

Werk

Label: Article

Jahr: 1957

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?311570321_0009|log12

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ELTROVADO DE LA VEKTORAJ ELEMENTOJ DE PLANEDET-ORBITO EL DU OBSERVOJ KAJ LA MOVIĜDIREKTO I (TEORIO)

BOŽ. POPOVIĆ, SARAJEVO

1) La problemoj kaj la solvo-principoj

Ekzistas granda nombro de planedetoj observitaj nur dufoje (aŭ plurfoje, sed kun tiel malgranda tempodistanco ke oni ne povas per la ekzistantaj metodoj kalkuli la orbitalelementojn). Se krome, por unu el la du observoj, estas signita sufiĉe precize ankaŭ la moviĝdirekto laŭ la postsigno sur la fotoplako, aŭ se ni havas la eblecon eltiri ĝin el du (aŭ pluraj) proksimaj observoj, tiam tamen oblas trovi la vojet-elementojn. Pro malpli precizaj donoj pri la moviĝdirekto kaj pro malpligranda tempodistanco, ĉi tiuj elementoj estos malpli certaj ol tiuj kiujn ni trovas el tri preskaŭ egaldistancaj observoj, sed tamen ili ne estas forĵetendaj, ĉar ili povas servi por la unua venanta opozicio kaj ebligi denovan trovon de la planedeto — kiome ĝiaj brilo kaj pozicio ne malebligas la observon dum tiu opozicio. Povas okazi ankaŭ ke la planedeto estis observata en la antaŭa opozicio, same tiel nesufiĉe, kaj la elementoj, respektive efemerido kalkulita baze je tiuj elementoj, ebligas la identigon. Pro tio oni bezonas havi metodon kiu ebligas relative facile eltiri de la donitaj observoj eblan maksimumon koncerne eltrovon de la planedet-elementoj, nome: trovi la orbiton kiu tute kongruos la faritajn observojn (kompreneble en la limoj de la observo-precizeco).

Solvo de la problemoj principe jam ekzistas (ekz. [1], p. 177), sed ĝi ankoraŭ ne estis detaligita tiom ke oni povus efektive atingi la stargitan celon. Por la praktika efektivigo de la solvo oni devis prilabori tute novan metodon, ĉar la ekzistantaj metodoj ne povas helpi. Dum la metodoj de *Gauss*-tipo uzas nur pozici-vektorojn, kaj la *Laplace*-tipaj (metodoj) uzas eltiran akcelon, ĉi tie oni ja devas utiligi eltiran rapidon.

La nova metodo ekiras de la sama ekvacio kiu pere de rapido ligas du najbarajn poziciojn, de kiu ekiras ankaŭ *Lagrange* [4] en sia metodo. Sed *Lagrange* eliminis la rapidon kaj per tio li faligas sian metodon al la *Gauss*-tipo. *Andoyer* [1] kaj aliaj kiuj provas revivigi *Lagrange*-metodon, ekz. [2], [3], [6]) ne eliminis la rapidon, tamen preninte proksimumaĵojn por f kaj g li denove faligas la metodon al *Gauss*-tipo. Sed por solvi ĉi tiun problemon, kiam du el tri observoj estas proksimaj, oni nepre devas konservi la rapidon, t. s. doni tute novan metodon.

Por ke ĉi tiu metodo (kiun oni povas same prilabori en diversaj variantoj) donus utilajn rezultatojn, t. e. maksimumon eltireblan de la haveblaj donoj, oni bezonis plenumi tri taskojn: 1) trovi la procedon por plejble preciza kalkulo de la moviĝdirekto (kio estas farita en la artikolo [9]), 2) efektivigi praktikan kaj certan vojon por precize kalkuli f kaj g (kio estas jam farita en la artikolo [10]) kaj 3) detale prilabori la metodon mem (kio estas enhavo de ĉi tiu verketo). Solvinte ĉi tiujn tri problemojn, mi opinias ke estas verkita nova metodo, principe egalrajta al la metodoj de aliaj tipoj, kun avantaĝa apliko nur en la okazoj kiam ni havas du (aŭ pli) proksimajn, kaj unu iom pli malproksiman, observojn.

De speciala intereso ĉi-rilate estas la metodo de Väisälä [12]. Ĝi estas iusence metodo de transira tipo inter Gauss-a kaj nova tipo, ĉar ĝi ne eliminis suncentran rapidon, sed ankaŭ ne uzas tercentran rapidon (t. e. la derivon de la tercentra observodirekto). Pro neuzo de la unua derivado, forfalas la unua de tri supre menciitaj taskoj, sed aliflanke tio malebligas la uzadon de la metodo por la celo kiun ni pritraktas: eltrovo de la elementoj el konataj du observoj kaj la moviĝdirekto. Estu permesata menciĝi ĉi tie ke la efikeco de la Väisälä-metodo plikreskus se oni por f kaj g uzus la menciitajn tabelojn el mia artikolo [10].

Antaŭ ol transiri al la detaloj, mi montru ĉefajn signaĵojn kaj la solvoprincipon — nur ĝenerale.

La observodirektojn de la planedeto en la momentoj t kaj t_1 ni signu per $\bar{e}$ kaj $\bar{e}_1$, iliajn tercentrajn (aŭ pli bone baricentrajn) distancojn per ρ kaj ρ_1 , per $\bar{R}$ kaj $\bar{R}_1$ la respektivajn poziciojn de la Suno, per $\bar{e}'$, ρ' kaj $\bar{V}$ la derivaĵojn de ĉi tiuj kvantoj por la momento t . Kun tiaj signaĵoj ni havos por la suncentraj pozicioj $(\bar{r}, \bar{r}_1)$ kaj por la rapido $(\bar{v})$ de planedeto:

$$(1) \quad \bar{r} = -\bar{R} + \rho \bar{e}, \quad \bar{r}_1 = -\bar{R}_1 + \rho_1 \bar{e}_1,$$

$$(2) \quad \bar{v} = -\bar{V} + \rho \bar{e}' + \rho' \bar{e}.$$

Ci tiuj vektoroj devas esti ligitaj per

$$(3) \quad \bar{r}_1 = f \bar{r} + \tau g \bar{v},$$

kie $\tau = k(t_1 - t)$ kaj f, g estas la kvantoj dependaj de $\bar{r}$ kaj $\bar{v}$, precize kalkuleblaj laŭ la vojo donita en la verketo [10]. Anstataŭiginte (1) kaj (2) en (3) ni ricevas la vektorekvacion

$$(4) \quad -\bar{R}_1 + \rho_1 \bar{e}_1 = f(-\bar{R} + \rho \bar{e}) + \tau g(-\bar{V} + \rho \bar{e}' + \rho' \bar{e}),$$

en kiu la nekonatoj estas ρ, ρ' kaj ρ_1 . La solvo de ĉi tiu ekvacio estas ankaŭ la solvo de la problemo, ĉar tiam de (1) kaj (2) ni trovas $\bar{r}$ kaj $\bar{v}$, kaj de ili tuj la *vektorajn elementojn*:

$$\bar{C} = [\bar{r} \bar{v}], \quad \bar{D} = [\bar{v} \bar{C}] - \bar{r}/r, \quad T = t - E^{-1}(u_0 - D \sin u_0)$$

kun

$$E^2 C^2 = 1 - D^2, \quad D \sin u_0 = E(\bar{r} \cdot \bar{v}) \\ D \cos u_0 = r \cdot v^2 - 1.$$

(Pli detale pri la vektoraj elementoj v. ekz. en [5], [8] aŭ [11]).

