Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. VIII, 3–4 (1956), Beograd
Yougoslavie

ПРИНЦИП ИНТЕГРАЦИЈЕ ПОМОЋУ ДИФЕРЕНЦИЈАЦИЈЕ И ТЕОРИЈА ТРАНСФОРМАЦИЈА ДОДИРА. НЕКЕ ПРИМЕНЕ

БОРИВОЈЕ РАШАЈСКИ, БЕОГРАД

Ако у теорији обичних диференцијалних једначина поставимо решавање проблема изналажења основног обрасца трансформације додира, помоћу које дата диференцијална једначина постаје функционална односно нових променљивих, онда није тешко показати да је исти проблем еквивалентан са интеграцијом једначине помоћу тзв. методе диференцијације.

Примењен метод у овоме чланку показује на једноставан начин извесне аналогије, које постоје између теорија обичних и парцијалних диференцијалних једначина.

Најзад се указује и на неке примене, а посебно у односу на теорију сингуларних интеграла поменутих диференцијалних једначина.

1) Нека је трансформација додира дата основним обрасцем

$$y=S\,(x,\ x_1,\ y_1) \tag{1}$$

онда имамо између старих $x,\ y,\ p$ и нових променљивих $x_1,\ y_1,\ p_1$ и следеће везе

$$\left.\begin{aligned} p&=S_x\,(x,\ x_1,\ y_1)\\ p_1&=-\frac{S_{x_1}\,(x,\ x_1,\ y_1)}{S_{y_1}\,(x,\ x_1,\ y_1)}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Пошто је последња од једначина (2) решљива у односу на x, онда добијамо следеће обрасце

$$\left.\begin{aligned} x&=f\,(x_1,\ y_1,\ p_1)\\ y&=\overline{S}\,(f,\ x_1,\ y_1)\\ p&=\overline{S}_x\,(f,\ x_1,\ y_1),\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

који дају старе променљиве у функцији нових.

Ако пођемо од обрасца

$$y_1 = \sigma(x, y, x_1), \tag{4}$$

који налазимо решавањем једначине (1) по y_1, онда на аналоган начин добијамо обрасце који дају нове променљиве у функцији старих

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi(x, y, p) \\ y_1 &= \bar{\sigma}(\varphi, x, y) \\ p_1 &= \bar{\sigma}_{x_1}, (\varphi, x, y). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Први од образаца је добијен из

$$p = -\frac{\sigma_x(x, y, x_1)}{\sigma_y(x, y, x_1)}.$$

2) Потражимо облик диференцијалне једначине I реда

$$A(x, y, p) = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}, \tag{6}$$

која применом дате трансформације (1) постаје функционална једначина, тј. једначина у којој не фигурише величина p_1

$$A(f, \bar{S}, \bar{S}_x) = a(x_1, y_1) = 0. \tag{6}$$

Тада према обрасцима (5) закључујемо да једначина

$$a[\varphi(x, y, p), \quad \bar{\sigma}(\varphi, x, y)] = 0 \tag{8}$$

претставља општи облик диференцијалне једначине I реда тражене особине.

3. Потражимо обрасце за трансформацију додира на основу којих дата једначина

$$A(x, y, p) = 0$$

постаје функционална. У таквом случају имамо услов

$$\frac{\partial A}{\partial p_1} = 0,$$

тј. лева страна једначине (7) не садржи величину p_1. Горњи услов можемо написати у следећем облику

$$\frac{\partial A}{\partial f} + \frac{\partial A}{\partial \bar{S}} \bar{S}_f + \frac{\partial A}{\partial \bar{S}_f} \frac{\partial \bar{S}_f}{\partial f} = 0, \tag{9}$$

јер величина p_1 улази само преко аргумента f. Узимајући у обзир очевидну идентичност

$$-\frac{\partial A}{\partial \bar{S}_f} \bar{S}_f + \frac{\partial A}{\partial \bar{S}_f} \frac{\partial \bar{S}}{\partial f} = 0 \tag{10}$$

