoton nichtwachsender Operator) erfüllt.

Ausgehend von

$$(9.5) \quad u_0 = b(1 - x^2) \text{ erhält man } u_1 \text{ leicht durch einen Iterationsschritt aus}$$

$$-u_1'' = 1 + au_0^2, \quad u_1(\pm 1) = 0;$$

es wird

$$(9.6) \quad u_1 - u_0 = \frac{1 - \lambda^2}{30} [15 - 30b + a b^2 \varphi(\lambda)] \text{ mit } \varphi(x) = 11 - 4x^2 + x^4,$$

im Intervall $\langle -1, 1 \rangle$ gilt $8 \leq \varphi(x) \leq 11$.

A. Es sei $a = 1$. Wählt man zunächst $u_0 \equiv 0$, $\hat{u}_0 = 1 - x^2$, so ist (8.3) erfüllt, es gibt mindestens eine Lösung u^* von (9.4) mit $0 \leq u^*(x) \leq 1 - x^2$. Um bessere Schranken zu erhalten, wird b so gewählt, daß $u_1 - u_0$ in $\langle -1, 1 \rangle$ nichtnegativ oder nichtpositiv ausfällt; man bekommt die günstigsten Werte b als Wurzeln von $15 - 30b + \gamma b^2 = 0$ mit $\gamma = 8$ bzw. 11.

Für $b=0,5941$ wird $u_0 \leq u_1$ und $u_1(0)=0,6294 \leq u^*(0)$,
für $b=0,6595$ folgt $u^* \leq 0,6595(1-x^2)$.

B. Es sei nun $a=-1$. Für $u_0 \equiv 0$ ist (8.7) erfüllt:

$$u_1 = \frac{1}{2}(1-x^2), \quad u_2 = \frac{1-x^2}{30} \left(15 - \frac{1}{4} \varphi(x) \right).$$

Es ist (9.3) mit $|\Phi| \leq 2 \cdot \frac{1}{2} < |\lambda_1| = \frac{\pi^2}{4}$ erfüllt, also gibt es in der Menge M der Funktionen u mit $0 \leq u \leq \frac{1}{2}(1-x^2)$ genau eine Lösung u^* von (9.4) mit $a=-1$. Etwas engere Schranken erhält man mit Hilfe des Abänderungssatzes (8.11); mit $b = \frac{49}{120}$ folgt

$$0,40833 < \frac{49}{120} \leq u^*(0) \leq \frac{1}{2} - \frac{11}{30} \left(\frac{49}{120} \right)^2 < 0,43887.$$

Man hat so mit sehr geringem Rechenaufwand, allein mit der Iteration (9.5) (9.6), Existenz-, Eindeutigkeitsaussagen und Fehlerschranken für eine Lösungsfunktion $u^*(x)$ erhalten. Durch Verwendung von Polynomen höheren Grades lassen sich natürlich leicht wesentlich engere Schranken gewinnen.

Beispiel V. Für die Randwertaufgabe

$$(9.7) \quad \begin{aligned} -\Delta u &= -1 + a(u+u^2) \text{ für } r \leq 1 \text{ (mit } r^2 = x^2 + y^2 \text{) (in } B) \\ u &= 1 \quad \text{für } r = 1 \quad \text{(auf } \Gamma) \end{aligned}$$

sind bei der Annahme von $0 \leq u$ für $a > 0$ die Voraussetzungen von A (monoton nichtfallender Operator) und für $a < 0$ die von B erfüllt. Die Iteration $-\Delta u_1 = -1 + a(u_0 + u_0^2)$, $u_1 = 1$ für $r=1$ läßt sich, ausgehend von

$$(9.8) \quad u_0 = 1 + b(1-r^2)$$

leicht ausführen.

A. Es sei $a=1$, dann wird

$$144(u_1 - u_0) = (1-r^2)\psi \quad \text{mit} \quad \psi = 36 - 63b + 22b^2 - (27b + 14b^2)r^2 + 4b^2r^4.$$

Für $b=0$ ist $u_1 \geq u_0$; wählt man $u_0 = 2-r^2$ (das entspricht $b=1$), so ist (8.3) erfüllt; es gibt also eine Lösung u^* von (9.7) mit $1 \leq u^* \leq 2-r^2$.

