

Werk

Label: Article

Jahr: 1955

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?311570321_0007|log9

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

НЕКОЛИКО СТАВОВА О ГРАНИЧНИМ ВРЕДНОСТИМА РЕЗУЛТАНТЕ ФУНКЦИЈА КЛАСЕ H_δ ($0 < \delta < 1$) И ЈОШ НЕКИХ КЛАСА АНАЛИТИЧКИХ ФУНКЦИЈА

ВОЈИН ДАЈОВИЋ, БЕОГРАД

1. Испитујући особине функција дефинисаних степеним редовима, а посебно везе између коефицијената таквог реда и сингуларитета одговарајуће функције, J. Hadamard је, међу осталим, доказао следећи став [1]:

Ако су функције $f(z)$ и $g(z)$ дефинисане редовима

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v, \quad (1,1)$$

$$g(z) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v z^v, \quad (1,2)$$

чији су радиуси конвергенције r_1 , односно r_2 различити од 0, а њихови одговарајући сингуларитети су респективно α и β , тада функција $F(z)$ дефинисана редом

$$F(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v b_v z^v \quad (1,3)$$

нема других сингуларитета осим тачака $\alpha\beta$.

Функција (1,3), као што је познато, назива се резултантом функција (1,1) и (1,2).

Е. Вогел је употпунио овај Hadamard-ов став доказавши да он важи не само у целој равни z већ и за остале листове Riemann-ове површи ако су функције (1,1), (1,2) и (1,3) вишезначне, изузимајући једино случај кад је на свим осталим листовима функције (1,3) тачка $z = 0$ сингуларна. Вогел је показао, такође, да природа сингуларитета функције (1,3) зависи само од одговарајућих сингуларитета функција (1,1) и (1,2).

Доцније је G. Faber употпунио и прецизирао те ставове Hadamard-a и Boşel-a.

Овде ћу разматрати проблем егзистенције граничних вредности резултанте двеју класа аналитичких функција на рубу области холоморфности те резултанте; у једном специјалном случају тај проблем је већ био обрађен [2].

Овом приликом реч је о радијалним или, општије, угловним граничним вредностима. Наиме, као што је познато, ако је нека функција $F(z)$ дефинисана и холоморфна унутар јединичног круга $K (|z| < 1)$ на чијем се рубу налази тачка ζ , а сви низови (z_n) конвергирају ка ζ и припадају радиусу круга K с крајњом тачком ζ или, општије, оном делу тог круга K који захвата нетангентни угао у том кругу с теменом у ζ , тада ове граничне вредности низова (z_n) образују скуп свих радијалних, односно, општије, скуп свих угловних граничних вредности функције $F(z)$ у тачки ζ ; у случају кад су све ове граничне вредности низова $\{F(z_n)\}$ једнаке међу собом каже се да функција $F(z)$ има у тачки ζ граничну вредност.

2. По Hardy-евом ставу о уопштеној средњој вредности функција холоморфних унутар јединичног круга [3] имамо да је

$$\mu_\delta(f, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\delta d\varphi, \quad \delta > 0; \quad (2,1)$$

кад $r \rightarrow 1$, ако је функција $f(re^{i\varphi})$ холоморфна унутар круга K , тада или $\mu_\delta(f, r)$ неограничено расте, или је пак $\mu_\delta(f, r)$ ограничено, тј.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\delta d\varphi < C, \quad C = \text{const.} \quad (2,2)$$

У овом последњем случају каже се да функција $f(z)$ припада класи H_δ .

F. Riesz [4] је доказао да функције класе H_δ за све $\delta > 0$ у скоро свим тачкама руба круга K имају граничну вредност; другим речима, оне имају граничну вредност свугде на рубу круга K изузев највише на мноштву мере нула. Кад $r \rightarrow 1$, $\mu_\delta(f, r)$ тежи одређеној граничној вредности:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\delta d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})|^\delta d\varphi < C, \quad \delta > 0. \quad (2,3)$$

Очигледно је да све унутар јединичног круга ограничене аналитичке функције такође припадају класи H_δ (за различите δ). У низу

испитивања доказано је да за различите вредности δ функције класе H_δ имају разне аналитичке особине као и могућности аналитичког изражавања. Исто тако, реални део сваке од тих функција има, за различите вредности δ , различите аналитичке особине и различите могућности аналитичког изражавања.

