

Werk

Label: Article

Jahr: 1956

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?311570321_0008|log8

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

THÉOREME DE JACOBI POUR LE SYSTÈME¹⁾ D'ÉQUATIONS EN INVOLUTION DE DARBOUX-LIE

par BORIVOJ RACHAJSKY, BEOGRAD.

Sommaire. Formation de l'intégrale générale des caractéristiques à l'aide de l'intégrale complète pour un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre en involution de Darboux-Lie.

Introduction. Jacobi [1] a étudié ce problème concernant une équation du premier ordre. Les résultats de ces recherches sont généralisés par N. Saltykow [2, 4], Th. De-Donder [3] etc.

Pour le cas d'un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre en involution de Darboux-Lie ce problème avait été traité par E. Goursat [5]. Cependant son procédé peut être simplifié et mis sous la forme analogue à celle de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. On y réussit grâce à la condition qui doit satisfaire l'intégrale complète du système considéré que nous venons de trouver [6].

L'étude de ce problème est d'autant plus intéressant que N. Saltykow avait récemment résolu le problème inverse [7]. Généralisant la notion des fonctions des caractéristiques il avait obtenu les conditions nécessaires et suffisantes pour la formation d'une intégrale complète du système d'équations Darboux-Lie à l'aide de l'intégrale des caractéristiques.

I. Considérons le système en involution de Darboux-Lie

$$(1) \quad \begin{cases} r + f(x, y, z, p, q, s) = 0 \\ t + \varphi(x, y, z, p, q, s) = 0 \end{cases}$$

et le système correspondant des caractéristiques

$$(1') \quad dx = \frac{dy}{f_s} = \frac{dz}{p + f_s q} = \frac{dp}{-f + f_s s} = \frac{dq}{s - \varphi f_s} = \frac{ds}{-D_y f}.$$

¹⁾ Саопштено у Друштву математичара и физичара НР Србије 10.IV.1956.

E. Goursat [5], partant de l'intégrale complète

$$(2) \quad F(x, y, z, C_1, C_2, C_3, C_4) = 0$$

en tire, grâce aux considérations géométriques, une courbe caractéristiques moyennant l'équation (2) et l'équation suivante

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial C_1} + \frac{\partial F}{\partial C_2} \frac{dC_2}{dC_1} + \frac{\partial F}{\partial C_3} \frac{dC_3}{dC_1} + \frac{\partial F}{\partial C_4} \frac{dC_4}{dC_1} = 0.$$

L'équation (3) définit la fonction y de la variable x . Parce que les multiplicités correspondantes des caractéristiques des éléments du second ordre satisfont aux équations différentielles des caractéristiques, E. Goursat obtient deux relations

$$(4) \quad \Phi_i \left(C_1, C_2, C_3, C_4, \frac{dC_2}{dC_1}, \frac{dC_3}{dC_1}, \frac{dC_4}{dC_1} \right) = 0, \quad (i = 1, 2)$$

entre les sept paramètres $C_1, C_2, C_3, C_4, \frac{dC_2}{dC_1}, \frac{dC_3}{dC_1}, \frac{dC_4}{dC_1}$ figurant dans l'équation (3). Éliminant grâce aux relations (4) deux des paramètres, la courbe caractéristique ne dépend que de cinq paramètres. En pratique la détermination des relations mentionnées (4) et les éliminations correspondantes présentent souvent de très grandes difficultés.

II. Mettons l'intégrale complète du système (1) sous la forme

$$(5) \quad z = V(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4),$$

en posant

$$(6) \quad \Delta_{xy} \equiv D \left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xy}}{C_1, C_2, C_3, C_4} \right) \neq 0.$$

