Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R.P. de Serbie
Vol. VIII, 3—4, (1956), Beograd
Yougoslavie

ФОРМИРАЊЕ НЕКИХ РЕАЛНИХ ФУНКЦИЈА ОД КОНАЧНО МНОГО ПРОМЕНЉИВИХ НЕОБИЧНИХ ОСОБИНА

СИМОН ЋЕТКОВИЋ, БЕОГРАД

Циљ нам је да формирамо што простије реалне функције од коначно-много променљивих, а самим тим укажемо на њихову егзистенцију, код којих ће се што више очитовати независност између непрекидности, прекидности, постојања парцијалних извода и диференцијабилности.

1. — Формирајмо реалне функције $F_{ab}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ на следећи начин:

$F_{ab}(x_1, \ldots x_n) = 0$, када су све независно променљиве: $x_1, x_2, \ldots x_n$ ирационални бројеви;

$F_{ab}(x_1, \ldots x_n) = 1/[\max(q_1, q_2, \ldots q_n)]^a$, када међу независно променљивим има и рационалних и ирационалних бројева;

$F_{ab}(x_1, \ldots x_n) = 1/[\min(q_1, q_2, \ldots q_n)]^b$, када су све независно променљиве рационални бројеви.

$(x_1, x_2, \ldots x_n)$ означавају $n \geqslant 2$ независно променљивих. Када је x_i рационалан број тада q_i означава његов именитељ при чему су бројитељ и именитељ узајамно прости бројеви.

$\max(q_1, q_2, \ldots q_n)$ означава највећи број који је једнак бар једном од бројева $q_1, q_2, \ldots q_n$. $\min(q_1, \ldots q_n)$ означава најмањи број који је једнак бар једном од бројева $q_1, q_2, \ldots q_n$. Бројеви a и b играју улогу параметара, при чему је $a \in (2, \infty)$, $b \in (-\infty, 1] \cup (2, \infty)$.

2. — *У овом раду показаћемо да свака од функција* $F_{ab}(x_1, \ldots x_n)$ *има следеће особине:*

2,1. — *За* $b \in (-\infty, 0]$ *је истовремено:*

1°. *Свуда прекидна;*

2°. *У свуда—густим тачкама има све парцијалне изводе и ако је у свима тим тачкама прекидна;*

3°. *У свуда—густим тачкама има парцијалне изводе по и само по унапред произвољно уоченој групи независно промењљивих и ако је у тим тачкама прекидна.*

2,2. — *За* $b \in (0, 1]$ *је истовремено:*

1°. *У свуда—густим тачкама прекидна;*

2°. *У свуда—густим тачкама непрекидна али у њима нема ниједан парцијални извод;*

3°. *У свуда—густим тачкама непрекидна и у њима има све парцијалне изводе.*

4°. *У свуда—густим тачкама непрекидна и у њима има парцијалне изводе по и само по унапред произвољно уоченој групи независно промењљивих;*

5°. *Није диференцијабилна ни у једној тачки.*

2,3. — *За* $b \in (2, \infty)$ *је истовремено:*

1°. *Свуда—густо прекидна;*

2°. *У свуда—густим тачкама непрекидна али нема извод ни по једној од промењљивих;*

3°. *У свуда—густим тачкама има парцијалне изводе по и само по унапред произвољно уоченој групи независно промељивих;*

4°. *У свуда—густим тачкама је диференцијабилна.*

3. Формираћемо прво неке свуда—густо распоређене ирационалне бројеве који ће нам требати у даљем излагању.

Узмимо број α дефинисан сумом конвергентног реда

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 1/10^{(E(a)+1)^n},$$

где $E(a)$ означава највећи цео број који није већи од a. Помоћу броја α образујмо број $\beta = p/10^r + \alpha$ за $p \geqslant 0$ и $\beta = p/10^r - \alpha$ за $p < 0$, где су p и $r \geqslant 0$ произвољни цели бројеви. Скуп бројева β означимо са Q.

3,1. — У следећем излагању доказаћемо:

Скуп бројева Q је свуда—густ и сваки од њих је ирационалан.

