Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 1—2 (1957), Beograd
Yougoslavie

QUELQUES REMARQUES SUR LES CONDITIONS DE SÉPARATION T_1, T_2, T_3 DANS UNE CLASSE D'ESPACES EN TOPOLOGIE GÉNÉRALE

par ZLATKO MAMUZIĆ, BEOGRAD

Dans [3] j'ai défini une classe d'espaces abstraits comme suit. Soient E, M deux ensembles non vides, f une application de l'ensemble-produit $E \times E$ dans M et F une famille de sous-ensembles de M telle que pour chaque X dans F on ait $\{f(a, a) \mid a \in E\} \subset X$. D'autre part, B_F étant une famille d'ensembles inclusivement[1] équivalente à F (on peut supposer tout de suite que B_F soit celle des familles d'ensembles inclusivement équivalentes à F, dont la puissance est la plus petite), posons:

U = la collection de tous les sous-ensembles V de $E \times E$ contenant au moins un élément de la famille de sous-ensembles

$$f^{-1}(B_F) = \{f^{-1}(X) \mid X \in B_F\},\ f^{-1}(X) = \{(x, y) \mid (x, y) \in E \times E,\ f(x, y) \in X\},\ X \in B_F.$$

En topologisant l'ensemble E de la façon suivante:

on dira que $a \in \bar{S}$, $a \in E$, $S \subset E$, si et seulement si pour chaque $X \in F$ il existe au moins un point b de S tel que $f(a, b) \in X$, ou bien par:

on dira que $a \in \bar{S}$, $a \in E$, $S \subset E$, si et seulement si pour chaque V de U il existe au moins un point b de S tel que $(a, b) \in V$, — on obtient la même topologie généralisée sur E et les deux systèmes de voisinages

$$W_X(a) = \{b \mid b \in E,\ f(a, b) \in X\},\ X \in F,\ a \in E, \tag{1}$$

resp.

$$V(a) = \{b \mid b \in E,\ (a, b) \in V\},\ V \in U,\ a \in E, \tag{2}$$

sont équivalents.

---

[1] On dira que les familles d'ensembles Φ et Ψ sont inclusivement équivalentes si pour chaque élément $\varphi \in \Phi$ il existe au moins un élément $\psi \in \Psi$ tel que $\psi \subset \varphi$, et inversement.

Pour qu'un espace ainsi défini soit à topologie transitive (c. à. d. pour qu'il vérifie l'axiome de transitivité $\alpha: \bar{\bar{S}}=\bar{S}, S\subset E$) une condition nécessaire et suffisante et la suivante ([3], p. 5):

(*e*) *Pour tout triplet de points* a, b, c *de* E *et chaque* $X\in F$ *il existe* Y, Z *dans* F *tels que*

$$[f(a, b) \in Y \,\&\, f(b, c) \in Z] \rightrightarrows [f(a, c) \in X].$$

La condition (*e*) étant supposée vérifiée, l'espace défini plus haut peut être reconstruit par les intérieurs des voisinages (1) et si l'on pose

$$\bigcup_{a\in E}\{f(a, b) \mid b\in int\, W_X(a)\} = X^i,\ X\in F,$$

on voit immédiatement que $W_{X^i}(a) = int\, W_X(a)$ pour tout point $a\in E$ et chaque $X\in F$.

Considérons encore la condition:

(*s*) *Pour tout couple de points* a, b *dans* E *et chaque* $X\in F$ *il existe au moins un élément* $Y\in F$ *tel que*

$$[f(b, a) \in Y] \rightrightarrows [f(a, b) \in X].$$

Ceci étant, démontrons tout d'abord les propositions suivantes.

P r o p o s i t i o n 1. *Si les conditions* (*e*) *et* (*s*) *sont vérifiées, pour tout couple de points* a, b *dans* E *et chaque* $X\in F$ *il existe* Y_0, X_0 *dans* F *tels que* $f(b, a) \in Y_0^i$ *entraîne* $f(a, b) \in X_0^i$.