Раније сам доказао [2] да функција

$$F(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v b_v z^v$$

има граничну вредност у свим тачкама руба круга K изузев највише у тачки $z = 1$ ако функција

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$$

припада класи H_2 , а њена мајорантна функција

$$g(z) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v z^v$$

холоморфна је унутар круга K .

За функцију $f(z)$ класе H_2 је ред

$$\sum_{v=0}^{\infty} |a_v|^2$$

конвергентан. Ако је пак овај ред дивергентан, тада, као што је доказао G. Polya, ако се за b_v узима наизменично ± 1 , на рубу круга K не постоји ниједан скуп тачака позитивне мере у којима функција

$$F(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v b_v z^v$$

има макакве граничне вредности.

У доказу следећих ставова искористићу и једну особину функција класе H_2 .

3. Образујмо резултанту $F(z)$ функција $f(z)$ и $g(z)$, где је

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v \quad (3.1)$$

функција класе H_δ , $0 < \delta < 1$, а $g(z)$ холоморфна функција чији се реални део у јединичном кругу може изразити Poisson-Stieltjes-овим интегралом

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)} dG(\theta), \quad (3,2)$$

при чему је $G(\theta)$ функција ограничене варијације за $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Познато је да су G. Evans и H. Brau утврдили неопходне и довољне услове које треба да испуњава функција $G(\theta)$ да би се хармониска функција $u(r, \varphi)$ могла изразити генералисаним Poisson-овим интегралом (3,2); потом је G. Evans [5] упростио ове услове и доказао да неопходан и довољан услов да би се хармониска функција могла изразити генералисаним Poisson-овим интегралом (3,2) јесте

$$\int_0^{2\pi} |u(r, \varphi)| d\varphi \leq M, \quad r < 1, \quad (3,3)$$

где је M константа независна од r .

Испитајмо да ли егзистирају граничне вредности резултанте на рубу јединичног круга поменутих функција $f(z)$ и $g(z)$. Наиме, докажимо следећи

Став 1. — Резултат

$$F(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v b_v z^v \quad (3,4)$$

функције

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v \quad (3,5)$$

која припада класи H_δ , $0 < \delta < 1$, и аналитичке функције дефинисане у јединичном кругу $K(|z| < 1)$ конвергентним редом

$$g(z) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v z^v \quad (3,6)$$

чији је реални део изражен Poisson-Stieltjes-овим интегралом

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(\theta-\varphi)} dG(\theta),$$

где је $G(\theta)$ функција ограничене варијације за $0 \leq \theta \leq 2\pi$, има у скоро свим тачкама на рубу јединичног круга одређене граничне вредности.

Доказ. Формирајмо најпре под датим условима резултанту (3,4). По претпоставци је функција

$$g(re^{i\varphi}) = u(r, \varphi) + i v(r, \varphi)$$

холоморфна за $r < 1$. Дакле, реални део реда

$$g(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + i\beta_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v + i\beta_v) r^v (\cos v\varphi + i \sin v\varphi)$$

је униформно конвергентан ред

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} r^v (\alpha_v \cos v\varphi - \beta_v \sin v\varphi)$$

за $r < 1$.

Имамо да је

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) d\varphi, \quad (3,7)$$

$$\alpha_v + i\beta_v = b_v = \frac{1}{\pi r^v} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) e^{-iv\varphi} d\varphi, \quad v = 1, 2, \dots \quad (3,8)$$

Како је

$$f(re^{i(\theta-\varphi)}) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v r^v e^{iv(\theta-\varphi)}, \quad (3,9)$$

може се за $r < 1$ писати

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{u(r, \varphi) f(re^{i(\theta-\varphi)})\} d\varphi = \alpha_0 a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} a_v b_v z^v, \quad (3,10)$$

где је $z = re^{i\theta}$, $\rho = r^2$, $0 \leq \rho < 1$. Дакле, ред на десној страни је, с тачношћу до адитивне константе, облика (3,4).

Сада ћемо доказати да је интеграл на левој страни релације (3,10) ограничен.