Обзиром да је $a > 2$ то је $E(a)+1 \geqslant 3$ па нам низ $\{(E(a)+1)^n\}$ претставља бесконачну геометриску прогресију чији је количник природан број већи или једнак броју 3. Ако број α претставимо у декадском бројном систему добићемо бесконачни десетни разломак који иза десетне запете има само цифре 1 и цифре 0. Редна места цифара 1 иза десетне запете даје нам низ $\{(E(a)+1)^n + 1\}$. Из овог следи да ће се цифре 0 јављати између цифара 1 у групама. Тако између n-те цифре 1 и $(n+1)$-ве цифре 1 има цифара 0:

$$(E(a)+1)^{n+1}-(E(a)+1)^n-1=(E(a)+1)^n\cdot E(a)-1.$$

Низ $\{(E(a)+1)^n\cdot E(a)-1\}$ је целобројни и растући а број α претстављен бесконачним десетним разломком није периодичан па је према томе ирационалан. На пример за $a=3^1/_4$ биће

$$\alpha=0{,}0000\,1000\,0000\,0000\,1\ldots\,.$$

У декадском изразу овог броја цифра 1 налазиће се иза десетне запете на петом, седамнаестом, шесдесетпетом, двестапедесетседмом месту и тако даље. Између прве и друге цифре 1 налазиће се 11 цифара 0, између друге и треће цифре 1, 47, између треће и четврте цифре 1 налазиће се 191 цифра 0 и тако даље.

Из ирационалности броја α и рационалности броја r произилази да су и бројеви скупа Q ирационални.

Обзиром да је скуп R свуда—густ то је и скуп Q свуда—густ.

3,2. — Броју α уочићемо њему одговарајући низ

$$\{\alpha_k\}\equiv\left\{\sum_{n=1}^{k}1/10^{(E(a)+1)^n}\right\}.$$

Како је

$$\alpha_k=\sum_{n=1}^{k}1/10^{(E(a)+1)^n}=\left(\sum_{n=1}^{k}10^{(E(a)+1)^k-(E(a)+1)^n}\right)\Big/\,10^{(E(a)+1)^k}=$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{k-1}10^{(E(a)+1)^k-(E(a)+1)^n}+1\right)\Big/\,10^{(E(a)+1)^k}$$

и како

$$\sum_{n=1}^{k-1}10^{(E(a)+1)^k-(E(a)+1)^n}+1$$

није дељиво са 5, то α_k написано у облику p/q, (p и q узајамно прости бројеви), има $q=10^{(E(a)+1)^k}$.

Аналогно овоме уочићемо и сваком β њему одговарајући низ

$$\{\beta_k\}\equiv\left\{\frac{p}{10^r}+\alpha_k\right\},\quad\text{односно}\quad\{\beta_k\}\equiv\left\{\frac{p}{10^r}-\alpha_k\right\},$$

па је

$$\beta_k=\left(p\cdot10^{(E(a)+1)^k-r}\pm\sum_{n=1}^{k-1}10^{(E(a)+1)^k-(E(a)+1)^n}\pm1\right)\Big/\,10^{(E(a)+1)^k}$$

а одатле следи да је за $(E(a)+1)^k > r$, ако β_k претставимо у облику p/q (p и $q > 0$ узајамно прости бројеви)

$$q = 10^{(E(a)+1)^k}. \tag{1}$$

3,3. — Уочимо сада

$$|\beta - \beta_k| = \sum_{n=k+1}^{\infty} 1/10^{(E(a)+1)^n}.$$

Обзиром да је

$$\frac{1}{10^{(E(a)+1)^n}} \cdot \frac{10^{(E(a)+1)^{n+1}}}{1} = 10^{(E(a)+1)^n \cdot E(a)} > 2,$$

то је

$$|\beta - \beta_k| < 2/10^{(E(a)+1)^{k+1}}. \tag{2}$$

3,4. — Место

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 1/10^{(E(a)+1)^n}$$

могли би узети број

$$\alpha_m = \sum_{n=1}^{\infty} 1/m^{(E(a)+1)^n},$$

где је m константан природан број већи од 1. Помоћу α_m образовали би аналогно горњем β_m, а затим Q_m и низове $\{(\alpha_m)_k\}$ и $\{(\beta_m)_k\}$ као и разлику $\beta_m - (\beta_m)_k$ па би добили

$$|\beta_m - (\beta_m)_k| < 2/m^{(E(a)+1)^{k+1}}.$$

Ово би било једно уопштење које за $m=10$ даје горње резултате.