La solvo estas ebla nur en popaŝaj alproksimiĝoj, ĉar f kaj g dependas de la nekonataj $\bar{r}$ kaj $\bar{v}$, t. e. de ρ kaj ρ' . Detaligo de la procedo por solvi la ekvacion (4), konsiderante samtempe la aberacion kaj la paralakson, same kiel la neprecizecon de la preparkalkulo de la vektoro $\bar{e}'$, estas la enhavo de ĉi tiu verketo. En ĝi mi donos du variantojn de ĉi tiu vektora metodo: la „unuan metodon“, en kiu τ troviĝas malkaŝe kaj por f, g estas uzotaj la Tabeloj I aŭ II (de la artikolo [10]) kaj „la duan metodon“, en kiu τ eniras tuj en la esprimon por la rapido, kaj sekve estas utiligota por f, g la Tabelo III.

2) Aberacia influo al la kalkulita movigdirekto

La aberacian influon oni kutime eliminis korektante la obsevomentojn por $-\alpha\rho$, kie α estas la aberacia konstanto, kaj ρ la tercentra distanco. Sed tion oni povas apliki nur se oni konas ρ sufiĉe ĝuste, kio enportas postan ŝanĝon ĉe iuj jam kalkulitaj kvantoj. Krome ni ne bezonas korekti la observomomentojn mem, sed nur la tempodistancojn. Malgrandajn intervalojn (pli ĝuste: kiam estas malgranda diferenco inter tercentraj distancoj je la limoj de la intervalo) ni korektas pro la aberacia influo multiplikante ilin per la faktoro $1 - \alpha\rho'$ (Poincaré [7]). Ĉe pli grandaj tempointervaloj ĉi tio ne sufiĉas, sed tiam oni tamen povas ofte fari la konkludojn konsiderante tuj la aberacian influon, tiel ke la ricevitaj formuloj estas rigoraj, kaj la aplikon de la formuloj dum la kalkulado ni faras pli-malpli rigore — laŭ la ĝustecgrado kiun ni jam atingis kaj kiun ni deziras atingi.

Mi unue haltos ĉe la okazo de eltrovo de la moviĝdirekto el nur tri observoj, el kiuj du proksimas unu al la alia kaj la tria malproksimas ($\tau > 10\tau_0$), por tuj apliki la aberacian influon. Mi montros ke por tia okazo, t. e. por tre neegaldistancaj observoj, sufiĉas apliko de la faktoro (de *Poincaré*) $1 + \alpha\rho'$, per kiu oni devas ĉi tie dividi la kalkulitan valoron $\bar{e}'$.

Se la intervalon de la elektita ekira (meza) observo ĝis la pli proksima observo ni signos per τ_0 , kaj de ĝi ĝis la malpli proksima per τ , kaj se ni vole-nevole limiĝos je membroj de la dua grado ni havos por la momento t_0

$$\bar{e}_0 = \bar{e} + \tau_0 \bar{e}' + \frac{\tau_0^2}{2} \bar{e}'',$$

kaj por la momento t_1

$$\bar{e}_1 = \bar{e} + \tau \bar{e}' + \frac{\tau^2}{2} \bar{e}'',$$

El tiuj du ekvacioj ni facile eltrovas

$$(5) \quad \begin{cases} \bar{e}' = q_0 (\bar{e}_0 - \bar{e}) + q_1 (\bar{e}_1 - \bar{e}), \\ q_0 = \frac{\tau}{\tau_0(\tau - \tau_0)}, \quad q_1 = \frac{-\tau_0}{\tau(\tau - \tau_0)}. \end{cases}$$

La aberacian konstanton ni jam signis per α , kaj la ŝanĝojn devnantaj de la aberaci-apliko ni signu per Δ (en la senco „vera — observa valoro“, akceptante ke en la antaŭaj ekvacioj la valoroj τ estas observaj). Ni havos simple

$$\begin{aligned} \frac{\Delta q_0}{q_0} &= \frac{\Delta \tau}{\tau} - \frac{\Delta \tau_0}{\tau_0} - \frac{\Delta \tau - \Delta \tau_0}{\tau - \tau_0} = q_1 \Delta \tau - \left(q_0 - \frac{2}{\tau - \tau_0} \right) \Delta \tau_0, \\ \frac{\Delta q_1}{q_1} &= \frac{\Delta(-\tau_0)}{-\tau_0} - \frac{\Delta \tau}{\tau} - \frac{\Delta \tau - \Delta \tau_0}{\tau - \tau_0} = q_0 \Delta \tau_0 - \left(q_1 + \frac{2}{\tau - \tau_0} \right) \Delta \tau, \end{aligned}$$

kaj sekve estos

$$\begin{aligned} \Delta(\bar{e}') &= q_0 (\bar{e}_0 - \bar{e}) \left[q_1 \alpha(\rho_1 - \rho) - \left(q_0 - \frac{2}{\tau - \tau_0} \right) \alpha(\rho_0 - \rho) \right] + \\ &+ q_1 (\bar{e}_1 - \bar{e}) \left[q_0 \alpha(\rho_0 - \rho) - \left(q_1 + \frac{2}{\tau - \tau_0} \right) \alpha(\rho_1 - \rho) \right]. \end{aligned}$$

Pro malgrandaj koeficientoj ni povas preni

$$\rho_0 = \rho + \tau_0 \rho', \quad \rho_1 = \rho + \tau \rho',$$

kaj plue ni havos

$$\begin{aligned}\Delta(\bar{e}') &= \alpha q_0(\bar{e}_0 - \bar{e}) \left[\rho' \frac{-\tau_0}{\tau - \tau_0} - \rho' \frac{\tau - 2\tau_0}{\tau - \tau_0} \right] + \alpha q_1(\bar{e}_1 - \bar{e}) \left[\rho' \frac{\tau}{\tau - \tau_0} - \rho' \frac{\tau_0 + 2\tau}{\tau - \tau_0} \right] = \\ &= -\alpha \rho' [q_0(\bar{e}_0 - \bar{e}) + q_1(\bar{e}_1 - \bar{e})].\end{aligned}$$

Sekve, konsiderante (5), ni ricevas

$$(6) \quad \Delta(\bar{e}') = -\alpha \rho' \cdot \bar{e}',$$

kie montras ke la kalkulitan kvanton $\bar{e}'$ ni devas multipliki per $1 - \alpha \rho'$ por trovi la veran valoron (liberigita de la aberacia influo). Per tio la aserto estas pruvita. Kiam ni prenas la tempounuon k^{-1} tagoj tiam la grandec-ordo de (6) estas 10^{-6} , do la sama kiel la influo de observoeraroj al $\bar{e}'$. Pro tio oni devas apliki la aberacian korektaĵon, por plejeble izoli la influon de la observoeraroj.