видимо да једначине (9) – (10) претстављају један Charpit'ов систем по непознатим функцијама $\bar{S}$ и $\bar{S}_f$ и одговарајући систем обичних диференцијалних једначина гласи

$$\frac{df}{\frac{\partial A}{\partial \bar{S}_f}} = \frac{d\bar{S}}{\frac{\partial A}{\partial \bar{S}_f}\bar{S}_f} = -\frac{d\bar{S}_f}{\frac{\partial A}{\partial f} + \frac{\partial A}{\partial \bar{S}_f}\bar{S}_f}. \tag{11}$$

Основни образац трансформације наћићемо на следећи начин. Претпоставимо да систем (11) даје један интеграл облика

$$\alpha(f, \bar{S}, \bar{S}_f) = x_1$$

или у старим промењљивима

$$\alpha(x, y, p) = x_1, \tag{11'}$$

где је x_1 произвољна константа.

Ако се дата диференцијална једначина може претставити $A \equiv a(\alpha) = 0$, тада основни образац добијамо из $dy = pdx$, где је p одређено помоћу (11′) и трансформисана једначина је облика $A = a(x_1) = 0$.

Ако A није само функција од α онда се основни образац добија, или: елиминацијом p из $A = y_1$, $\alpha = x$, и трансформисана једначина је $y_1 = 0$; или: интеграцијом $dy = pdx$, где је p одређено из (11′) и трансформисана једначина је облика $A \equiv a(x_1, y_1) = 0$.

4) Систем (11), који служи за изналажење образаца трансформације на основу којих дата једначина постаје функционална, у ознакама старих промењљивих се пише

$$\frac{dx}{\frac{\partial A}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial A}{\partial p}p} = -\frac{dp}{\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}p}. \tag{12}$$

Једначине (12), које се непосредно добијају решавањем горњег проблема из теорије трансформације додира, могу се извести и помоћу увођења помоћног параметра када се у најопштијем случају формулише и примени принцип интеграције диференцијалних једначина помоћу диференцијације [1].

5) Једначине (12) можемо написати помоћу појма инволуције

$$[A, B] = 0, \tag{13}$$

што показује да лева страна дате једначине претставља једно решење система (12) и да се у ствари тражи функција $B(x, y, p) = C$, која са датом једначином $A = 0$ стоји у инволуцији. Да би се добио општи интеграл треба, како се то поступа у примени методе интеграције помоћу диференцијације, елиминисати параметар p из једначина $A = 0$

и $B = C$. Дакле, као и у теорију парцијалних једначина, само тамо имамо три једначине које су међусобно у инволуцији, треба елиминисати извод из поменутих једначина које су инволуцији. Ово последње у теорији трансформације додира познато је још од Lagrange-а. Применимо овај поступак на тражење општег интеграла једначине облика (8). Са обзиром на услов

$$[\varphi(x, y, p),\ \bar{\sigma}(\varphi, x, y)] = 0,$$

који задовољавају обрасци (5) за трансформацију додира, видимо да су функције a и φ у инволуцији. Значи треба елиминисати p из $a = 0$ и $\varphi = c$, а то се остварује на следећи начин

$$a[c, \sigma(c, x, y)] = 0. \qquad (14)$$

Једначина (14) претставља општи интеграл једначине (8). А са обзиром на (7) општи интеграл те једначине може се написати и у облику

$$A\{f[c, \sigma(c, x, y), p_1],\ \bar{S}[f, c, \sigma(c, x, y)],\ \bar{S}_x[f, c, \sigma(c, x, y)]\} = 0.$$

Овако добијање општег интеграла је еквивалентно са добијањем, [2], потпуног интеграла у теорији парцијалних једначина, оно такође даје један пример и показује како се због узајамног прожимања методе трансформације додира и методе интеграције помоћу диференцијације лако успостављају познате аналогије између двеју теорија обичних, односно парцијалних диференцијалних једначина.