4. — Доказаћемо сада горе наведене особине фамилије функција $F_{ab}(x_1, x_2 \dots x_n)$, за $b \in (-\infty, 0]$.

4,1. — Уочимо произвољну тачку у којој су све независно променљиве рационални бројеви и означимо је са $M_1(c_1, c_2, \dots, c_n)$. За $b \in (-\infty, 0]$ имамо $F_{ab}(c_1, c_2, \dots, c_n) = 1/[\min(q_1, q_2, \dots, q_n)]^b \geqslant 1$. Како су тачке, чије су све независно променљиве рационални бројеви, свуда-густе, то свака од функција $F_{ab}(x_1, x_2, \dots x_n)$ за $b \in (-\infty, 0]$ узима у свуда-густим тачкама вредност 1 или већу од 1. Сем тога по дефиницији сваке од функција њихова је вредност 0 у тачкама чије су све променљиве ирационални бројеви. Па пошто су и ове тачке свуда-густе, то свака од функција $F_{ab}(x_1, x_2, \dots x_n)$ у свуда-густим тачкама узима и вредност 0, па је на основу изложеног тврђење (1°) под (2,1.—) тачно.

4,2. — Узмимо тачку $M_2(c_1, c_2, \dots c_n)$ чије су све независно променљиве ирационални алгебарски бројеви реда мањег од a, а то можемо јер је $a > 2$. Тада је

$$\frac{F_{ab}(c_1, \dots c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) - F_{ab}(c_1, \dots, c_i \dots, c_n)}{x_i - c_i} = 0,$$

када је x_i ирационалан број, јер је

$$F_{ab}(c_1, \dots c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots c_n) = 0 \quad \text{и} \quad F_{ab}(c_1 \dots, c_i, \dots, b_n) = 0.$$

Када је x_i рационалан број облика p_i/q_i тада је

$$\left| \frac{F_{ab}(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) - F_{ab}(c_1, \dots, c_i, \dots, c_n)}{x_i - c_i} \right| = \frac{1}{q_i^a} \Big/ \left| \left(\frac{p_i}{q_i} - c_i \right) \right| <$$

$$< \frac{1}{q_i^a} \Big/ \left(M \cdot \frac{1}{q_i^s} \right) = \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{q_i^{a-s}} \to 0, \quad \text{када } x_i \to c_i,$$

($s > 1$ је природан број који означава ред алгебарског броја c_i, M је константан број који одговара ирационалном алгебарском броју c_i тако да буде задовољена неједнакост

$$|p_i/q_i - c_i| > M q_i^s,$$

а такав број M постоји на основу Liouville-овог става).

Према свему изложеном под (4,2.) следи да је

$$\lim_{x_i \to c_i} \frac{F_{ab}(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) - F_{ab}(c_1, \dots c_i \dots c_n)}{x_i - c_i} = 0.$$

На основу овог закључујемо да егзистирају сви парцијални изводи у тачки $M_2(c_1, c_2, \dots, c_n)$. Но како су те тачке, то јест тачке чије су све независно променљиве ирационални алгебарски бројеви реда мањег од a, свуда-густе и како је функција $F_{ab}(x_1, x_2, \dots x_n)$, за $b \in (-\infty, 0]$, свуда-прекидна то је прекидна и у тачки $M_2(c_1, c_2, \dots c_n)$ па закључујемо да је тврђење (2°) под (2,1.—) тачно.

4,3. — Поделимо скуп независно промењљивих на произвољан начин у две групе: групу A и групу B. Узмимо тачку $M_3(c_1, c_2, \dots, c_n)$ и нека су у тој тачки вредности независно променљивих групе A алгебарски бројеви реда мањег од a, а вредности независно-променљивих групе B бројеви који припадају скупу Q дефинисаном под (3.-).

4,31. — Ако је x_i из групе A, па је према томе c_i алгебарски број реда мањег од a, то је као и под (4,2.-)

$$\lim_{x_i \to c_i} \frac{F_{ab}(c_1, \dots c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots c_n) - F_{ab}(c_1, \dots c_i, \dots c_n)}{x_i - c_i} = 0,$$

то јест парцијални изводи по променљивим из групе A у тачки $M_3(c_1,\ldots,c_n)$ постоје и једнаки су нули.