По претпоставци, $f(z)$ припада класи H_δ , $0 < \delta < 1$. Свака функција $f(z)$ класе H_δ ($\delta > 0$) може се написати у облику

$$f(z) \cong B(z) \cdot \psi(z), \quad (3,11)$$

где је $B(z)$ Blaschke-ова функција

$$B(z) = z_0^\lambda \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z} z_k} \cdot \frac{|z_k|}{z_k} \quad (3,12)$$

тј. функција која је унутар круга K ($|z| < 1$) холоморфна и таква да је $|B(z)| < 1$, а скоро у свим тачкама на рубу тог круга има граничну вредност 1 и унутар круга K нуле z_0 и z_k ($k = 1, 2, \dots$), а $\psi(z)$ је функција класе H_δ која нема нула унутар круга K . Дакле, за интеграл на левој страни релације (3,10) имамо, с обзиром на релације (3,11) и (3,12),

$$\left| \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) \cdot B(z) \cdot \psi(z) d\varphi \right| = \int_0^{2\pi} |u(r, \varphi)| \cdot |\psi(z)| d\varphi. \quad (3,13)$$

Напишемо ли

$$h(z) = |\psi(z)|^{\frac{\delta}{2}}, \quad (3,14)$$

имамо да је, на основи релације (2,3),

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^2(z) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi(z)|^\delta d\varphi < C, \quad z = re^{i\varphi}. \quad (3,15)$$

Ако са $h^*(z)$ обележимо најмању хармониску мајоранту субхармониске функције $h(z)$, то је, као што је познато, и

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^2(z) d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{*2}(z) d\varphi < C, \quad |z| < 1. \quad (3,15')$$

Пошто су за све $r < 1$ функције $h^{*2}(re^{i\varphi})$ позитивне и интеграли

$$\int_0^{2\pi} h^{*2}(re^{i\varphi}) d\varphi$$

ограничени, а функције $h^{*2}(re^{i\varphi})$, када $r \rightarrow 1$, теже функцији $h^{*2}(e^{i\theta})$ за скоро све θ , то је функција $h^{*2}(e^{i\theta})$ интеграбилна у Lebesgue-овом смислу, те важи позната неједнакост Р. Фатоу-а [6]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{*2}(e^{i\theta}) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{*2}(re^{i\varphi}) d\varphi < C. \quad (3,15'')$$

Дакле, функција $h^*(e^{i\theta})$ припада класи L_2 .

Како је функција $h(z)$ позитивна, то је, као што је познато, и функција h^δ , $0 < \delta < 1$, такође субхармониска функција у јединичном кругу и њена најмања хармониска мајоранта у овом кругу је такође $h^*(z)$, тј.

$$h^\delta(z) \leq h^*(z), \quad |z| \leq r < 1, \quad 0 < \delta < 1. \quad (3,16)$$

На основи (3,14), (3,15), (3,15') и (3,16) имамо да је

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(r, \varphi)| h^\delta(z) d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(r, \varphi)| h^{*2}(z) d\varphi. \quad (3,17)$$

Како се хармониска функција $h^*(z)$ може изразити Poisson-овим интегралом

$$h^*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^*(e^{i\theta}) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-\varphi) + r^2} d\theta, \quad (3,18)$$

то из (3,18) на основи Schwarz-ове неједнакости добијамо

$$h^{*2}(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{*2}(e^{i\theta}) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-\varphi) + r^2} d\theta, \quad z = re^{i\varphi};$$

такође је и

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(r, \varphi)| h^{*2}(re^{i\varphi}) d\varphi \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ |u(r, \varphi)| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{*2}(e^{i\theta}) \frac{(1-r^2) d\theta}{1-2r \cos(\theta-\varphi) + r^2} \right\} d\varphi \end{aligned} \quad (3,19)$$

где Poisson-Lebesgue-ов интеграл можемо мајорирати овако

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{*2}(e^{i\theta}) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-\varphi)+r^2} d\theta &\leq \\ &\leq \frac{1+r}{1-r} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{*2}(e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned} \quad (3,20)$$

На основи (3,19) и узимајући у обзир (3,3), (3,15'') и (3,20) имамо

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(r, \varphi)| h^{*2}(re^{i\varphi}) d\varphi \leq MC \frac{1+r}{1-r}, \quad r < 1. \quad (3,21)$$

Дакле, интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(r, \varphi)| \cdot |f(z)| d\varphi \leq MC \frac{1+r}{1-r}, \quad r < 1, \quad (3,22)$$

ограничен је у јединичном кругу.