Такође и у теорији обичних диференцијалних једначина можемо формирати, [2], читав низ диференцијалних једначина, које одговарају датим трансформацијама, и чији се општи интеграл, због (14), може писати непосредно и слично као што је то случај са Clairaut'овом једначином.

6) Н. Салтиков, проучавајући теорију сингуларних интеграла, добио је — под претпоставком да су сингуларитети диференцијалне једначине такве природе да постоји њен општи интеграл — следећи закључак: Ако се може аналитички наћи сингуларни интеграл као анвелопа општег интеграла обичне диференцијалне једначине I реда, он ће увек задовољавати и одговарајуће изводне Lagrange'ове једначине. Обрнуто, решење Lagrange'ових изводних једначина претставља било анвелопу општег интеграла, било партикуларно решење, било решење такве врсте да истовремено задовољава особине и сингуларних и партикуларних интеграла. Према томе закључку се поклапају сингуларни интеграли, који се одређују на оба поменута и ако различита начина, [3].

Поставимо питање добијања на ова два начина сингуларних интеграла када је дата диференцијална једначина написана у облику

$$A \equiv a[\varphi(x,y,p), \bar{\sigma}(x,y,\varphi)] = 0. \qquad (15)$$

Да бисмо добили систем Lagrange'ових изводних једначина додајмо горњој још следеће две једначине

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial p} &\equiv \frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot S_1 = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} p &\equiv \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} p\right) \cdot S_1 = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (16)$$

где је уведена ознака:

$$S_1 \equiv \frac{\partial a(\varphi, \bar{\sigma})}{\partial x_1} + \frac{\partial a(\varphi, \bar{\sigma})}{\partial y_1} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x_1}.$$

Анвелопа — ако постоји — општег интеграла добија се из једначина

$$\left.\begin{aligned} & a[x_1, \sigma(x, y, x_1)] = 0 \\ & \frac{\partial a(x_1, \sigma)}{\partial x_1} + \frac{\partial a(x_1, \sigma)}{\partial y_1} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (17)$$

као резултат елиминације величине x_1. Исти резултат добијамо ако из (15) и $S_1 = 0$ елиминишемо p, или што је исто функцију φ. У том случају биће задовољене изводне Lagrange'ове једначине и поклапају се сингуларни интеграли добијени на ова два начина. Lagrange'ове једначине могле би да дају решења, ако таква постоје, која би задовољавала и две једначине добијене изједначавајући са нулом различите комбинације фактора, који се налазе на десним странама различитих једначина (16). Ако такво решење задовољава те једначине од којих је једна $S_1 = 0$, тј. ону која се добија изједначавањем са нулом другог фактора на десним странама једначина (16), онда се оно поклапа са оним које се добија из (17).

7) Ђ. Карапанџић [4] је предложио, допуњујући методу Ермаков-а за случај када се трансформацијом додира, чији је општи образац $\Phi(x, y, x_1, y_1) = 0$, дата диференцијална једначина претвара у тзв. функционалну једначину $a(x_1, y_1) = 0$, следећи систем за добијање сингуларних интеграла

$$\Phi(x, y, x_1, y_1) = 0, \quad a(x_1, y_1) = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial x_1} + \frac{\partial a}{\partial y_1} Y'(x, y) = 0, \qquad (18)$$

где су горњим основним обрасцем дате формуле за трансформацију додира написане у следећем облику: $x_1 = X(x, y, p)$, $y_1 = Y(x, y, p)$, $p_1 = Y'(x, y, p)$. Очевидно је да систем (18) поклапа са системом (17), јер за овај последњи случај основни образац пишемо у облику $y_1 = \sigma(x, y, x_1)$ и $Y' = \sigma_{x_1}$.