4,32. — Када је x_i из групе B тада $c_i \in Q$. Мења ли се x_i преко ирационалних бројева тада је

$$(3)\qquad \frac{F_{ab}(c_1,\ldots x_i,\ldots c_n)-F_{ab}(c_1\ldots c_i,\ldots,c_n)}{x_i-c_i}=0,$$

јер је $F_{ab}(c_1,\ldots c_{i-1}, x_i, c_{i+1},\ldots c_n)=0$ и $F_{ab}(c_1,\ldots c_{i-1}, c_i, c_{i+1},\ldots c_n)=0$.

Обзиром да је $x_i \in B$ односно $c_i \in Q$, то је c_i један од бројева

$$\beta=\frac{p}{10^r}\pm\sum_{n=1}^{\infty}1/10^{(E(a)+1)^n}.$$

Ако се x_i мења одговарајућим низом $\beta_k=\frac{p}{10^r}\pm\sum_{n=1}^{k}1/10^{(E(a)+1)^n}$, тада је за једну околину тачке $M_3(c_1, c_2,\ldots c_n)$, узимајући у обзир (1) и (2),

$$(4)\qquad \left|\frac{F_{ab}(c_1,\ldots c_{i+1}, x_i, c_{i+1},\ldots c_n)-F_{ab}(c_1,\ldots c_i,\ldots c_n)}{x_i-c_i}\right|=$$

$$=\frac{1}{\left(10^{(E(a)+1)^k}\right)^a}\Big/\sum_{n=k+1}^{\infty}1/10^{(E(a)+1)^n}>\frac{1}{\left(10^{(E(a)+1)^k}\right)^a}\Big/\frac{2}{10^{(E(a)+1)^{k+1}}}$$

$$=\frac{10^{(E(a)+1)^{k+1}}\cdot 1}{10^{(E(a)+1)^k\cdot a}\cdot 2}>\frac{1}{2}.$$

Према (3) и (4) не постоји

$$\lim_{x_i\to c_i}\frac{F_{ab}(c_i,\ldots c_{i-1}, x_i, c_{i+1},\ldots c_n)-F_{ab}(c_1,\ldots c_i\ldots c_n)}{x_i-c_i}.$$

Будући да су сем тога, тачке $M_3(c_1, c_2,\ldots c_n)$ о којима се говори под (4,3.—) свуда-густе, а у њима функције $F_{ab}(x_1,\ldots x_n)$, $b\in(-\infty,0)$, прекидне, то на основу изложеног под (4,31.—) и (4,32.—) закључујемо да је тврђење 3° под (2,1.—) тачно.

5,11. — У свакој тачки $M_4(c_1,\ldots c_n)$, где је бар једна од независно променљивих рационалан број, вредност функције је већа од нуле. У свакој околини тачке $M_4(c_1,\ldots c_n)$ налази се и бар једна тачка $N_1(d_1, d_2,\ldots d_n)$ чије су све независно променљиве ирационални бројеви па је у тој тачки вредност функције нула. Из овога следује да је функција $F_{ab}(x_1,\ldots x_n)$, за $b\in(0,1]$ прекидна у тачки $M_4(c_1,\ldots c_n)$. Како су тачке са особинама тачке $M_4(c_1\ldots c_n)$ свуда-густе, то је тврђење 1° под (2,2.—) тачно.

5,12. — Узмимо тачку $M_5(c_1, \dots c_n)$ чије су све независно промењиве ирационални бројеви. Тада је $F_{ab}(c_1, \dots c_n) = 0$, за $b \in (0,1]$. Ако је ε произвољно мали позитивни број тада увек постоји једна околина U_{M_5} тачке $M_5(c_1, \dots c_n)$ тако да је за све њене тачке

$$F_{ab}(x_1, \dots x_n) - F_{ab}(c_1, \dots c_n) < \varepsilon, \quad \text{за} \quad b > 0,$$

односно

$$F_{ab}(x_1, \dots x_n) < \varepsilon,$$

а то је она околина за коју је

$$\min \{[\max (q_1, \dots q_n)]^a, \quad [\min (q_1, \dots q_n)]^b\} > \frac{1}{\varepsilon},$$

а тим пре околина за коју је свако

$$q > \max \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{a}}, \quad \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{b}} \right],$$

а таква околина постоји. Према томе све функције $F_{ab}(x_1, \dots x_n)$, за $b > 0$, непрекидне су у тачкама чије су све независно промењиве ирационални бројеви.