Se la observoj estas iom pli egaldistancaj, ni ne povas tute uzi la supran rezonadon. Sed la diferencoj estos tiom malgrandaj ke ankaŭ ĉi tie utilos apliki dekomence la ekvacion (6), konsiderante tion poste per la rigora korekto de la tempointervaloj.

En la okazo de eltrovo de moviĝdirekto el pluraj observoj, la esenco de la supra rezonado restas senŝanĝa. Por tion pruvi ni devas ekiri de la solvo (35) el [9], simila al la formo (5). La kvantoj $(\bar{e}_i - \bar{e}_s) : \tau_i$ ne povas multe diferenci de la unua derivivo. El eksplicaj esprimoj de la koeficientoj q_i , kiujn mi donis en [9] kiel (34'), (34''), ktp., oni povas vidi ke la mezaj q_i estas plej grandaj (iliaj denominatoroj estas pli grandaj kaj la numeratoroj pli malgrandaj ol ĉe aliaj) kaj ke aliaj q_i rapide dekreskas irante al la randoj, certe kun la supozo ke la observoj estas numerigitaj kronologie. Plue ni vidas ke pro la samaj kaŭzoj (simile al la supra kalkulo) $\log q_i$ estas sumo de la logaritmoj de diversaj tempointervaloj, kies ŝanĝoj (pro la aberacia influo) estas malgrandaj kvantoj. Ĉar ĉi tiujn malgrandajn kvantojn oni devas multipliki per q_i , pro $\Delta(\log q_i) = \Delta q_i / q_i$, la beracia influo estas same plej granda ĉe la mezaj membroj, kaj multe pli malgranda ĉe la randoj. Kaj ĉar tiuj kvantoj estas malgrandaj, ni povas fari la samajn proksimumigojn kiel en la rezonado por 3 observoj kaj trovi ke ankaŭ ĉi tie valoras proksimuma ekvacio (6).

Per (6) estus iom korektita ĝia valoro de la unua derivivo, t. e. de la eltrovita moviĝdirekto, sed restas ankoraŭ la korekto pro la neglektitaj membroj. Bedaŭrinde ni ne povas scii ĝin kaj pro tio ni ne konsideros ĝin (oni povas fari tion nur en la procedo por pliiĝustigo de la rapido,

pri kiu oni ankoraŭ parolos en ĉi tiu verketo). Pro tio la rilato (13) el [9] (inter la suncentra kaj la lokocentra pozicioj) fariĝas

$$\bar{r}' = -\bar{V}_b - \delta \bar{R}' + \rho \bar{e}' (1 - \alpha \rho') + \rho' \bar{e}.$$

Konsiderinte ĉion tion, kaj krome la fakton ke ni ankoraŭ ne scias la ĝustan valoron de la intervalo τ (al kiu ni devas aldoni la korekton $\Delta\tau$), la ekvacio (4) havas la ĝustan formon

$$(7) \quad -\bar{R}'_1 + \rho'_1 \bar{e}'_1 = f(-\bar{R}_b - \delta \bar{R} + \rho \bar{e}) + g(-\bar{V}_b - \delta \bar{R}' + \frac{\rho}{1 + \alpha \rho'} \bar{e}' + \rho' \bar{e}') (\tau + \Delta\tau).$$

Ĉe tio maldekstre restis la lokocentraj valoroj, ĉar tie oni ne bezonas transiron al la baricentraj (aŭ tercentraj) valoroj, kiel estis la okazo dekstraflanke — pro la bezono por kiom eble pli ĝusta kalkulo de la derivivo $\bar{e}'$.

3) La unua metodo

Eku de la ekvacio (7). Pro pli simpla skribo ni donu al ĝi la formon

$$(8) \quad -\bar{R}_1 + \rho_1 \bar{e}_1 = f(-\bar{R} + \rho \bar{e}) + \tau g(-\bar{V} + s \bar{e}' + \rho' \bar{e}') \cdot \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right),$$

ĉe kio ni ne devas forgesi ke la kvantoj maldekstre estas la lokocentraj, $\bar{e}$ same lokocentra, ke $\bar{R}$ kaj $\bar{V}$ enhavas la aldonajojn eltrovitajn laŭ la procedo el [9] (t. e. $-\bar{R} = -\bar{R}_b - \bar{b}$, $-\bar{V} = -\bar{V}_b - \delta \bar{R}'$), ke ρ, ρ' , estas la baricentraj kvantoj kaj

$$(9) \quad s = \rho : (1 + \alpha \rho').$$

El ĉi tiu ekvacio oni povas trovi la nekonatajn ρ, ρ' kaj ρ_1 , prenante f kaj g ĉiam pli ĝuste per alproksimiĝprocedo, konsidere ke en la komenco de la laboro oni prenas $s = \rho$ kaj ke ĝusta kalkulado de s , kaj uzo de la kvanto $\frac{\Delta\tau}{\tau}$, komenciĝas nur post kelkaj alproksimiĝoj.

Multiplikinte ambaŭ partojn de la ekvacio (8) skalare per $[\bar{e}\bar{e}_1]$, $[\bar{e}_1 \bar{e}']$ kaj $[\bar{e}\bar{e}']$ oni trovas

$$-(\bar{R}_1 \bar{e}\bar{e}_1) = -f(\bar{R}\bar{e}\bar{e}_1) - \tau g[(\bar{V}\bar{e}\bar{e}_1) - s(\bar{e}\bar{e}_1 \bar{e}')] \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right)$$

$$-(\bar{R}_1 \bar{e}_1 \bar{e}') = -f(\bar{R}\bar{e}_1 \bar{e}') + f\rho(\bar{e}\bar{e}_1 \bar{e}') - \tau g[(\bar{V}\bar{e}_1 \bar{e}') - \rho'(\bar{e}\bar{e}_1 \bar{e}')] \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right).$$

$$-(\bar{R}_1 \bar{e}\bar{e}') = \rho_1(\bar{e}\bar{e}_1 \bar{e}') = -f(\bar{R}\bar{e}\bar{e}') - \tau g(\bar{V}\bar{e}\bar{e}') \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right).$$

Ĉi tiujn ekvaciojn oni povas skribi pli simple enkondukante signaĵojn:

$$(10) \quad \begin{cases} C = \overline{ee_1e'}, & f' = 1-f, & g' = 1-g, \\ A = \frac{\overline{Ree_1}}{\tau C}, & A' = \frac{\overline{Re_1e'}}{C}, & A'' = \frac{\overline{Ree'}}{C}, \\ A_1 = \frac{\overline{R_1ee_1}}{\tau C} - A, & A'_1 = \frac{\overline{R_1e_1e'}}{C} - A', & A''_1 = \frac{\overline{R_1ee'}}{C} - A'', \\ \rho_0 = \frac{\overline{Vee_1}}{C} - A_1, & n_0 = \frac{\tau(\overline{Vee_1})}{C} - A'_1, & B = \frac{\tau(\overline{Vee'})}{C}. \end{cases}$$