Због релације (3,10) је и функција

$$\alpha_0 a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} a_v b_v z^v$$

ограничена у јединичном кругу, а одатле следи да је и функција $F(z)$ такође ограничена.

Пошто редови (3,5) и (3,6) имају радиус конвергенције 1, то и ред (3,4) на основи познатог става J. Hadamard-а, има такође радиус конвергенције 1.

Дакле, пошто је функција $F(z)$ холоморфна и ограничена унутар јединичног круга, она, по ставу [7] P. Fatou-а, има на рубу јединичног круга скоро у свим тачкама одређене радијалне граничне вредности. Овим је став 1 доказан.

Примедба 1. Како функцију ограничене варијације у одређеном интервалу можемо написати у облику разлике двеју позитивних ограничених растућих функција у том интервалу, то из те чињенице произлази да је услов (3,3) неопходан и довољан да се једна хармониска функција у јединичном кругу може изразити као разлика двеју позитивних хармониских функција у том кругу.

Другим речима, класа функција хармониских унутар јединичног круга које се изражавају помоћу Poisson-Stieltjes-овог интеграла поклапа се с класом хармониских функција које се могу претставити у облику разлике двеју позитивних хармониских функција. Зато се став 1 може исказати и на следећи начин:

Став 1'. — Резултат

$$F(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v b_v z^v$$

функције

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$$

која припада класи H_δ , $0 < \delta < 1$, и функције $g(z)$ која је разлика двеју у јединичном кругу холоморфних функција $g_1(z)$ и $g_2(z)$ чији су одговарајући реални делови позитивни, има у скоро свим тачкама на рубу јединичног круга одређене граничне вредности.

Примедба II. Ако је хармониска функција $u(r, \varphi)$ позитивна унутар јединичног круга, евидентно је да је услов (3,3) задовољен.

Узмимо сада у обзир функцију $g(z)$ која је дефинисана редом

$$g(z) = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} b_v z^v$$

конвергентним унутар јединичног круга K и има позитиван реалан део $u(r, \varphi)$, $z = re^{i\varphi}$, тј. $g(z)$ је функција класе R . Ова хармониска функција

$$u(r, \varphi) = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v \cos v\varphi - \beta_v \sin v\varphi),$$

функција класе R , у теорији равнотенцијала игра, као што је познато, истакнуту улогу. С. Carathéodory је испитао област варијабилности коефицијената α_v , β_v и одредио неопходне и довољне услове под којима функција дефинисана горњим редом припада класи R .

Напоменимо да са $g(z)$ припадају класи R такође и $g(ze^{i\varphi})$

(φ реално), $g(z^n)$ (n цео позитиван број), $\frac{1}{g(z)}$ и $\frac{1}{z} \int_0^z g(\zeta) d\zeta$.

Исто тако, са $g_i(z)$ ($i=1, 2, \dots, n$) класи R припада и

$$\sqrt[n]{g_1(z) \cdot g_2(z) \cdots g_n(z)}.$$

Дакле, са

$$g_1(z) = \frac{1-z}{1+z} \quad \text{и} \quad g_2(z) = \frac{1-z^2}{\sqrt{1-2z \cos \varphi + z^2}}$$

припада класи R и функција

$$\frac{1-z}{\sqrt{1-2z \cos \varphi + z^2}} = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \{ P_v(\cos \varphi) - P_{v-1}(\cos \varphi) \} z^v,$$

где су P_v Legendre-ови полиноми.

У вези са примедбом II можемо констатовати да је у ставу 1 садржан

Став 2. — Резултат

$$F(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v b_v z^v$$

функције

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$$

која припада класи H_δ , $0 < \delta < 1$, и функције $g(z)$ класе R , шј. функције која је дефинисана редом

$$g(z) = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} b_v z^v$$

конвергентним унутар јединичног круга K и која има позитиван реалан део, — има у скоро свим тачкама на рубу овог круга одређене граничне вредности.