5,2. — Нека су вредности независно промењивих у тачки $M_6(c_1, \dots c_n)$ бројеви из скупа Q дефинисаног под (3. —).

5,21. — Ако се x_i мења у скупу ирационалних бројева, имамо

$$\frac{F_{ab}(c_1, \dots c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots c_n) - F_{ab}(c_1, \dots c_i, \dots c_n)}{x_i - c_i} = 0, \tag{5}$$

јер је тада и $F_{ab}(c_1, \dots c_i, \dots c_n) = 0$ и $F_{ab}(c_1, \dots c_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots c_n) = 0$.

5,22. — Како c_i у овом случају има облик

$$c_i = \frac{p}{10^r} \pm \sum_{n=1}^{\infty} 1/10^{(E(a)+1)^{n'}},$$

то ћемо узети да се x_i мења њему одговарајући низом

$$x_i \in \frac{p}{10^r} \pm \sum_{n=1}^{k} 1/10^{(E(a)+1)^n},$$

па је тада

$$|x_i - c_i| = \sum_{n=k+1}^{\infty} 1/10^{(E(a)+1)^n} < 2/10^{(E(a)+1)^{k+1}},$$

а према (1) и (4) за $r < (E(a)+1)^k$:

$$\left|\frac{F_{ab}(c_1, \ldots x_i, \ldots c_n) - F_{ab}(c_1, \ldots c_i, \ldots c_n)}{x_i - c_i}\right| > \frac{1/10^{(E(a)+1)^k \cdot a}}{2/10^{(E(a)+1)^{k+1}}} > \frac{1}{2} \tag{6}$$

Према (5) и (6) не постоји

$$\lim_{x_i \to c_i} \frac{F_{ab}(c, \ldots x_i, \ldots c_n) - F_{ab}(c_1, \ldots c_i, \ldots c_n)}{x_i - c_i}.$$

Будући да су сем тога, тачке $M_6(c_1, \ldots c_n)$ о којима овде говоримо свуда-густе, а у њима функције $F_{ab}(x_1, \ldots x_n)$, $b \in (0,1]$, на основу (5,12.-) непрекидне то закључујемо да је тврђење (2°) под (2,2.-) тачно.

5,3.- Узмимо тачку $M_7(c_1, \ldots c_n)$ чије су све независно промењљиве алгебарски ирационални бројеви реда мањег од a, а то можемо јер је $a > 2$. Тада је према изложеном у (4,2.-)

$$\lim_{x_i \to c_i} \frac{F_{ab}(c_1, \ldots c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \ldots c_n) - F_{ab}(c_1, \ldots c_i, \ldots c_n)}{x_i - c_i} = 0,$$

то јест у тачки $M_7(c_1, \ldots c_n)$ постоје сви парцијални изводи. Но, како је према изложеном у (5,12.-) функција $F_{ab}(x_1, \ldots x_n)$ за $b > 0$ непрекидна у тачки $M_7(c_1, \ldots c_n)$ и како су тачке тих особина свуда-густе, закључујемо да је је тврђење (3°) под (2,2.-) тачно.

5,4.- Из изложеног под (4,3.-), (4,31.-), (4,32.-) и (5,12.-) произилази да је тврдња (4°) под (2,2.-) тачна.

5,5.- Покажимо да ниједна од функција $F_{ab}(x_1, \ldots x_n)$, за $b \in (0,1]$ није диференцијабилна ни у једној тачки.

У тачкама $M_8(c_1, \ldots c_n)$ у којима је бар једна од независно промењљивих рационалан број није диференцијабилна из разлога што је у тој тачки према (5,12.) прекидна.

Ако су независно промењљиве у тачки $M_9(c_1, \ldots c_n)$ ирационални бројеви и ако у њој не постоји бар један парцијални извод функције $F_{ab}(x_1, \ldots x_n)$, тада она није диференцијабилна у тој тачки.

5,51.- Претпоставимо сада да постоје сви парцијални изводи функције $F_{ab}(x_1, \ldots x_n)$, за $b \in (0,1]$ у тачки $M_{10}(c_1, \ldots c_n)$ чије су све независно промењљиве ирационални бројеви.