Tiam la supraj ekvacioj fariĝas

$$-A_1 = f'A - g(\rho_0 + A_1 - s) \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right)$$

$$-A'_1 = f'A' + f\rho - g(n_0 + A'_1 - \tau\rho') \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right)$$

$$-A''_1 = f'A'' + \rho_1 - gB \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right).$$

El la unua ekvacio ni trovas s , poste el la dua ρ' , kaj el la tria ρ_1 , nome

$$s = \rho_0 + A_1 - \frac{A_1 + f'A}{g} + (\rho_0 + A_1 - s) \cdot \frac{\Delta\tau}{\tau}$$

$$(\tau + \Delta\tau) \rho' = n_0 + A'_1 - \frac{A'_1 + f'A' + f\rho}{g} + (n_0 + A'_1) \cdot \frac{\Delta\tau}{\tau}$$

$$\rho_1 = gB - f'A'' - A''_1 - gB \frac{\Delta\tau}{\tau}.$$

Plua simpligo de la solvoj, kun la signaĵoj

$$(11) \quad \begin{cases} \Delta\rho_0 = (\rho_0 + A_1 - s) \cdot \frac{\Delta\tau}{\tau} \\ \Delta n_0 = (n_0 + A'_1) \cdot \frac{\Delta\tau}{\tau}, \end{cases}$$

donas la definitivajn valorojn

$$(12) \quad \begin{cases} s = \rho_0 - \frac{f'A + g'A_1}{g} + \Delta\rho_0 \\ (\tau + \Delta\tau) \rho' = n_0 - \frac{f'A' + g'A'_1 + f\rho}{g} + \Delta n_0 \end{cases}$$

$$(13) \quad \rho_1 = gB \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau} \right) - f' A'' = A_1''.$$

Ĉar ni ĝenerale ne scias eĉ proksimumajn valorojn de ρ kaj ρ' , ni prenos unue ke $\Delta\rho_0=0$, $\Delta n_0=0$, $\Delta\tau=0$, $s \rightarrow \rho$, kaj krome ni alproksimigos f' kaj g' per la konataj esprimoj $f'=3g'$, $g'=\tau^2/(6r^3)$, kiamaniere ni eltrovos proksimume

$$(14) \quad \begin{cases} \rho = \rho_0 - \frac{\tau^2(3A + A_1)}{6r^3 - \tau^2} = \rho_0 - \frac{l}{r^3 - \tau'}, & \tau' = \frac{\tau^2}{6}, \\ \tau\rho' = n_0 - \rho - \frac{\tau^2(3A' + A_1' - 2\rho)}{6r^3 - \tau^2} = n_0 - \rho - \frac{l' - 2\rho\tau'}{r^3 - \tau'}, \\ l = \tau' \cdot (3A + A_1), & l' = \tau'(3A' + A_1'). \end{cases}$$

Solvonte la ekvaciojn

$$\rho = \rho_0 - 1/(r^3 - \tau'), \quad r^2 = (\rho - \overline{Re})^2 + w \quad (\text{v. (16)}),$$

ni eltrovas la unuan proksimuman valoron de ρ , kaj tuj el la dua ekvacio (14) ankaŭ la unuan proksimuman valoron de ρ' .

La ekvacioj (12) estas la fundamentaj ekvacioj de la metodo. Post la eltrovo de la proksimumaj valoroj por ρ kaj ρ' oni bezonas trovi f' kaj g' , t. e. f kaj g , kion ni povas precize fari pere de tabeloj el la artikolo [10]. Nome el

$$(15) \quad \bar{r} = -\bar{R} + \rho \bar{e}, \quad \bar{v} = -\bar{V} + s \bar{e}' + \rho' \bar{e},$$

ni havos

$$\begin{aligned} \bar{r}^2 &= (\rho - \overline{Re})^2 + R^2 - (\overline{Re})^2 \\ \bar{r}\bar{v} &= \overline{RV} - s\overline{Re}' - \rho\overline{Ve} - \rho'\overline{Re} + \rho\rho' = \overline{RV} - s(\overline{Re}' + \overline{Ve}) + \rho'(\rho - \overline{Re}) - s\alpha\rho'\overline{Ve} \\ \bar{v}^2 &= \overline{V}^2 + s^2\bar{e}'^2 + \rho'^2 - 2s(\overline{Ve}') - 2\rho'(\overline{Ve}). \end{aligned}$$

Se ni servus nin per la signaĵoj

$$(16) \quad \begin{cases} \rho - \overline{Re} = x \\ \bar{R}^2 - (\overline{Re})^2 - [\overline{Re}]^2 = w \end{cases}$$

$$(17) \quad -(\overline{Re}' + \overline{Ve}) - \alpha\rho'(\overline{Ve}) = y = -(\overline{Re}' + \overline{Ve}) - \alpha\rho'y''/2$$

$$(18) \quad -2\overline{Ve}' = y', \quad -2\overline{Ve} = y'',$$

ni havos mallonge skribita

$$(19) \quad \bar{r}^2 = x^2 + w$$

$$(20) \quad \overline{rv} = \overline{RV} + sy + \rho' x$$

$$(21) \quad \overline{v^2} = \overline{V^2} + s^2 \overline{e'^2} + \rho'^2 + sy' + \rho' y'',$$

de kie ni facile kalkulas la esprimoja bezonatajn por f kaj g :

$$(22) \quad \epsilon = \tau / (r \sqrt{r}) = \sqrt{\tau^2 / r^3}, \quad \eta = \overline{rv} / \sqrt{r}, \quad \zeta = \overline{rv^2} - 1.$$

Kalkulante ϵ ni uzos τ tian kian ni konas ĝin, kaj kiam ni estos trovintaj $\Delta\tau$ tiam ni uzos la korektitan valoron τ .

Kun ϵ , η , ζ , kaj la Tabelo I (el la artikolo [10]) ni trovos f kaj g . Se la angulo ϵ ne estas granda (en la kadro de la unua duono de la ĉefa Tabelo), tiom pli se ni ne disponas la tabelojn por $\sin \epsilon / \epsilon$, ni povas preni proksimume $\sin \epsilon / \epsilon = (2 + \cos \epsilon) : 3$, kion oni kalkulas pli rapide ol $\sin \epsilon / \epsilon$, kaj kio ne deflankiĝas pli ol oni rajtas (seriigo montras ke tio estas ĉiam malpli ol $\epsilon^4 / 180$). Mi menciuj ankoraŭ ke ni povas, por uzi la Tabelon II, tuj esprimi ϵ en la gradoj, se ni tuj en la komenco de la laboro elkalkulas $\tau^0 = \tau^d \cdot k \cdot 1 R = \tau^d \cdot 0,98560767 = \tau^d : 1,0146025$.

