Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. VII, 3—4, (1955), Beograd

O JEDNOM MATEMATIČKOM ASPEKTU ZENONOVE APORIJE AHIL

ERNEST STIPANIĆ, BEOGRAD

1. Kratki izvod Zenonove aporije Ahil nalazi se u Aristotelovoj Fizici. On, u prevodu B. Petronijevića [1], na srpsko-hrvatskom jeziku glasi:

„(Ako postoji kretanje) najsporiji ne može nikada biti dostignut od najbržeg. Jer nužnim načinom mora onaj koji goni najpre stići (tamo) odakle je pošao onaj koji bega, sa čega će sporiji biti nužnim načinom uvek ispred (bržeg)".

Nije poznat originalan tekst pomenute aporije, jer je izgubljen spis u kome ga je Zenon izložio. Poznati komentator Aristotelove Fizike, Simplicije, opširno se zadržao u svojim komentarima na pomenutoj aporiji. Na osnovu tih komentara B. Petronijević je dao hipotetičku rekonstrukciju originalne formulacije aporije Ahil, koja bi, prema toj rekonstrukciji, na srpskohrvatskom jeziku, trebalo da glasi [2]:

„Ako postoji kretanje, ni najsporiji ne može nikada biti dostignut ni od najbržeg. Jer onaj koji goni mora nužnim načinom, pre nego što dostigne (onog koji bega), najpre doći na mesto odakle je pošao onaj koji bega. A ako se pretpostavi, da se razdaljina između njih može smanjivati u beskonačnost, ne samo da Ahil nikada ne može stići Hektora, nego (ne može stići) ni kornjaču".

Ova je formulacija po formi i po sadržaju u suštini ekvivalentna sa formulacijom aporije Ahil koju susrećemo u naučnoj i filozofskoj literaturi. Zato ćemo se u daljem izlaganju njenog teksta držati.

Aporija Ahil, kao i druga poznata Zenonova aporija Dihotomija bile su predmet filozofskih rasprava mnogih filozofa, naprimer: Aristotela, Hegela, Frontera-e, Evellin-a, Lenjina, Bergsona, Russel-a i Petronijevića. Dobro je poznata uloga koju su odigrale te aporije u stvaranju i razvoju infinitezimalne metode u matematici klasične Grčke. P. Tannery, L. Brunschwicg, A. Rey, F. Enriques, P. Rufini, R. Mandolfo, S. Luria, H. Zeuthen,

H. Hasse, H. Scholz, O. Toeplitz i drugi tretirali su pitanje uloge i značaja pomenutih aporija u razvitku grčke matematike IV i III stoleća pre n. e.

Ovde nas ne interesuju logički i filozofski aspekt aporije Ahil, kao ni pitanje njene uloge u razvoju grčke matematike, već nam je namera da je matematički tretiramo u opštijem obliku od onog koji se do sada javljao u naučnoj i filozofskoj literaturi.

2. Neka je $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ jedan niz usastopnih položaja Ahila i $K_0, K_1, K_2, \ldots K_n$ korespondentni niz uzastopnih položaja kornjače.

U naučnoj i filozofskoj literaturi [3] matematičko tretiranje aporije Ahil se zasniva, eksplicitno ili implicitno, na pretpostavci:

$$\text{(1)} \qquad \overline{K_{i-1}K_i} = q \cdot \overline{A_{i-1}A_i} \quad (A_i \equiv K_{i-1},\ 0 < q < 1,\ i \in N)$$

$$\begin{array}{cccccc} & K_0 & K_1 & K_{i-1} & K_{n-1} & K_n \\ \hline A_0 & A_1 & A_2 & A_i & A_n & \end{array}$$

gde je N skup prirodnih brojeva. Takvim načinom tretiranja praktično se, dakle pretpostavlja da se matematički smisao aporije Ahil direktno i jedino iscrpljuje beskrajnim nizom $\overline{A_n K_n}$:

$$\text{(2)} \qquad \overline{A_0 K_0},\ \overline{A_0 K_0} \cdot q,\ \overline{A_0 K_0} \cdot q^2, \ldots \overline{A_0 K_0}\, q^n, \ldots$$

odnosno, beskrajnim redom $\sum_{n=0}^{\infty} \overline{A_n K_n}$:

$$\text{(3)} \qquad \overline{A_0 K_0} + \overline{A_0 K_0} \cdot q + \overline{A_0 K_0} \cdot q^2 + \ldots + \overline{A_0 K_0}\, q^n + \ldots = \overline{A_0 K_0} \sum_{n=0}^{\infty} q^n .$$

3. Mi ćemo matematičko tretiranje pomenute aporije uopštiti na način kako sledi, iako je u osnovi za njeno logičko i filozofsko tretiranje dovoljan niz (2), odnosno red (3).