Како је у том случају

$$\frac{F_{ab}(c_1, \ldots c_{i-1}, x_i, c_{i+1} \ldots c_n) - F_{ab}(c_1, \ldots c_i, \ldots c_n)}{x_i - c_i} = 0,$$

ако се x_i мења преко ирационалних бројева, то произилази да су у том случају, ако постоје, сви парцијални изводи у тачки $M_{10}(c_1, \dots c_n)$ једнаки нули.

Испитајмо сада шта се дешава са количником

$$\text{(7)} \qquad \frac{F_{ab}(x_1, \dots x_n) - F_{ab}(c_1, \dots c_n)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_i)^2}}, \text{ када } N(x_1, \dots x_n) \to M_{10}(c_1, \dots c_n).$$

Да би функција $F_{ab}(x_1, \dots x_n)$, за $b \in (0,1]$, била диференцијабилна у тачки $M_{10}(c_1, \dots c_n)$ треба да количник (7) тежи нули када $N(x_1, \dots x_n) \to$ $\to M_{10}(c_1, \dots c_n)$.

У произвољној околини тачке $M_{10}(c_1, \dots c_n)$ уочимо тачку $N_2(\beta_1, \dots \beta_n)$ која задовољава услове:

$$1^0) \qquad \beta_1 = \frac{p_1}{q}, \quad \beta_2 = \frac{p_2}{q}, \dots \beta_i = \frac{p_i}{q}, \dots \beta_n = \frac{p_n}{q},$$

$p_1, p_2, \dots p_n$, цели бројеви, q прост број, p_i и q узајамно прости бројеви;

$$2^0) \qquad |c_i - \beta_i| < \frac{1}{q}.$$

Таква тачка $N_2(\beta_1, \dots \beta_n)$ постоји, и када $N_2(\beta_1, \dots \beta_n) \to M_{10}(c_1, \dots c_n)$ тада $q \to \infty$. За такве тачке количник (7) има вредност:

$$\frac{F_{ab}(\beta_1, \dots \beta_n) - F_{ab}(c_1, \dots c_n)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(\beta_i - c_i)^2}} > \frac{1/q^b}{\sqrt{n}/q},$$

јер је у том случају

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\beta_i - c_i)^2} < \sqrt{n}/q.$$

Из тога произилази

$$\frac{F_{ab}(\beta_1, \dots \beta_n) - F_{ab}(c_1, \dots c_n)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(\beta_i - c_i)^2}} > \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot q^{1-b} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}},$$

јер је $1 - b \geqslant 0$. Према томе није:

$$\lim_{N(x_1, \dots x_n) \to M_{10}(c_1, \dots c_n)} \frac{F_{ab}(x_1, \dots x_n) - F_{ab}(c_1, \dots c_n)}{\sqrt{\sum\limits_{i}^{n}(x_i - c_i)^2}} = 0,$$

то јест функција $F_{ab}(x_1, \dots x_n)$, за $b \in (0,1]$, није диференцијабилна ни у једној тачки, односно тврђење (5°) под (2,2.–) је тачно.

6,1. — Ако је бар једна од независно промењљивих тачке $M_{11}(c_1, \dots c_n)$ рационалан број то је, аналогно изложеном под (5,11.—), функција $F_{ab}(x_1, \dots x_n)$, за $b \in (2, \infty)$, у тој тачки прекидна. Како су тачке са особинама тачке $M_{11}(c_1, \dots c_n)$ свуда — густе то је тврђење (1°) под (2,3.—) тачно.

6,2. — Узмимо тачку $M_{12}(c_1, \dots c_n)$ чије су све независно промењљиве бројеви из скупа Q дефинисаног под (3.—). Према изложеном под (3.—) те су тачке свуда—густе. Аналогно доказу под (5,12.—) показује се да је функција $F_{ab}(x_1, \dots x_n)$, за $b \in (2, \infty)$ у тим тачкама непрекидна. Као и под (5,21.—) и (5,22.—) показује се да она нема у тим тачкама ниједан парцијални извод, па је (2°) под (2,3.—) тачно.

6,3. — Према изложеном у (4,3.—), (4,31.—) и (4,32.—) закључујемо да је тврђење (3°) под (2,3.—) тачно.