Démonstration. Soit (a, b) un élément quelconque de $E\times E$. Les éléments $f(b, a)$ et $f(a, b)$ sont bien déterminés et, d'après (*s*), pour chaque $X\in F$ il existe $Y\in F$ tel que si $f(b, a)\in Y$ on a $f(a, b)\in X$. Un élément X de F étant choisi et $Y\in F$ ainsi déterminé, il existe Y_0, X_0 dans F tels que $W_Y(b)\subset W_{Y_0^i}(b)$ et $W_X(a)\subset W_{X_0^i}(a)$, puisque l'espace correspondant peut être reconstruit par les intérieurs des voisinages (1). C'est ainsi que $f(b, a)\in Y_0^i$ et, puisque $f(a, b)\in X$, on doit avoir aussi $f(a, b)\in X_0^i$, c. q. f. d.

P r o p o s i t i o n 2. *Si la condition* (*s*) *est vérifiée et si* $a\,\bar{\in}\,\bar{S}$, $a\in E$, $S\subset E$, *pour tout point* $x\in S$ *il existe* $X\in F$ *tel que* $a\,\bar{\in}\, W_X(x)$.

Démonstration. Supposons le contraire: soit $a\in W_X(x)$ pour chaque $X\in F$, x étant un point arbitraire de S ne satisfaisant pas à l'énoncé de la proposition, on aurait donc $f(x, a)\in X$ pour chaque $X\in F$. La condition (*s*) étant vérifiée par hypothèse, cela signifierait que pour tout X dans F il existe effectivement un $Y\in F$ tel qu'on ait:

$$[f(x, a) \in Y] \rightrightarrows [f(a, x) \in X],$$

c. à. d. on devrait avoir $x \in W_X(a)$ pour chaque $X \in F$, ce qui est impossible vu que $a \in' \overline{S}$, c. q. f. d.

Si la condition (s) est vérifiée et si $a \in' \overline{S}$, $a \in E$, $S \subset E$, d'après la proposition pécédente on aura $a \in' W_{X^i}(x)$, $x \in S$, pour au moins un élément X de F puisque $W_{X^i}(x) = int\, W_X(x) \subset W_X(x)$.

Posons

$$\bigcup_{x \in S} W_{Z_x^i}(x) = H,$$

Z_x étant un élément de F tel que $a \in' W_{Z_x^i}(x)$. D'après la proposition 2, Z_x existe pour chaque point x dans S.

Proposition 3. *Si les conditions (e) et (s) sont vérifiées et si $a \in' \overline{S}$, $a \in E$, $S \subset E$, il existe au moins un élément X_a de F tel que le voisinage $W_{X_a^i}(a)$ soit disjoint de l'ensemble H.*

Démonstration. Supposons au contraire qu'un tel ensemble $X_a \in F$ n'existe pas, on aurait donc

$$W_{X^i}(a) \cap H \neq v, \quad (v = \text{l'ensemble vide}),$$

pour chaque $X \in F$. Par conséquent, pour tout $X \in F$ il existerait un point $c \in E$ dépendant de X et appartenant à la fois à $W_{X^i}(a)$ et à H, c. à. d.

$$c \in W_{X^i}(a), \quad c \in \bigcup_{x \in S} W_{Z_x^i}(x), \quad Z_x \in F, \quad X \in F.$$

Le point c appartenant à H, désignons par ξ le point de S, dépendant de X, dont le voisinage $W_{Z_\xi^i}(\xi)$ contient le point c. On aurait

$$f(a, c) \in X^i, \quad f(\xi, c) \in Z_\xi^i,$$

pour chaque $X \in F$, c et ξ dépendant de X. Vu que pour chaque $X \in F$ il existe ξ tel que $f(\xi, c)$ se trouve dans Z_ξ^i et la condition (s) étant supposée satisfaite, d'après la proposition 1 cela signifie que pour chaque $Y \in F$ il existe $\xi \in S$ et $Y_0 \in F$ tel que

$$[f(\xi, c) \in Z_\xi^i] \rightrightarrows [f(c, \xi) \in Y_0^i].$$

En conséquence, on devrait avoir les implications suivantes:

$$[f(a, c) \in X^i \;\&\; f(\xi, c) \in Z_\xi^i] \rightrightarrows [f(a, c) \in X^i \;\&\; f(c, \xi) \in Y_0^i],$$

$$[f(a, c) \in X^i \;\&\; f(c, \xi) \in Y_0^i] \rightrightarrows [f(a, \xi) \in X^i],$$

la dernière résultant de la proposition suivante ([3], p. 5): *si la condition* (*e*) *est satisfaite, pour tout triplet de points* α, β, γ *dans* E *et chaque* $X \in F$ *il existe* $Y \in F$ *tel que*

$$[f(\alpha, \beta) \in X^i \;\&\; f(\beta, \gamma) \in Y^i] \rightrightarrows [f(\alpha, \gamma) \in X^i].$$

On voit donc que pour chaque $X \in F$ il existerait un point ξ dans S tel que $\xi \in W_{X^i}(a)$, d'où $a \in \overline{S}$ contrairement à l'hypothèse, c. q. f. d.