Il est aisé de démontrer que les formules

$$(5') \quad z = V, \quad p = V_x, \quad q = V_y, \quad s = V_{xy}$$

définissent les quatre premières intégrales du système (1'). En effet, on a

$$\frac{dz}{dx} = V_x + V_y \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dp}{dx} = V_{x^2} + V_{xy} \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dq}{dx} = V_{xy} + V_{y^2} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{ds}{dx} = V_{x^2y} + V_{xy^2} \frac{dy}{dx},$$

et en vertu des formules connues [6]

$$(f_s) = -\frac{\Delta_{x^2}}{\Delta_{xy}}, \quad -(D_y f) = V_{x^2y} - \frac{\Delta_{x^2}}{\Delta_{xy}} V_{xy^2}$$

et aussi

$$\frac{dy}{dx} = (f_s),$$

le symbole () désignant le résultat de la substitution de z, p, q, s respectivement par V, V_x, V_y, V_{xy} et $\Delta_{x^2}, \Delta_{y^2}$ les déterminants fonctionnels

$$\Delta_{x^2} \equiv D \left(\frac{V, V_x, V_y, V_{x^2}}{C_1, C_2, C_3, C_4} \right), \quad \Delta_{y^2} \equiv D \left(\frac{V, V_x, V_y, V_{y^2}}{C_1, C_2, C_3, C_4} \right),$$

on obtient, en éliminant les constantes C_i définies par les formules (5'), les équations suivantes

$$\frac{dz}{dx} = p + qf_s; \quad \frac{dp}{dx} = -f + sf_s.$$

$$\frac{dq}{dx} = s - \varphi f_s, \quad \frac{ds}{dx} = -D_y f.$$

III. En différentiant les identités évidentes

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f \left(x, y, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial x \partial y} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \varphi \left(x, y, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) = 0,$$

par rapport à C_k on obtient

$$(7) \quad \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial C_k} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{\partial V}{\partial C_k} + \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_k} + \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial C_k} + \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y \partial C_k} = 0$$

$$(8) \quad \frac{\partial^3 V}{\partial y^2 \partial C_k} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial V}{\partial C_k} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_k} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial C_k} + \\ + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y \partial C_k} = 0,$$

$$(k = 1, 2, 3, 4).$$

Grâce à l'involution du système (1) et aux équations des caractéristiques (1') on a les relations

$$(9) \quad \frac{dy}{dx} = (f_s) = \frac{1}{(\varphi_s)}.$$

Il est connu que l'intégrale complète (5) vérifie identiquement la condition, [6],

$$(10) \quad \Delta_{x^2} \Delta_{y^2} - \Delta_{xy}^2 = 0.$$

En vertu de (6), on conclut de (10)

$$(11) \quad \Delta_{x^2} \neq 0, \quad \Delta_{y^2} \neq 0.$$

En éliminant $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)$, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)$, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)$ des équations (7) et (8) on obtient, en vertu des (6), (9) et (11), deux relations pour définir la fonction y

$$(12) \quad \Delta_{x^2} dx + \Delta_{xy} dy = 0,$$

$$(13) \quad \Delta_{xy} dx + \Delta_{y^2} dy = 0.$$

Or, elles se confondent, grâce à la condition (10).

IV. Introduisons les symboles suivants

$$(i, j, k) \equiv D\left(\frac{V, V_x, V_y}{C_i, C_j, C_k}\right), \quad (i, j) \equiv D\left(\frac{V_x, V_y}{C_i, C_j}\right), \quad (\overline{i, j}) \equiv D\left(\frac{V, V_x}{C_i, C_j}\right), \quad (\overline{i, \overline{j}}) \equiv D\left(\frac{V, V_y}{C_i, C_j}\right)$$

Considérons trois hypothèses suivantes:

a) Supposons, d'abord, que le système (1) n'admet pas d'intégrales intermédiaires avec une constante arbitraire, c'est-à-dire que $(i, j, k) \neq 0$, $(i, j, k = 1, 2, 3, 4)$. Utilisons les identités évidentes

$$(14) \quad \begin{cases} (\overline{i, l}) (i, \overline{j}, k)_x - (\overline{i, k}) (i, j, \overline{l})_x + (\overline{i, j}) (i, k, \overline{l})_x = V_i \Delta_{x^2}, \\ (\overline{i, l}) (i, j, k)_y - (\overline{i, k}) (i, j, \overline{l})_y + (\overline{i, j}) (i, k, \overline{l})_y = V_i \Delta_{xy}, \\ (\overline{i, l}) (i, j, k)_x - (\overline{i, k}) (\overline{i, j}, l)_x + (\overline{i, j}) (i, k, \overline{l})_x = V_l \Delta_{xy}, \\ (\overline{i, l}) (i, j, k)_y - (\overline{i, k}) (\overline{i, j}, l)_y + (\overline{i, j}) (i, k, \overline{l})_y = V_l \Delta_{y^2}, \end{cases}$$

où $()_x$ et $()_y$ désignant les dérivées partielles correspondantes par rapport aux x et y . On a de plus les identités

$$(i, l) (\overline{i, k}) - (\overline{i, k}) (\overline{i, l}) = -V_l(i, k, l),$$

$$(i, j) (\overline{i, k}) - (\overline{i, k}) (\overline{i, j}) = V_l(i, j, k).$$