8) Наведимо на крају још један интересантан однос између извода општег интеграла и извода сингуларног интеграла.

Претпоставимо да извод општег интеграла по константи x_1 може бити решен по тој константи, тј. да из друге једначине (17) можемо добити

$$x_1 = \omega(x, y). \tag{19}$$

Потражимо извод по независној променљивој x општег интеграла, прве једначине (17). Тада имамо

$$\frac{\partial a}{\partial y_1}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} p\right) = 0.$$

Стављајући да је други фактор једнак нули и са обзиром на први образац (5) добијамо

$$x_1 = \varphi(x, y, p). \tag{20}$$

Претпоставимо да дата једначина (15) има сингуларни интеграл, онда овај последњи са обзиром на (19) можемо да напишемо

$$a\{\omega(x, y), \quad \sigma[x, y, \omega(x, y)]\} = 0.$$

Зато имамо извод сингуларног интеграла по независној променљивој x

$$\frac{\partial a\{\ \}}{\partial y_1}\left(\frac{\partial \sigma[\ ]}{\partial x} + \frac{\partial \sigma[\ ]}{\partial y} p\right) = 0, \tag{21}$$

јер због прве једначине (17) и (19) имамо следећи идентитет

$$\frac{\partial a\{\ \}}{\partial x_1} + \frac{\partial a\{\ \}}{\partial y_1} \frac{\partial \sigma[\ ]}{\partial x_1} \equiv 0.$$

Стављајући да је други фактор једначине (21) једнак нули и узимајући у обзир обрасце (5) можемо изводу сингуларног интеграла по независној променљивој да дамо следећи облик

$$\omega(x, y) = \varphi(x, y, p), \tag{22}$$

тј. овај последњи се добија када се из извода општег интеграла по x_1, (19) и извода општег интеграла x, (20) елиминише величина x_1.

Наведимо само једну примену ове чињенице. Наиме применимо ова излагања на Clairaut'ову једначину

$$y = xp + f(p)$$

и њен општи интеграл $y = xx_1 + f(x_1)$. Једначина (19) се добија из

$$x + f'(x_1) = 0; \quad x_1 = \omega(x).$$

Једначина (20) је $x_1 = p$ а (22) $\omega(x) = p$. Тада из последње једначине и Clairaut'ове добијамо образац

$$\int \omega(x)\, dx = x\omega(x) + f[\omega(x)],$$

којим се Ђ. Карапанџић [5] служио за израчунавање неких неодређених интеграла, као и шире за искоришћавање особина сингуларних интеграла диференцијалних једначина за систематско одређивање већег броја неодређених интеграла.

9) Напомињемо да се излагања у тачкама 6), 7), 8) могу применити и на теорију парцијалних једначина првог реда и да се тако примењеним методом у овом чланку могу успоставити и даље аналогије између теорија обичних и парцијалних диференцијалних једначина.

ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Kamke, *Differentialgleichungen Reeller Funktionen*, Leipzig 1930, S. 112. *Differentialgleichungen — Lösungsmethoden und Lösungen*, 1944, K. I. § 4.

[2] Б. Рашајски, *О трансформацијама додира*, Весник друштва математичара и физичара НР Србије, V, 3—4, Београд 1953; *Sur les transformations de contact*, Academie royale de Belgique, Bull. de la classe des Sciences, 5^e s. t. XL, 1954.

[3] Н. Салтиков, *Испитивање сингуларних интеграла диференцијалних једначина*, Српска академија наука, Глас CLXXXV, први разред 92, Београд 1941.

[4] Ђ. Карапанџић, *Примедбе о сингуларним интегралима диференцијалних једначина*, Весник друштва математичара и физичара НР Србије, III, 1—2 Београд 1951.

[5] Ђ. Карапанџић, *Једна примена сингуларних интеграла обичних диференцијалних једначина*, Весник друштва математичара и физичара НР Србије, II, 1—2, Београд 1950.