De ce qui précède on déduit immédiatement les théorèmes suivants.

Théorème 1. *Si les conditions* (*e*) *et* (*s*) *sont vérifiées, tout espace défini par le système de voisinages* (1) *correspondant vérifie l'axiome de séparation* T_3.

Démonstration. En effet, dans tout espace de voisinages de M. Fréchet vérifiant l'axiome de transitivité α, l'axiome de séparation T_3 équivaut ([1], p. 43) à la condition suivante, dûe à A. Appert:

T_3'. *Si un point* a *n'est pas contigu à un ensemble* S, *c. à. d. si* $a \in {}'\overline{S}$, a *et* S *possèdent des entourages disjoints.*

Or l'ensemble $H = \bigcup_{x \in S} W_{Z_x^i}(x)$ est un entourage de S et, d'après la proposition 3, il existe un entourage $W_{X_a^i}(a)$ du point $a \in {}'\overline{S}$ disjoint de H. Ainsi la condition T_3' de A. Appert est satisfaite et puisque tout espace de voisinages (1) satisfaisant à la condition (*e*) est à topologie transitive, l'axiome T_3 est aussi vérifié[1], c. q. f. d.

Théorème 2. *Si les conditions* (*e*), (*s*) *sont vérifiées et si la condition*

$$\bigcap_{X \in F} X = \{f(a, a) \mid a \in E\}, \tag{3}$$

est satisfaite tout espace défini par le système de voisinages (1) *correspondant vérifie l'axiome de séparation* T_2.

Démonstration. En effet, nous avons démontré ([3], p. 9) que (3) est la condition nécessaire et suffisante pour que l'espace défini par le système de voisinages (1) vérifie l'axiome de séparation T_1. Or, dans tout espace de voisinages on a l'équivalence $[T_1 \;\&\; T_3] \leftrightarrows [T_2 \;\&\; T_3]$ d'où le théorème 2, vu le théorème 1, c. q. f. d.

---

[1] Si l'on remarque que sous la condition (*e*) l'ensemble $\overline{S}$ est fermé, on obtient le théorème 1 comme une conséquence immédiate de la proposition 3.

Les résultats précédents montrent bien le rôle important des conditions (e) et (s) pour qu'un espace défini par le système de voisinages (1) vérifie les axiomes de séparation T_2 et T_3.

Cependant, on peut obtenir les résultats analogues si au lieu d'introduire la condition (s), on assujetit la famille F à la condition d'être inclusive[1] dans M. En effet, nous avons démontré ([3], p. 11—12) les propositions et les théorèmes suivants:

P r o p o s i t i o n 4. *La famille F étant inclusive dans M, le système de voisinages* (1) *de chaque point $a \in E$ est inclusive dans E.*

P r o p o s i t i o n 5. *La famille F étant inclusive dans M, la fermeture de chaque voisinage dans* (1) *est un élément de* (1).

P r o p o s i t i o n 6. *La famille F étant inclusive dans M, la famille des fermetures de tous les voisinages* (1) *de chaque point $a \in E$ forme un système de voisinages équivalent au système* (1).

Vu la proposition 6 on déduit immédiatement:

T h é o r è m e 3. *Si la famille F est inclusive dans M et si la condition* (e) *est satisfaite tout espace défini par le système de voisinages* (1) *correspondant vérifie l'axiome de séparation T_3.*

T h é o r è m e 4. *Si la famille F est inclusive dans M et si la condition* (3) *est satisfaite tout espace défini par le système de voisinages* (1) *correspondant vérifie l'axiome de séparation T_2.*

En effet, la supposition (3) équivaut au fait que $\bigcap\limits_{X \in F} W_X(a) = \{a\}$, pour chaque point $a \in E$. D'après la proposition 6 on aura

$$[\bigcap_{X \in F} W_X(a) = \{a\}] \leftrightarrows [\bigcap_{X \in F} \overline{W_X(a)} = \{a\}], \quad a \in E,$$

c'est-à-dire

$$[b \neq a] \rightrightarrows [b \in' \bigcap_{X \in F} \overline{W_X(a)}];$$

donc, il existe $Y \in F$ tel que $b \in' \overline{W_Y(a)}$, c. à. d. il existe $Z \in F$ tel que $W_Z(a) \cap W_Y(a) = v$, c. q. f. d.