Kun la trovitaj valoroj f kaj g , kaj kun antaŭe trovitaj valoroj (10), ni kalkulos s el la unua ekvacio (12) — sen $\Delta\rho_0$ —, poste ρ' el la dua ekvacio — sen $\Delta\eta_0$ kaj $\Delta\tau$. Tio ebligos pli proksime determini ϵ , η kaj ζ — pere de (19), (20), (21) kaj (22), kaj poste denove kalkuli f kaj g . Post 3—4 alproksimiĝoj, proksimume kiam la dua decimalo en s restas neŝanĝita, ni trovos ρ_1 pere de la ekvacio (13) — sen $\Delta\tau/\tau$ — kaj tiam ni havos

$$(23) \quad \Delta\tau = \alpha\rho_1 - \alpha\rho = \alpha(\rho_1 - \rho).$$

Nun ni povas kalkuli $\Delta\tau/\tau$, kaj tiam $\Delta\rho_0$, $\Delta\eta_0$ el la formuloj (11), kaj poste aplikadi la kompletajn ekvaciojn (12), prenonte ankoraŭ — laŭ (9) — ke $\rho = s(1 + \alpha\rho')$ kaj korektante la antaŭan valoron y por aldona valoro $-\alpha y''/2$. Malpligrandigo de la uzota nombro de la alproksimiĝoj dependos de la kalkulpertoj de la kalkulanto.

Ni daŭrigos la alproksimiĝojn ĝis kiam la solvado havos la sencon, kio dependos de la kvantoj A, A_1, A', A'_1 , same de f, g . Se intertempe ekestas pli grandaj ŝanĝoj en f kaj g , kio ofte okazos, ni denove kalkulos ρ_1 el (13) kaj $\Delta\tau$ el (23) kaj ni ripetos la procedon. Ni devas kontentigi per 3—4 ĝustaj decimaloj. La trovitaj valoroj s (respektive ρ) kaj ρ' donos $\overline{r}$ kaj $\overline{v}$ — pere de (15).

Per tio la tasko estas solvita, ĉar la eltrovo de la vektoraj elementoj donas neniajn malfacilaĵojn — ĝi konsistas en simpla kalkulo de la esprimoj kiujn mi metos ĉe la fino de la punkto 6) de ĉi tiu verketo. Sed konsiderinde la punkton 5) ni ne devas tuj trovi la elementojn, sed unue korekti la trovitajn valorojn $\overline{r}$ kaj $\overline{v}$.

4) La dua metodo

La dua metodo estas fakte la dua varianto, bazita sur la sama principo. Ĉefa en ĝi estas ke ni tuj enportas τ en la kvantojn $\bar{V}$, $\bar{e}'$ kaj ρ' , nome ni kalkulas ĉi tiujn kvantojn nek por tempounuo de 1 tago nek por k^{-1} tagoj, sed por la tempo τ , respektive ρ' por la korektita tempointervalo $\tau_c = \tau + \Delta\tau$. En la esprimo por $\bar{V}$ tio enportas esencan ŝanĝon ĉe el kalkulado, ĉar la trovitan tagan velociton ni devas multipliki per τ (en tagoj), anstataŭ per k^{-1} . Por $\delta\bar{R}'$ kaj $\bar{e}'$ oni devas fakte, kiel ni vidas el la esprimoj (30) de la artikolo [9], trovi la kvantojn

$$(24) \quad \begin{cases} \tau_3 \delta\bar{R}' = \frac{-\tau_3^2}{\tau_1 \tau_{13}} (\bar{b}_2 - \bar{b}_1) + \frac{-\tau_1}{\tau_{13}} (\bar{b}_3 - \bar{b}_2) \\ \tau_3 \bar{e}' = \frac{-\tau_3^2}{\tau_1 \tau_{13}} (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) + \frac{-\tau_1}{\tau_{13}} (\bar{e}_3 - \bar{e}_2), \end{cases}$$

kaj la unuan el ili aldoni al $\bar{V}$ kaj la duan preni anstataŭ $\bar{e}'$. Nenia esenca ŝanĝo estas ankaŭ en la okazo de pli ol tri observoj, sed la avantaĝo de ĉi tiu metodo povas esti kiam ni havas nur tri observojn (aliigitaj al du kaj al la movigdirekto), ĉar τ eniras en la esprimojn (22) kaj ni devus ilin aparte kalkuli por ĉiu plia observo.

Kun tiel preparitaj valoroj de $\bar{V}$ kaj $\bar{e}'$, kaj preninte por la nekonataj ρ kaj

$$(25) \quad n = \tau\rho',$$

la ekvacio (8) ricevos evidente pli simplan aspekton

$$(26) \quad -\bar{R}_1 + \rho_1 \bar{e}_1 = f(-\bar{R} + \rho \bar{e}) + g(-\bar{V} + \rho \bar{e}' + n\bar{e}) \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right).$$

Oni devas mencii ke la faktoro $1 + \alpha\rho'$ forfalis ĉi tie ĉar, en la ekvacioj (24), la tempointervaloj aperas la saman fojon en la numeratoro kiel en la denominatoro. Se ni enkondukus la signaĵojn

$$(27) \quad \begin{cases} C = (\bar{e}\bar{e}_1\bar{e}') & f' = 1 - f, & g' = 1 - g. \\ A = \frac{(\bar{R}\bar{e}\bar{e}_1)}{C}, & A' = \frac{(\bar{R}\bar{e}_1\bar{e}')}{C}, & A'' = \frac{(\bar{R}\bar{e}\bar{e}')}{C}, \\ A_1 = \frac{(\bar{R}_1\bar{e}\bar{e}_1)}{C} - A, & A'_1 = \frac{(\bar{R}_1\bar{e}_1\bar{e}')}{C} - A', & A''_1 = \frac{(\bar{R}_1\bar{e}\bar{e}')}{C} - A'', \\ \rho_0 = \frac{(\bar{V}\bar{e}\bar{e}_1)}{C} - A_1, & n_0 = \frac{(\bar{V}\bar{e}_1\bar{e}')}{C} - A'_1, & B = \frac{(\bar{V}\bar{e}\bar{e}')}{C}, \end{cases}$$

kaj se ni multiplikus ambaŭ flankojn de la ekvacio (26), laŭvice, skalare per $[\overline{ee}_1]$, $[\overline{e}_1 \overline{e}']$, $[\overline{ee}']$, ni ricevus same kiel en antaŭa metodo tri skalarajn ekvaciojn

$$-A_1 - A = -fA - g(\rho_0 + A_1 - \rho) \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right)$$

$$-A'_1 - A' = -f(A' - \rho) - g(n_0 + A'_1 - n) \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right)$$

$$-A''_1 - A'' - \rho_1 = -fA'' - gB \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right)$$

Ilia solvado estas simpla, kiel antaŭe, kaj ni rapide trovas

$$(28) \quad \rho = \rho_0 - \frac{Af' + A_1g'}{g} + (\rho_0 + A_1 - \rho) \cdot \frac{\Delta\tau}{\tau}$$

$$(29) \quad n = n_0 - \frac{f'A' + g'A'_1 + f\rho}{g} + (n_0 + A'_1 - n) \cdot \frac{\Delta\tau}{\tau}$$

$$(30) \quad \rho_1 = gB \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right) - fA'' - A''_1.$$

Ĉar ni ĝenerale ne konas eĉ unuajn proksimumajn valorojn por ρ kaj n , al ĉi tiuj formuloj ni donos la proksimuman formon

$$\rho = \rho_0 - \frac{l}{r^2 - \tau'}, \quad n = n_0 - \rho - \frac{l' - 2\tau'\rho}{r^2 - \tau'}$$

kaj trovi unue ρ el la unua ekvacio kaj el la esprimo por r^2 , kaj poste n el la dua ekvacio — entute same kiel en la unua metodo.