Pođimo zato od pretpostavke:

$$\text{(4)} \qquad \overline{K_{i-1}K_i} < \overline{A_{i-1}A_i} < \overline{A_{i-1}K_{i-1}} + \overline{K_{i-1}K_i} \quad (i \in N)$$

koja je očigledno opštija od pretpostavke (1) i nalazi svoju opravdanost u formulaciji aporije Ahil

$$\begin{array}{ccccccc} & K_0 & K_1 & K_{i-1} & K_i & K_{n-1} & K_n \\ \hline A_0 & A_1 & A_2 & A_i & & A_n & \end{array}$$

Stavimo li sad

$$\frac{\overline{A_{i-1}A_i}}{\overline{A_{i-1}K_{i-1}}} = a(i) \qquad \frac{\overline{K_{i-1}K_i}}{\overline{A_{i-1}K_{i-1}}} = k(i) \qquad (i \in N))$$

tada uslov (4) postaje

$$O < a(i) - k(i) < 1$$

ili

$$(5) \qquad O < q(i) < 1$$

gde je $q(i) = a(i) - k(i)$*). Kako je

$$\frac{\overline{A_{i-1}A_i} - \overline{K_{i-1}K_i}}{\overline{A_{i-1}K_{i-1}}} = q(i) \quad (i \in N)$$

i

$$1 - \frac{\overline{A_{i-1}A_i} - \overline{K_{i-1}K_i}}{\overline{A_{i-1}K_{i-1}}} = 1 - q(i)$$

odnosno

$$\frac{\overline{A_i K_i}}{\overline{A_{i-1}K_{i-1}}} = 1 - q(i)$$

to dobijamo beskrajni niz

$$(6) \qquad \overline{A_nK_n} = \overline{A_0K_0} \cdot \prod_{i=1}^{n} [1 - q(i)] \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

odnosno, beskrajni red

$$(7) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \overline{A_nK_n} = \overline{A_0K_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{n} [1 - q(i)] \quad (q(0) = 0)$$

Iz pretpostavke (1) sledi da niz $\overline{A_nK_n} \to 0$, kad $n \to \infty$. Sad se postavlja pitanje šta biva sa $\overline{A_nK_n}$, kad $n \to \infty$, ako je $\overline{A_nK_n}$ niz oblika (6)? S obzirom na uslov (5) i poznatt stav u teoriji beskrajnih proizvoda [4] odgovor na postavljeno pitanje potpuno je sadržan u stavu:

Da bi $\overline{A_nK_n} \to 0$, kad $n \to \infty$, potrebno je i dovoljno da red $\sum_{i=1}^{\infty} q(i)$ divergira.

Dakle, da bi red (7) konvergirao potrebno je da red $\sum_{i=1}^{\infty} q(i)$ divergira.

---

*) Ako se tačka A_i nalazi levo od tačke K_{i-1}, onda je $O < a(i) < 1$, a ako se nalazi između tačaka K_{i-1} i K_i, onda je $a(i) > 1$. Oba slučaja stoje u saglasnosti s formulacijom aporije Ahil.

Ne uzimamo u obzir slučaj u kome se tačka A_i može nalaziti i na desno od tačke K_i, jer nije u saglasnosti s formulacijom aporije Ahil, mada ga, sa čisto matematičkog stanovišta ima smisla tretirati.

Kako za svako $n > 1$, zbog uslova (5), važi nejednakost

$$\prod_{i=1}^{n+1} [1 - q(i)] < \prod_{i=1}^{n} [1 - q(i)]$$

to se primenom Olivier-ovog stava [5] na red (7) neposredno dobija:

Da bi red (7) konvergirao potrebno je ne samo da $\prod_{i=1}^{n} [1 - q(i)] \to 0$, već i da $n \cdot \prod_{i=1}^{n} [1 - q(i)] \to 0$ kad $n \to \infty$.