Zur Aufstellung engerer Schranken wählt man b einmal so, daß $\psi \geq 0$, und einmal so, daß $\psi \leq 0$ ausfällt. Die günstigsten Werte von b ergeben sich wie in Beispiel IV durch Lösen quadratischer Gleichungen. Mit

$$b = \frac{1}{4}(15 - \sqrt{177}) \text{ bzw. } 24/(21 + \sqrt{89}) \text{ erhält man } 1,516 \leq u(0,0) \leq 1,789.$$

B. Es sei $a = -1$; dann wird $144(u_1 - u_0) = (1 - r^2) \cdot \bar{\psi}$ mit

$$\bar{\psi} = -(108 + 225b + 22b^2) + (27b + 14b^2)r^2 - 4b^2r^4.$$

Für $b=0$ wird $u_1 = 1 - \frac{3}{4}(1 - r^2)$ und es folgt $(u_2 - u_1)144 = (1 - v^2)\bar{\psi}$, wo-

bei man $\bar{\psi}$ mit $b = -\frac{3}{4}$ zu bilden hat. Man stellt fest, daß (8.7) erfüllt ist.

Wieder kann man die Schranken mit Hilfe des Abänderungssatzes verbessern. Mit den Werten $-72/(75 + \sqrt{4569})$ und $-12/(11 + \sqrt{105})$ für b erhält man die Schranken

$$0,4352 \leq u(0,0) \leq 0,4951.$$

Wie in Beispiel IV hat der sehr einfache Ansatz (9.8) Existenz, Eindeigkeitsaussagen und Fehlerschranken geliefert; die Schranken sind noch grob, lassen sich aber natürlich durch Rechnen mit Polynomen höheren Grades verbessern.

EINIGE LITERATURHINWEISE

- [1] G. Aumann, *Reelle Funktionen*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1954, 416 S.
- [2] L. Collatz, *Aufgaben monotoner Art*, Archiv d. Math. 3 (1952) 366—376.
- [3] „ „, *Funktionalanalytische Methoden in der praktischen Analysis*, ZAMP 4 (1953) 327—357.
- [4] „ „, *Vereinfachtes Newtonsches Verfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben*, Arch. d. Math. 5 (1954) 233—240.
- [5] „ „, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 2. Aufl. 1955, 526 S.
- [6] „ „, *Fehlerabschätzungen bei parabolischen Differentialgleichungen*, Anais Acad. Brasileira de Ciencias 28 (1956) 1—9.
- [7] I. Fenyő, *Über die Lösung der im Banachschen Raum definierten nichtlinearen Gleichungen*, Acta math. Acad. Sci. Hungar 5, (1954) 85—93.
- [8] L. Kantorowitch, *The method of Successive Approximations for Functional Equations*, Acta math. 71 (1939) 63—97.
- [9] G. Kurepa, *Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudodistanciés*, C. R. 198 (1934) 1563—1565.
- [10] A. Ostrowski, *Über die Konvergenz und die Abrundungsfestigkeit des Newtonschen Verfahrens*, Mat. Sbornik 2 (1937) 1073—1094.
- [11] J. Schröder, *Nichtlineare Majoranten beim Verfahren der schrittweisen Näherung*, Arch. Math. 7 (1956) 471—484.
- [12] „ „, *Neue Fehlerabschätzungen für verschiedene Iterationsverfahren*, Angew. Math. Mech. 36 (1956) 168—181.
- [13] „ „, *Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstandsbegriff*, Math. Z. 66, (1956) 111—116.
- [14] „ „, *Über das Newtonsche Verfahren*, Arch. Rational Mechanics 1, (1957) 154—180.
- [15] „ „, *Eine Arbeit über monotone Operatoren*, gemeinsam mit L. Collatz, soll demnächst erscheinen.
- [16] J. Weissinger, *Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens*, Math. Nachr. 8 (1952) 193—212.