Евидентно је да у овом случају уместо релације (3,22) имамо

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) |f(re^{i\varphi})| d\varphi \leq C \frac{1+r}{1-r}, \quad r < 1.$$

Библиографија

- [1] J. Hadamard, *Un théorème sur les séries entières*, Acta mathematica, t. XXII, 1899, p. 55.
- [2] В. Дајовић, О егзистенцији граничних вредности на рубу јединичног круга резултатне двеју класа функција, Весник Друштва мат. и физ. НРС, III, 3—4, 1951, стр. 51—55.
- [3] G. Hardy, *The mean value of the modulus of an analytic function*, Proceedings of the London Math. Society, 14, (1914), p. 269—277.
- [4] F. Riesz, *Über die Randwerte einer analytischen Funktion*, Mathematische Zeitschrift, B. 17 (1923), S. 87—95.
- [5] G. Evans, *Sur l'intégrale de Poisson*, Comptes Rendus, t. 177, p. 241.
- [6] P. Fatou, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta mathematica. XXX (1906), p. 375.
- [7] P. Fatou, op. cit. p. 337.

**QUELQUES THÉORÈMES SUR LES VALEURS LIMITES DE LA
RÉSULTANTE DE FONCTIONS, APPARTENANT À LA CLASSE
 H_δ ($0 < \delta < 1$) ET ENCORE DE CERTAINES AUTRES CLASSES
DE FONCTIONS ANALYTIQUES**

par VOJIN DAJOVITCH, BEOGRAD

Résumé

Dans cet article l'auteur démontre quelques théorèmes concernant l'existence des valeurs limites de la résultante des certaines classes de fonctions analytiques sur le contour du cercle-unité.

1. Théorème 1. — Soient les fonctions $f(z)$ et $g(z)$ définies par les séries

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} \quad \text{et} \quad g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} z^{\nu}, \quad (1)$$

$f(z)$ étant une fonction de classe H_δ , $0 < \delta < 1$, c.-à-d. une fonction telle qu'on a

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\delta d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})|^\delta d\varphi < C, \quad (2)$$

et $g(z)$ étant une série convergente dans le cercle-unité, dont la partie réelle peut être représentée par l'intégrale de Poisson-Stieltjes:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} dG(\theta), \quad (3)$$

où $G(\theta)$ est une fonction à variation bornée pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$; alors la résultante $F(z)$, définie dans le cercle-unité par la série

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} b_{\nu} z^{\nu}, \quad (4)$$

a dans presque tous les points de la circonférence $|z|=1$ des valeurs limites bien déterminées.

Démonstration. — D'après la supposition, la fonction

$$g(re^{i\varphi}) = u(r, \varphi) + i v(r, \varphi)$$

est holomorphe pour $r < 1$ et par suite la série

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_{\nu} \cos \nu\varphi - \beta_{\nu} \sin \nu\varphi) r^{\nu}$$

converge uniformément pour tous $r < 1$; pour les coefficients de cette série on a les formules

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) d\varphi, \\ \alpha_{\nu} + i\beta_{\nu} &= b_{\nu} = \frac{1}{\pi r^{\nu}} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) e^{-i\nu\varphi} d\varphi, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Puisque $f(re^{i(\theta-\varphi)}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} r^{\nu} e^{i\nu(\theta-\varphi)}$, on peut, pour $r < 1$, écrire

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{u(r, \varphi) \cdot f(re^{i(\theta-\varphi)})\} d\varphi = \alpha_0 a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} b_{\nu} z^{\nu}, \quad (6)$$

où $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho = r^2$, $0 \leq \rho < 1$.

Donc, la série dans le second membre de la relation (5) définit, à une constante additive près, la résultante (4) des fonctions (1).

Nous allons démontrer que l'intégrale dans le premier membre de la relation (5) est bornée. — D'après la supposition, $f(z)$ appartient à la classe H_δ , $0 < \delta < 1$. Toute fonction de classe H_δ ($\delta > 0$) peut s'écrire sous la forme

$$f(z) = B(z) \cdot \psi(z), \quad (7)$$

$\psi(z)$ étant une fonction de classe H_δ et sans zéros dans le cercle-unité, et $B(z)$ signifiant la fonction de Blaschke, holomorphe et telle que $|B(z)| < 1$ dans le cercle-unité; en plus, $B(z)$ a dans presque tous les points de la circonférence $|z| = 1$ une valeur limite égale à 1. — Donc, en tenant compte de la relation (6) et de la propriété citée de la fonction $B(z)$, on a pour l'intégrale (5):

$$\left| \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) \cdot B(z) \cdot \psi(z) d\varphi \right| = \int_0^{2\pi} |u(r, \varphi)| \cdot |\psi(z)| d\varphi. \quad (8)$$