6,4. — Узмимо тачку $M_{13}(c_1, \dots c_n)$ чије су све независно промењљиве алгебарски ирационални бројеви реда мањег и од a и од b, а то можемо јер је и $a > 2$ и $b > 2$. Према изложеном под (4,2.—) биће

$$\lim_{x_i \to c_i} \frac{F_{ab}(c_1, \dots c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots c_n) - F_{ab}(c_1, \dots c_i, \dots c_n)}{x_i - c_i} = 0, \tag{8}$$

то јест у тачкама $M_{13}(c_1, \dots c_n)$ егзистирају парцијални изводи функције $F_{ab}(x_1, \dots x_n)$, за $b \in (2, \infty)$ по свакој од независно промењљивих и једнаки су нули.

Покажимо сада да је и

$$\lim_{N(x_1, \dots x_n) \to M_{13}(c_1, \dots c_n)} \frac{F_{ab}(x_1, \dots x_n) - F_{ab}(c_1, \dots c_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^2}} = 0, \tag{9}$$

то јест да је, с обзиром на (8), функција $F_{ab}(x_1, \dots x_n)$, за $b \in (2, \infty)$, диференцијабилна у тачки $M_{13}(c_1, \dots c_n)$.

Ако су све независно промењљиве тачке $N_3(d_1, d_2, \dots d_n)$ ирационални бројеви то је

$$\frac{F_{ab}(d_1, \dots d_n) - F_{ab}(c_1, \dots c_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i)^2}} = 0, \tag{10}$$

за $M_{13}(c_1, \dots c_n) \neq N_3(d_1, \dots d_n)$, јер је и $F_{ab}(d_1, \dots d_n) = 0$ и $F_{ab}(c_1, \dots c_n) = 0$.

Кад је нека од независно променљивих у тачки $N_4(d_1, \dots d_n)$ рационалан а нека ирационалан број тада је

$$(11) \quad \left|\frac{F_{ab}(d_1, \dots d_n) - F_{ab}(c_1, \dots c_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i)^2}}\right| = \frac{1}{\max(q_1, \dots q_l)} \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i)^2} <$$

$$< \frac{1}{(q_k)^a} \Big/ \left(M_k \frac{1}{q_k^s}\right) = \frac{1}{M_k} \frac{1}{q_k^{a-s}} \to 0, \quad \text{за} \quad N_4(d_1, \dots d_n) \to M_{13}(c_1, \dots c_n),$$

(q_k означава именитељ независно променљиве d_k када ниједна од независно промељивих у тачки $N_4(d_1, \dots d_n)$ нема већи именитељ од q_k; s је алгебарски ред броја c_k; M_k означава константан број који одговара броју c_k тако да је

$$\left|\frac{p_k}{q_k} - c_k\right| > \frac{1}{M_k q_k^s},$$

за свако p_k/q_k рационалан број, p_k и $q_k > 0$ узајамно прости бројеви).

Ако су све независно променљиве у тачки $N_5(d_1, \dots d_n)$ рационални бројеви тада је

$$(12) \quad \left|\frac{F_{ab}(d_1, \dots d_n) - F_{ab}(c_1, \dots c_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i)^2}}\right| = \frac{1}{\min(q_1, \dots q_n)} \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i)^2} <$$

$$< \frac{1}{q_k^b} \Big/ \frac{M_k}{q_k^s} = \frac{1}{M_k} \cdot \frac{1}{q_k^{b-s}} \to 0, \text{ за } N_5(d_1, \dots d_n) \to M_{13}(c_1, \dots c_n).$$

(q_k означава именитељ независно променљиве d_k када ниједна од независно променљивих у тачки $N_5(d_1, \dots d_{nn})$ нема мањи именитељ од q_k; s означава ред алгебарског броја c_k; M_k означава константан број који одговара броју c_k тако да је

$$\left|\frac{p_k}{q_k} - c_k\right| > \frac{1}{M_k q_k^s},$$

за свако $p_k/q_k \in$ скупу рационалних бројева, p_k и $q_k > 0$ узајамно прости бројеви).

Према (10), (11) и (12) закључујемо да је заиста (9) тачно. Обзиром да су тачке са особинама тачке $M_{13}(c_1, \dots c_n)$ свуда—густе то је тврђење (4°) под (2,3.—) тачно.

7. — Означимо:
са Φ_1 скуп реалних функција од коначно много променљивих које имају истовремено особине (1°), (2°) и (3°) под (2,1.—);
са Φ_2 које имају особине (1°), (2°), (3°), (4°) и (5°) под (2,2.—);
са Φ_3 функције са особинама (1°), (2°), (3°) и (4°) под (2,3.—).