La procedo por efektiva elkalkulo de la valoroj (28), (29) kaj (30) estas fakte la sama kiel en la unua metodo, sed, tamen en kelkaj esprimoj dum la laboro estas grandetaĵoj ŝanĝoj. Antaŭ ĉio por la suncentra velocito oni ankaŭ devas preni por la tempounuo la tempointervalon τ . Tiam, laŭ la signaĵoj en ĉi tiu metodo, ni havos

$$(31) \quad \begin{cases} \bar{r} = -\bar{R} + \rho \bar{e} \\ \bar{v} = -\bar{V} + \rho \bar{e}' + n \bar{e}, \end{cases}$$

pro kio estas

$$r^2 = (\rho - \bar{R}e)^2 + \bar{R}^2 - (\bar{R}e)^2$$

$$\bar{r}v = \bar{R}\bar{V} - \rho(\bar{R}e' + \bar{V}e) + n(\rho - \bar{R}e)$$

$$\bar{v}^2 = \bar{V}^2 + \rho^2 \bar{e}'^2 + n^2 - 2\rho \bar{V}e' - 2n \bar{V}e,$$

respektive

$$(32) \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + w, & \bar{r}\bar{v} = \bar{R}\bar{V} + \rho y + nx \\ \bar{v}^2 = \bar{V}^2 + \rho^2 e'^2 + n^2 + \rho y' + ny'' \end{cases}$$

kun la signaĵoj

$$(33) \quad \begin{cases} \rho - \bar{R}e = x, & \bar{R}^2 - (\bar{R}e)^2 = [\bar{R}e]^2 = w, \\ -(\bar{R}e' + \bar{V}e) = y, & -2\bar{V}e' = y', \quad -2\bar{V}e = y''. \end{cases}$$

Ĉar ĉi tie τ jam eniris $\bar{v}$, anstataŭ la esprimojn (22) ni havos

$$(34) \quad \varepsilon^2 = \frac{(\tau + \Delta\tau)^2}{r^2}, \quad \eta = \frac{\bar{r}\bar{v}}{r^2} \cdot 10 \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right), \quad \zeta = \left[\frac{\bar{v}^2}{r^2} \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right)^2 - \varepsilon^2\right] \cdot 10$$

kaj pere de la Tabelo III el la artikolo [10] ni facile trovos f kaj g . Estas aplikeblaj ankaŭ la Tabeloj I kaj II, sed tiam ni devus preni

$$\eta = \frac{\bar{r}\bar{v}}{\tau \sqrt{r}}, \quad \zeta = r \cdot \frac{\bar{v}^2}{\tau^2} - 1.$$

La plua procedo estas en ĉio la sama kiel en la unua metodo, kun la sola escepto ke fine, post kiam ni trovis $\bar{r}$ kaj $\bar{v}$, por kalkuli la vektorajn elementojn, ni devas preni $\bar{v}/\tau$ anstataŭ $\bar{v}$.

5) Pozici-kaj rapid-korekto

Foje trovitaj la pozicio kaj la rapido de planedeto, per la solvo de la ekvacioj (8) aŭ (26), plejmulte ne kontentigos, ĉar ni ellasis altgradajn membrojn kalkulinte $\bar{e}'$. Por forigi tiun mankon, kaj trovi elementojn de la orbito kiu, en la limoj de la observaroj, tute kongruos almenaŭ la observojn kiujn ni disponas, ni serĉu la korektaĵojn por la tercentra distanco kaj la rapido de la planedeto. Por la momentoj t_0 kaj t_1 ni havos

$$\begin{aligned} (\rho\bar{e})_0 &= f_0 \bar{r} + \tau_0 g_0 \bar{v} + \bar{R}_0^I, & \tau_0 &= k(t_0 - t), \\ (\rho\bar{e})_1 &= f_1 \bar{r} + \tau_1 g_1 \bar{v} + \bar{R}_1^I, & \tau_1 &= k(t_1 - t). \end{aligned}$$

La lokocentrajn distancojn kalkulitajn de ĉi tie multipliku per la observaj unuovektoroj, kaj la diferencon $(O-K)$ signu per $\Delta(\rho_0 \bar{e}_0)$, $\Delta(\rho_1 \bar{e}_1)$, t. s. metu

$$(35) \quad \Delta(\rho_0 \bar{e}_0) = \rho_0 \bar{e}_0 - (\rho \bar{e})_0, \quad \Delta(\rho_1 \bar{e}_1) = \rho_1 \bar{e}_1 - (\rho \bar{e})_1.$$

Se ni nun korektas $\bar{r}$ kaj $\bar{v}$ por $\bar{e} \cdot \Delta \rho$ kaj $\Delta \bar{v}$, ni devus ricevi :

$$\begin{aligned}(\rho_0 + \Delta \rho_0) \bar{e}_0 &= (\rho \bar{e})_0 + \Delta f_0 \bar{r} + f_0 \Delta \rho \cdot \bar{e} + \tau_0 \Delta g_0 \bar{v} + \tau_0 g_0 \Delta \bar{v} \\(\rho_1 + \Delta \rho_1) \bar{e}_1 &= (\rho \bar{e})_1 + \Delta f_1 \bar{r} + f_1 \Delta \rho \cdot \bar{e} + \tau_1 \Delta g_1 \bar{v} + \tau_1 g_1 \Delta \bar{v}.\end{aligned}$$

En ĉi tiuj ekvacioj ni povas fari iujn neglektojn kiuj malpligrandigos laborgustecon, sed kiuj ebligas trovi el ili la nekonatajn $\Delta \rho$, $\Delta \rho_0$, $\Delta \rho_1$, $\Delta \bar{v}$. Unue en la esprimoj por Δf_0 , Δg_0 , Δf_1 , Δg_1 , oni povas neglekti ŝanĝojn kaŭzontaj de negravaj ŝanĝoj de la kvantoj η , ζ , kaj de iliaj koeficientoj — negravaj kompare kun ŝanĝoj de la ĉefaj kvantoj en la esprimoj por f kaj g el [10], nome $\cos \varepsilon$ kaj $\sin \varepsilon/\varepsilon$. Ja ankaŭ en ĉi tiuj korektoj haltigu nur ĉe la duagrada ŝanĝoj de la koeficientoj nome prenu

$$\Delta f_0 = -\varepsilon_0 \Delta \varepsilon_0 = 3 \Delta g_0, \quad \Delta f_1 = -\varepsilon_1 \Delta \varepsilon_1 = 3 \Delta g_1.$$