En posant

$$h(z) = |\psi(z)|^{\frac{\delta}{2}}, \quad (9)$$

on a, d'après la relation (2),

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^2(re^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi(re^{i\varphi})|^\delta d\varphi < C, \quad z = re^{i\varphi}. \quad (10)$$

La fonction subharmonique $h(z)$, qui satisfait à la relation (10), a dans le cercle-unité une majorante harmonique. En désignant celle-ci par $h^*(z)$, on a, comme c'est connu,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^2(re^{i\varphi}) d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{*2}(re^{i\varphi}) d\varphi < C, \quad |z| < 1. \quad (11)$$

Pour tous $r < 1$ les fonctions $h^2(re^{i\varphi})$ sont positives et les intégrales

$$\int_0^{2\pi} h^2(re^{i\varphi}) d\varphi$$

sont bornées et, en plus, pour presque tous θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) les fonctions $h^2(re^{i\varphi})$ tendent, d'après (10), vers la limite $h^2(e^{i\theta})$; il en résulte que la

fonction $h^2(e^{i\theta})$ est intégrable au sens de Lebesgue dans l'intervalle $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et que la bien connue inégalité de Fatou [6]

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^2(e^{i\theta}) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^2(re^{i\varphi}) d\varphi < C \quad (12)$$

est valable dans cet intervalle.

Puisque la fonction $f(z)$ est positive dans le cercle-unité, on en conclut, comme c'est connu, que la fonction $h^{\frac{1}{\delta}}(z)$, $0 < \delta < 1$ est, elle aussi, une fonction subharmonique dans le cercle-unité ayant de même $h^*(z)$ comme la plus petite majorante harmonique dans ce cercle, c.-à-d.

$$h^{\frac{1}{\delta}}(z) \leq h^*(z), \quad |z| \leq r < 1. \quad (13)$$

Par suite des relations (9) — (13) on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(r, \varphi)| h^{\frac{2}{\delta}}(re^{i\varphi}) d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(r, \varphi)| h^{*2}(re^{i\varphi}) d\varphi, \quad r < 1. \quad (14)$$

La fonction harmonique $h^*(re^{i\varphi})$ peut être représentée par l'intégrale de Poisson

$$h^*(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^*(e^{i\theta}) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-\varphi) + r^2} d\theta; \quad (15)$$

par suite de l'inégalité de Schwarz et de (15) on obtient

$$h^{*2}(re^{i\varphi}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{*2}(e^{i\theta}) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-\varphi) + r^2} d\theta, \quad r < 1.$$

De même on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(r, \varphi)| h^{*2}(re^{i\varphi}) d\varphi \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ |u(r, \varphi)| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{*2}(e^{i\theta}) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-\varphi) + r^2} d\theta \right\} d\varphi \quad (16) \end{aligned}$$

où nous pouvons l'intégrale de Poisson-Lebesgue majorer de la façon suivante:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{*2}(e^{i\theta}) \frac{(1-r^2) d\theta}{1-2r \cos(\theta-\varphi) + r^2} \leq \frac{1+r}{1-r} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{*2}(e^{i\theta}) d\theta, \quad r < 1. \quad (17)$$

G. Evans [5] a démontré que pour la représentation d'une fonction $u(r, \varphi)$ harmonique dans le cercle-unité par l'intégrale de Poisson-Stieltjes la condition nécessaire et suffisante est que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(r, \varphi)| d\varphi \leq M, \quad (18)$$

M étant une constante indépendante de r . En tenant compte de ce fait-ci, ainsi que des relations (16) et (17), on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(r, \varphi)| h^{*2}(re^{i\varphi}) d\varphi \leq MC \frac{1+r}{1-r}, \quad r < 1. \quad (19)$$

Par conséquent, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(r, \varphi)| \cdot |f(re^{i\varphi})| d\varphi \leq MC \frac{1+r}{1-r}, \quad r < 1, \quad (20)$$

c.-à-d. dans le cercle-unité l'intégrale dans le premier membre de (20) est bornée. Il est aisé de conclure, en tenant compte des relations (20) et (6), que la fonction

$$\alpha_0 a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} a_v b_v z^v$$

est bornée dans le cercle-unité; il en suit que la résultante considérée (4) est aussi bornée dans ce cercle et, par conséquent, on la peut représenter dans le cercle $|z| < 1$ par l'intégrale de Cauchy.