Formons les identités suivantes

$$(i, k) \Delta_{xy} - (\overline{i, k}) \Delta_{x^2} = (i, k, l) (i, j, k)_x - (i, j, k) (i, k, l)_x$$

$$(i, k) \Delta_{y^2} - (\overline{i, k}) \Delta_{xy} = (i, k, l) (i, j, k)_y - (i, j, k) (i, k, l)_y$$

qui donnent, grâce à la condition (10)

$$(10') \quad \frac{\frac{\partial [(i, k, l)]}{\partial x} \frac{\partial [(i, j, k)]}{\partial y}}{\Delta_{x^2}} = \frac{\frac{\partial [(i, k, l)]}{\partial y} \frac{\partial [(i, j, k)]}{\partial x}}{\Delta_{xy}}.$$

L'équation (12), introduisant la désignation

$$\alpha \equiv \frac{(i, k, l)}{(i, j, k)},$$

admet l'intégrale sous la forme suivante

$$\alpha = \text{const.}, \quad \alpha_x \neq 0, \quad \alpha_y \neq 0.$$

En effet, grâce aux conditions (6), (10), (11) et (10') on peut toujours choisir les index i, j, k, l de telle manière que la fonction α soit dépendue des variables x et y .

On a de même, d'une manière analogue, les intégrales de l'équation mentionnée

$$\beta \equiv \frac{(i, j, l)}{(i, j, k)} = \text{const.}, \quad \gamma \equiv \frac{(j, k, l)}{(i, j, k)} = \text{const.}$$

Or, α, β, γ ne sont pas distinctes par rapport aux variables x et y . Démontrons cela, par exemple, pour les fonctions α et β . Considérons le déterminant

$$A \equiv D \left(\frac{\alpha, \beta}{x, y} \right).$$

Substituant y les expressions α et β , on obtient la relation

$$(15) \quad A = \frac{1}{(i, j, k)^3} \begin{vmatrix} (i, j, k) & (i, j, k)_x & (i, j, k)_y \\ (i, j, l) & (i, j, l)_x & (i, j, l)_y \\ (i, k, l) & (i, k, l)_x & (i, k, l)_y \end{vmatrix}$$

D'autre part, grâce aux identités (14), on obtient la relation suivante

$$V_i(\Delta_{x^2}\Delta_{y^2} - \Delta_{xy}^2) = \begin{vmatrix} (i, j, k) & ()_x & ()_y \\ (i, j, l) & ()_x & ()_y \\ (i, k, l) & ()_x & ()_y \end{vmatrix}$$

et l'on a en vertu de (15) et (10),

$$A = \frac{V_i(\Delta_{x^2}\Delta_{y^2} - \Delta_{xy}^2)}{(i, k, l)^3} = 0$$

De cette manière on peut prendre

$$(16) \quad \alpha = \text{const.}, \quad \alpha_x, \alpha_y \neq 0$$

pour l'intégrale cherchée des caractéristiques.

b) Passons, à présent, à la seconde hypothèse. Si la fonction inconnue ne figure pas dans le système (1) et C_k représente la constante arbitraire additive dans l'intégrale complète, alors, en vertu de (16), l'intégrale des caractéristiques admet la forme suivante

$$\frac{(i, l)}{(i, j)} = \text{const.}$$

c) Supposons, enfin, conservant l'hypothèse de b) que le système (1) ait une intégrale intermédiaire ayant la constante C_l , c'est-à-dire que l'on a $(j, k, l) = 0$. Dans ce cas l'intégrale cherchée des caractéristiques, admet la forme

$$\frac{V_{xl}}{V_{xj}} = \text{const.}, \quad \text{ou} \quad \frac{V_{yl}}{V_{yj}} = \text{const.}$$