Najzad primenom količničkog Cauchy-evog kriteriuma konvergencije [6] na red (7) neposredno se dobija:

Ako je

$$0 < \varliminf_{n \to \infty} q(n) \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} q(n) \leqslant 1$$

onda red (7) *sigurno konvergira. Međutim, ako je*

$$\varliminf_{n \to \infty} q(n) = 0$$

pitanje konvergencije reda (7) *ostaje otvoreno.*

S obzirom na značenje funkcije $q(i)$, koje smo joj dali u matematičkom tretiranju aporije Ahil, jasno se vidi kako se Cauchy-evom količničkom kriteriumu konvergencije, u teoriji beskrajnih redova, može dati tumačenje koje je u neposrednoj vezi s aporijom Ahil.

4. Ako je $a(i) \equiv 1/2$ i $k(i) \equiv 0$, tj. $q(i) \equiv 1/2$ za svako $i \in N$, onda to praktično pretstavlja slučaj aporije Dihotomija, a ako je $a(i) \equiv 1$ i $k(i) \equiv q$, tj. $q(i) \equiv q$, onda se posmatrano, generalisano, tretiranje aporije Ahil svodi na, u literaturi, već poznato matematičko tretiranje iste aporije.

Niz autora, naročito onih koji su proučavali razvitak matematike u klasičnoj Grčkoj, među kojima u prvom redu pominjemo P. Tannery-a [7], H. Zeuthena [8] i F. Enriquesa [9] istakli su i zastupali mišljenje implicitno, odnosno eksplicitno, da je u aporijama Dihotomija i Ahil anticipiran osnovni stav [10] na kome je izgrađena metoda ekshaustije, kao infinitezimalna metoda u matematici antičke epohe. Ovde možemo podvući da takvom mišljenju daje potpuniju logičku i matematičku opravdanost generalisano matematičko tretiranje aporije Ahil o kome smo u ovom radu govorili, no što je daje uobičajeno tretiranje zasnovano na pretpostavci (4).

LITERATURA

[1] B r a n i s l a v P e t r o n i j e v i ć, *Istoriske i kritičke primedbe na prva dva Zenonova dokaza protiv kretanja*, SAN, Glas CLXXIV, Beograd, 1941, str. 84.

[2] Ibid.

[3] F r. E v e l l i n, *Infini et Quantité*, Paris, 1881.

G. F r o n t e r a, *Étude sur les arguments de Zénon d'Elée contre le mouvement*, Paris, 1891.

H. G. Z e u t h e n, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Kopenhagen, 1896, S. 66—67.

F e d e r i g o E n r i q u e s, *L'évolution des idées géométriques dans la pensée grecque*, Paris, 1927, p. 19; *La relatività del movimento nell'antica Grecia*, Periodico di matematiche Vol. I, No 2, Bologna, 1921; *La polemica eleatica per il concetto razionale della geometria*, P. di mat. Vol. III, No 2, 1923.

K o n r a d K n o p p, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Berlin, 1931, S. 105.

R o d o l f o M a n d o l f o, *L'infinito nel pensiero dei Greci*, Firenze, 1934, pp. 185—186.

B. P e t r o n i j e v i ć, Ibid., str. 88—89.

П. С. К у д р я в ц е в, *История физики*, Москва, 1948 Т. 1, стр. 26—27.

A r t h u r B e r n h a r t, *Curves of pursuit*, Scripta Mathematica, New York, 1954, Vol. XX, Nos 3—4, pp. 125—127.

[4] K. K n o p p, Ibid., S. 227, Satz 4.

[5] Ibid., S. 125.

[6] Ibid., S. 119—120.

[7] P. T a n n e r y, *Le concept scientifique du continu — Zénon d'Élée et Georg Cantor*, Revue philosophique, Tome XX, Paris 1885, pp. 391—92; *Zénon d'Élée, Pour l'histoire de la science helléne*, Paris 1930, p. 263.

[8] H. Z e u t h e n, Ibid., S. 64—70.

[9] F. E r i q u e s, *La relativitá del movimento nell'antica Grecia*, Periodico di matematiche, Vol. 1, № 2, 1921, pp. 77—94; *La polemica eleatica per il concetto razionale della geometria*, P. di mat., Vol. III, № 2, 1923, pp. 73—88; *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna* V, Bologna, 1930, pp. 8—9; X, p. 21.

[10] *Gli Elementi d'Euclide editi da F. Enriques*, Bologna 1932, Libro X Prop. 1.