Les séries (1) ayant les rayons de convergence égaux à 1, on conclut, d'après le théorème de J. Hadamard sur la détermination du rayon de convergence des séries de Taylor, que la série (4) a aussi le rayon de convergence égal à 1.

Donc, étant holomorphe et bornée dans le cercle-unité, la fonction

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} b_{\nu} z^{\nu}$$

a, d'après le théorème de Fatou [7], dans presque tous les points sur le contour de ce cercle, des valeurs limites radiales bien déterminées, c. q. f. d.

Remarque. — Puisque une fonction à variation bornée dans un intervalle donné peut s'écrire sous la forme de la différence de deux fonctions positives, bornées et croissantes dans cet intervalle, il en suit que la relation (3) donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction harmonique dans le cercle-unité puisse s'écrire sous la forme de la différence de deux fonctions harmoniques et positives dans ce cercle. Autrement dit, la classe de fonctions harmoniques dans le cercle-unité représentables par l'intégrale de Poisson-Stieltjes coïncide avec la classe de fonctions harmoniques représentables sous la forme de la différence de deux fonctions harmoniques positives; c'est pourquoi nous pouvons énoncer le théorème 1 de la façon suivante:

Théorème 1'. — *La résultante*

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} b_{\nu} z^{\nu}$$

de la fonction

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$$

appartenant à la classe H_{δ} , $0 < \delta < 1$, et de la fonction $g(z)$ qui est la différence de deux fonctions $g_1(z)$ et $g_2(z)$ holomorphes dans le cercle-unité et ayant des parties réelles positives, — a dans presque tous les points sur la circonférence $z=1$ des valeurs limites bien déterminées.

2. Il est évident que, si la fonction harmonique $u(r, \varphi)$ est positive dans le cercle-unité, la condition (3) doit être satisfaite. En tenant compte maintenant de la fonction $g(z)$ définie par la série

$$g(z) = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} z^{\nu},$$

convergente dans le cercle-unité et ayant la partie réelle $u(r, \varphi)$ ($z = re^{i\varphi}$) positive (c.-à-d. $g(z)$ est une fonction de classe **R**), on reconnaît aisément, particulièrement pour $\alpha_0 = 1$, la fonction harmonique

$$u(r, \varphi) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\nu} (\alpha_{\nu} \cos \nu \varphi - \beta_{\nu} \sin \nu \varphi),$$

jouant un rôle considérable dans la théorie de potentiel.

Avec $g(z)$ appartiennent à la classe **R** aussi les fonctions: $g(ze^{i\varphi})$ (φ réel), $g(z^n)$ (n entier positif) et $\frac{1}{g(z)}$. De même, avec $g_i(z)$ ($i=1, 2, \dots, n$) appartient à la classe **R** encore

$$\sqrt{g_1(z) \cdot g_2(z) \dots g_n(z)}.$$

Par conséquent, avec

$$g_1(z) = \frac{1-z}{1+z} \quad \text{et} \quad g_2(z) = \frac{1-z^2}{\sqrt{1-2z \cos \varphi + z^2}}$$

à la classe **R** appartient aussi la fonction

$$\frac{1-z}{\sqrt{1-2z \cos \varphi + z^2}} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \{P_{\nu}(\cos \varphi) - P_{\nu-1}(\cos \varphi)\} z^{\nu},$$

P_{ν} désignant les polynômes de Legendre.

En tenant compte du précédent, on peut constater que le théorème 1 contient le théorème suivant.

Théorème 2. — *La résultante*

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} b_{\nu} z^{\nu}$$

de la fonction

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$$

appartenant à la classe H_δ , $0 < \delta < 1$, et de la fonction $g(z)$ définie par la série

$$g(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu z^\nu$$

convergente dans le cercle-unité et ayant la partie réelle positive, — a dans presque tous les points de la circonférence $|z| = 1$ des valeurs limites bien déterminées.

Evidemment, dans ce cas on a, au lieu de la relation (20), l'inégalité

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) \cdot |f r e^{i\varphi}| d\varphi \leq C \frac{1+r}{1-r}, \quad r < 1.$$