Konsidere ke

$$\varepsilon^2 = \tau^2 \cdot r^3, \quad r^2 = x^2 + w, \quad x = \rho - \bar{R} \bar{e},$$

la korektaĵoj (sen la apudsignoj) fariĝas

$$\Delta g = \tau^2 \frac{\Delta r}{2 r^4} = \tau^2 x \cdot \Delta \rho / (2 r^5) \sim \frac{\varepsilon^2}{2 r} \cdot \Delta \rho,$$

kaj, konsiderante ankoraŭ (35), ni havos

$$(36) \quad \begin{cases} \Delta(\rho_0 \bar{e}_0) + \Delta \rho_0 \bar{e}_0 = \left(\bar{r} + \frac{\tau_0}{3} \bar{v} \right) \cdot \frac{3 \varepsilon_0^2}{2 r} \Delta \rho + f_0 \bar{e} \Delta \rho + \tau_0 g_0 \Delta \bar{v} \\ \Delta(\rho_1 \bar{e}_1) + \Delta \rho_1 \bar{e}_1 = \left(\bar{r} + \frac{\tau_1}{3} \bar{v} \right) \cdot \frac{3 \varepsilon_1^2}{2 r} \Delta \rho + f_1 \bar{e} \Delta \rho + \tau_1 g_1 \Delta \bar{v}. \end{cases}$$

Elimino de la vektor-korektaĵo $\Delta \bar{v}$ donas ekvacion por eltrovi $\Delta \rho$, $\Delta \rho_0$, $\Delta \rho_1$. Tiucele ni uzu por la malgranda vektoro, kalkulebla tuj el $(O-K)$, la signaĵon

$$(37) \quad \bar{d} = \tau_1 g_1 \Delta(\rho_0 \bar{e}_0) - \tau_0 g_0 \Delta(\rho_1 \bar{e}_1),$$

kaj la elimino, kun iomete da kalkulo, donos

$$\begin{aligned} \bar{d} &= (\tau_1 g_1 f_0 - \tau_0 g_0 f_1) \bar{e} \Delta \rho + \bar{r} (\tau_0 g_1 - \tau_1 g_0) \cdot \frac{3 \varepsilon_0 \varepsilon_1}{2 r} \Delta \rho + \bar{v} (\tau_0^2 g_1 - \tau_1^2 g_0) \frac{3 \varepsilon_0 \varepsilon_1}{2 r} \Delta \rho - \\ &\quad - \tau_1 g_1 \bar{e}_0 \Delta \rho_0 + \tau_0 g_0 \bar{e}_1 \Delta \rho_1. \end{aligned}$$

La esprimojn en la parentezoj ni proksimumigos prenante 1 por ĉiu f kaj g , kio malmulte influos la valoron de la diferencoj sed grave sim-

pligos la ekvacion, ĉar ĝi fariĝos

$$(38) \quad \bar{d} = \tau_{01} \bar{e} \Delta \rho + \tau_0 g_0 \bar{e}_1 \Delta \rho_1 - \tau_1 g_1 \bar{e}_0 \Delta \rho_0 - \left[\bar{r} + \frac{\tau_0 + \tau_1}{3} \bar{v} \right] \frac{3 \tau_{01} \epsilon_0 \epsilon_1}{2 r} \Delta \rho.$$

$$\tau_{01} = k (t_1 - t_0) = \tau_1 - \tau_0.$$

Sekve de malgranda valoro de la produkto $\epsilon_0 \epsilon_1$ oni povas preskaŭ ĉiam malzorgi la lastan membron (kompare kun la antaŭaj) tiel ke la laŭvica multiplikado per $[\bar{e}_0 \bar{e}_1]$, $[\bar{e} \bar{e}_1]$, $[\bar{e} \bar{e}_0]$, donas

$$(39) \quad \begin{cases} \Delta \rho = \frac{(\bar{d}, [\bar{e}_0 \bar{e}_1])}{\tau_{01} (\bar{e} \bar{e}_0 \bar{e}_1)}, \\ \Delta \rho_1 = \frac{(\bar{d} \bar{e} \bar{e}_0)}{\tau_0 g_0 \bar{e} \bar{e}_0 \bar{e}_1}, \\ \Delta \rho_0 = \frac{(\bar{d} \bar{e} \bar{e}_1)}{\tau_1 g_1 \bar{e} \bar{e}_0 \bar{e}_1}. \end{cases}$$

Oni ne bezonas kalkuli ĉiujn tri korektaĵojn, sed nur $\Delta \rho$ kaj unu el aliaj du. Enigonte tiujn du korektaĵojn en unu el la ekvacioj (43), kiam ni denove povas malzorgi la membron kun $\bar{r}$, ni ricevos $\Delta \bar{v}$.

Per tio la problemo estas solvita ĝenerale. Sed pro malzorgoj faritaj dum la laboro oni devos ripeti la procedon, ĉar denove aperos ($O-K$), sed nun kompreneble malpligrandaj. Dum la nova procedo la malzorgoj estos eĉ pli permesataj, ĉar unue la ŝanĝoj de η kaj ζ estos minimumaj, kaj poste pro pli malgrandaj valoroj de $\Delta \rho$ estos pli libere malzorgi la membron kun $\bar{r}$ kaj $\bar{v}$ en la ekvacio (38). Sed se la diferenco inter antaŭaj kaj nunaj $O-K$ ne estas granda, signas ke tiomajn malzorgojn oni ne rajtas fari, precipe ne la membron kun $\bar{r}$, $\bar{v}$, kaj en la sekvanta alproksimiĝo ni konsideros ankaŭ tiun membron — aŭ ni estos pretaj fari pli multajn alproksimiĝojn (ĝis oni atingos kontentigan rezulton, $O-K$ ĉe $\rho \bar{e}$ estu $< 1.10^{-6}$). Oni bezonas plurfoje ripeti la procedon ankaŭ kiam la ekiraj valoroj $\bar{r}$ kaj $\bar{v}$ estas grave eraraj, ĉu pro granda deflankiĝo de la vera je la kalkulita valoro $\bar{e}$, ĉu pro nesufiĉaj antaŭaj alproksimiĝoj, ĉu fine pro malgrandeta (kaj tial nerimarkita) eraro dum la kalkuloj.