D'autre part, si la famille F est semi-multiplicative (ou un filtre sur M) on peut prouver ([3], p. 14) que la simultanéité des conditions (e) et (s) équivaut à la condition:

---

[1] La famille d'ensembles Φ est inclusive dans un ensemble P si l'on a l'implication suivante:

$$[\varphi \in \Phi \,\&\, P \supset \psi \supset \varphi] \rightrightarrows [\psi \in \Phi].$$

(*u*) *Pour tout triplet de points a, b, c de E et pour tout* $X \in F$ *il existe* $Y \in F$ *tel que*

$$[f(a, b) \in Y \,\&\, f(a, c) \in Y] \rightrightarrows [f(b, c) \in X].$$

Avant de voir quelques conséquences des résultats précédents remarquons encore que dans [4], p. 201, nous avons caractérisé les espaces semi-uniformes de A. Appert ([1], p. 133) par la classe[1] des espaces définis par le système de voisinages (1) vérifiant les conditions (*e*) et (*s*). Si de plus la famille F est semi-multiplicative (ou un filtre sur M) et si par $E(M_F)$ on désigne la classe des espaces définis par les systèmes de voisinages (1) correspondants, on peut caractériser ([5], p. 4—6) les espaces uniformisables (et separés) au sens de la définition de N. Bourbaki ([2], p. 156) par la classe d'espaces $E(M_F)$ vérifiant la condition (*u*) (et la condition (3)).

Une conséquence des considérations précédentes et la suivante. D'après le théorème 1, les conditions (*e*) et (*s*) entraînent l'axiome de séparation T_3, c. à. d. que dans ce cas on obtient un espace $(V_{\alpha T_3})$. Si de plus la condition (3) est satisfaite on aura un espace $(V_{\alpha\, T_1\, T_3})$, c. à. d. d'après le théorème 2, un espace $(V_{\alpha\, T_2\, T_3})$. Si l'on y suppose encore que la famille F est semi-multiplicative, ce qui implique l'axiome de distributivité D (si $S_1 \subset E, S_2 \subset E$, alors $\overline{S_1 \cup S_2} \subset \overline{S}_1 \cup \overline{S}_2$), on aura un espace $(V_{\alpha\, D\, T_2\, T_3})$, c. à. d. un espace topologique régulier. Mais, d'après la remarque précédente les espaces uniformisables et séparés peuvent être caractérisés dans ce cas par la classe des espaces $E(M_F)$ vérifiant les conditions (*e*), (*s*) et (3). Puisqu'au moyen des collections U, définies au début de cet article, on peut passer aux structures uniformes, on voit bien d'où provient la proposition intéressante dûe à N. Bourbaki ([2], p. 142): *Pour que la topologie d'un espace uniforme soit séparée, il faut que sa structure uniforme soit séparée; inversement, tout espace uniforme dont la structure uniforme est séparée est régulier.* En effet, elle provient des conditions (*e*), (*s*) et (3) (c. à. d. de leurs équivalents exprimés au moyen d'éléments de la collection U), la propriété de F d'être semi-multiplicative n'impliquant que l'axiome de distributivité D et offrant une possibilité d'introduire la condition (*u*) au lieu de (*e*) et (*s*). Si la famille F est semi-multiplicative et inclusive dans M c. à. d. si F est un filtre sur M, les théorèmes 1, 2, 3 et 4 montrent que, dans ce cas, on obtient les mêmes conséquences de deux côtés à la fois.

Comme une autre conséquence des résultats présentés plus haut notons encore ici que par le théorème 1 nous avons démontré un résultat déjà entrevu par nous ([4], p. 202) et obtenu comme suit. A. Appert a

---

[1] Autrement dit, la classe des espaces semi-uniformes est topologiquement identique à la classe des espaces définis par les systèmes de voisinages (1) vérifiant les conditions (*e*) et (*s*).