Ne malzorgante la membron kun $\bar{r}$ kaj $\bar{v}$, ni signu per

$$\bar{r}' = \left(\bar{r} + \frac{\tau_0 + \tau_1}{3} \bar{v} \right) \cdot \frac{3 \epsilon_0 \epsilon_1}{2 r},$$

kaj multiplikinte skalare kun $[\bar{e}_0 \bar{e}_1]$ kaj $[\bar{e} \bar{e}_1]$ ni trovos

$$\Delta \rho \cdot \left(1 - \frac{\bar{r}' \bar{e}_0 \bar{e}_1}{e \bar{e}_0 \bar{e}_1}\right) = \frac{(\bar{d} \bar{e}_0 \bar{e}_1)}{\tau_{01} (e \bar{e}_0 \bar{e}_1)}$$

$$\Delta \rho_0 = \frac{(\bar{d} \bar{e} \bar{e}_1)}{\tau_1 g_1 (e \bar{e}_0 \bar{e}_1)} + \frac{\bar{r}' \bar{e} \bar{e}_1}{e \bar{e}_0 \bar{e}_1} \cdot \frac{\tau_{01}}{\tau_1 g_1} \Delta \rho.$$

Enigo de ĉi tiuj valoroj en la unuan ekvacion (36) donas ankaŭ la serĉatan korektaĵon $\Delta \bar{v}$. En tia okazo oni povis tuj preni la unuan ekvacion (36) ĉar ni estas antaŭcertaj ke la koeficiento antaŭ $\Delta \bar{v}$ ne estas tro malgranda, ĉar ni ekiris de la okazo kiam oni ne rajtas malzorgi la membron kun $\bar{r}$, $\bar{v}$, kaj tio signifas de la okazo kiam $\tau_0 \tau_1$ havas ne tro malgrandan valoron.

Fine haltigu ĉe unu okazo en kiu la tuta laboro ankoraŭ pli simpliĝas, kaj kiu en la praktiko ne estas malofta, ĉar ĝi apartenas al la okazoj kiam neniuj alia metodo estas eĉ boneta por eltrovo de la orbitelementoj. Temas pri la okazo kiam la tempointervalo τ_0 estas tre malgranda kompare kun la intervalo τ ($\tau > 20 \tau_0$). Tiam en la unua ekvacio (36) oni povas certe forĵeti la membron kun $\bar{r}$, $\bar{v}$. Sed krom tio oni povas forĵeti, ankaŭ la membrojn $\Delta \rho_0 e_0$ kaj $f_0 e \Delta \rho$, ĉar ili havas proksimume kontraŭajn valorojn. Tiam la ekvacio ricevas ege simplan formon-solvon:

$$(40) \quad \Delta \bar{v} = \frac{\Delta (\rho_0 \bar{e}_0)}{\tau_0 g_0}.$$

Pro malgranda τ_0 ĉi tiu korektaĵo povas esti grandeta, sed ĝi estas efektiva, ĉar tiam — pro malzorgita $\rho \cdot \Delta \bar{e}'$ — estas grave malpliigita ĝusteco de la valoro trovita por $\bar{v}$.

Kiam ni estas korektintaj la rapidon ni povas kalkuli $\Delta \rho$ el (39). Sed ĉar efektive $\Delta \bar{v} = -\Delta \bar{V}$, ni povas reveni al la antaŭaj alproksimiĝoj, korektante la tieajn konstantojn ρ_0 kaj n_0 ankoraŭ por

$$-(\Delta \bar{V} e \bar{e}_1):C, \quad -\tau (\Delta \bar{V} e_1 \bar{e}'):C -$$

pro la ligaĵoj (10) kaj (27). Post ripetita solvo de la ekvacioj (12), respektive (28), (29), ni denove trovos ($O-K$) kaj aplikos (40). Se $O-K$ montras nesenteban malpligrandiĝon, tio povas signi nur ke ekzistas iu eraro en la konstantoj por la fundamenta ekvacio, kaj tiam estas plej bone apliki la plenajn ekvaciojn (36), respektive trovi la kvantojn (37) kaj (39).

Se finfine τ_0 estas malgranda ne nur kompare kun τ , sed absolute (du observoj dum la sama vespero), tiam oni ne povas trovi la korektaĵon ΔV , sed tiam ni povas esti certaj ke ĝi estas malgranda, ĉar estas tre malgrandaj la membroj malzorgitaj dum la kalkulo de $\bar{e}'$ — pro la proksimeco de ĉi tiuj du observoj. Tiukaze ni havas nur la duan ekvacion (43), el kiu — malzorginte $\Delta \bar{v}$ — oni povas kalkuli

$$(41) \quad \Delta \rho \cdot \left(f_1 + \frac{\bar{r}'' \bar{e}_1 \bar{e}'}{e e_1 e'} \right) = \frac{(\Delta(\rho_1 \bar{e}_1), \bar{e}_1 \bar{e}')}{e e_1 e'}, \quad r'' = \left(\bar{r} + \frac{\tau_1}{3} \bar{v} \right) \cdot \frac{3 \varepsilon_1^2}{2 r}.$$

LA MENCITA LITERATURO

- [1] Andoyer H., *Cours de Mécanique céleste*, I, Paris 1923, G. Villars.
- [2] Charlier C. L., *The analytical Solution of the Problem of Orbits*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, London 1911, LXXI, pp. 606—609.
- [3] Innes R. T. A., *A Method adapted to Calculating Machines for finding the Paths of Comets and Minor Planets from Short Arcs*, Monthly Notices of the R. Astr. Society London, 1929, LXXXIX, pp. 422—450.
- [4] Lagrange, *Sur un problème de la détermination des orbites des comètes d'après trois observations*, Oeuvres IV, p. 439 — kun malgrandaj ŝanĝoj ripetita en „Mécanique analytique, II“ (Oeuvres XII), kie mi konatigis kun la enhavo de la verkaĵo.
- [5] Milankovič M., *Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeitenproblem*, Editions spéciales, Tome CXXXIII, de l'Académie serbe des sciences, Beograd 1941.
- [6] Moulton F. R., *Memoir on the Theory of Determining Orbits*, Astronomical Journal XXVIII, p. 103.
- [7] Poincaré H., *Sur la détermination des orbites par la méthode de Laplace*, Bulletin astronomique 23, Paris 1906, pp. 161—187.
- [8] Popović B., *Les équations nouvelles des perturbations dans le mouvement des planètes*, Bulletin de l'Académie serbe des sciences, Tome V₁, Beograd 1952, p. 123—126 aŭ Glas CXCVIII, 129—139.
- [9] Popović B., *Pliprecizigoj de eltrovitaj rapidoj de planedetoj*, Bulletin XXI, 1—2, de l'Observatoire astronomique, Beograd 1956, pp. 11—22.
- [10] Popović B., *Nove formule i tablice za f i g*, Rasprave, II odjel, I₇, de Jugoslavija akademino por sciencoj kaj artoj, Zagreb 1955.
- [11] Popović B., *Nouvelle méthode pour obtenir les équations des perturbations des éléments elliptiques*, Mémoires V de l'Observatoire astronomique, Beograd 1949, p. 11—25.
- [12] Väisälä Y., *Eine einfache Methode der Bahnbestimmung*, Mitteilung der Sternwarte der Universität Turku, № 1, Helsinki 1939.