Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie. Vol. VI, 1—2 (1954), Beograd

QUELQUES APPLICATIONS DES ENSEMBLES ORDONNÉS[1])

par VICTOR SEDMAK, ZAGREB

Introduction

L'importance de la théorie des ensembles provient du fait que ses notions fondamentales — élément, ensemble, correspondance sont notions fondamentales des mathématiques.

Les études systématiques de ces notions qui font le sujet de la théorie des ensembles, ont en premier lieu une signification de principe dans la conception des mathématiques et de ses problèmes particuliers mais elles ont aussi une valeur pratique.

Poser de problèmes, s'efforcer d'en trouver des solutions tout cela est étroitement lié avec le développement de toute science. Au cours d'un tel travail on cherche et on trouve des voies et méthodes nouvelles qui, par elles-mêmes, représentent souvent un progrès remarquable de la science.

C'est ainsi que par exemple on peut citer le problème de l'infini[2]) qui par sa grandeur et son importance, comme par ses difficultés et ses contradictions a été un sujet de méditation qui a toujours preocupé les savants les plus distingués.

L'infini des nombres naturels, était déjà connu et employé par les mathématiciens grecs. Son étude systématique dans le calcul infinitésimal a donné aux mathématiques un grand essor. Encore avant la naissance de la théorie des ensembles, surtout au sein du calcul infinitésimal, il était déjà clair que nous pouvons enlever à la suite infinie des nombres naturels sa partie finie et que la suite qui en résultera aura le même caractère infini; de même, si nous multiplions par 2 chaque nombre naturel, nous n'avons que des nombres pairs, ce que nous obtenons aussi en

---

[1]) Thèse de doctorat soutenue le 15.12.1953. à la Faculté des Sciences de Zagreb

[2]) La notion de l'infini est étroitement liée à la notion du zéro et de l'ensemble vide, dont le nombre cardinal est zéro, car nous pouvons dire que l'ensemble est vide, si pas un de tous les éléments possibles ne lui appartient. C'est pour cette raison que les problèmes et les difficultés liées à ses notions sont semblables.

considérant que, »la moitié« de tous les nombres naturels, c'est à dire chaque deuxième nombre à partir du nombre 2. L'étude des ensembles infinis de Cantor présente une époque historique dans l'évolution des notions de l'infini. Son résultat fondamental c'est que les éléments de l'ensemble des nombres naturels ne peuvent pas correspondre d'une manière biunivoque aux éléments de l'ensemble des nombres réels, c'est à dire que

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$$ [1]

Par ce résultat on a établi l'existence des quantités infinies essentiellement distinctes. Ce résultat a donné à la recherche de solutions du problème de l'infini une nouvelle et grande contribution et un grand essor bien qu'il ne soit par cela ni tout à fait résolu ni exempt de contradictions. Ceci est visible dans le problème du continu de Suslin (v. Kurepa [1] p. 441, problème 1), dans le paradoxe de Burali Forti (qui au fait est une analogie complète avec »le nombre« »de tous« les nombres naturels), ensuite, les »hyperséries« et les classes qui ne sont pas des ensembles, les recherches de Gödel sur le continu etc.

Comme il est connu, dans la découverte de Cantor nommé ci-dessus, qui peut être comparée aux découvertes de nombres irrationnels par des mathématiciens grecs il s'agit ici de l'étude des applications biunivoques des éléments des ensembles infinis[2].

L'élargissement de la notion de l'énumeration aux ensembles infinis, (ce qui est lié à l'axiome du choix et représente un sujet dont on discute encore des principes) nous a conduit à la notion des ensembles bien ordonnés respectivement aux nombres ordinaux transfinis.

L'élargissement de la notion d'induction totale en induction transfinie (v. Kurepa [1] pp. 133, 161) est dans une relation étroite avec les ensembles bien ordonnés et les transformations biunivoques strictement croissantes.

En général, nous pouvons souligner que la notion de la correspondance est un moyen par lequel d'une manière strictement scientifique, comme pour les ensembles finis, nous examinons differentes propriétés des ensembles infinis en les classifiant et en considérant des formes variées de structures (espace, ordre etc.).

La généralisation de la notion de l'ensemble totalement ordonné en considérant (Hausdorff) des ensembles partiellement ordonnés représente

---

[1]) De là résulte que nous ne pouvons épuiser tous les points de la circonférence en y inscrivant une suite de polygones (par ex. en inscrivant des rectangles comme l'on procède dans le calcul intégral) et que le nombre cardinal des points qui ne sont compris dans aucun polygones est égal au nombre cardinal de tous le points de la circonférence.

[2]) J'ai donné dans mon article [2] quelques idées en rapport avec le problème de l'infini.

un outil à résoudre quelques problèmes et elle a rendu possible la généralisation de bien de notions précedentes[1]).

Mais on a posé, en même temps, toute une série de nouveaux problèmes assez difficiles.

Dans ce domaine, particulièrement dans les ensembles ramifiés et dans les ensembles partiellement ordonnés tels que chaque partie totalement ordonnée est aussi bien ordonnée, M. Kurepa a donné une contribution remarquable; il s'en est servi en particulier étudiant le problème de Suslin (v. Kurepa 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, p. 212). Il semble que M. Kurepa soit le premier qui ait donné l'idée de la superposition d'ordres. (Par la superposition d'ordres l'on comprend l'association d'un ordre partiel $\leqslant_s$ à un certain ensemble d'ordres totaux $\bigcup_\alpha \leqslant_\alpha$ d'un ensemble S de manière que n'importe quel élément $a \in S$ sera devant n'importe quel élément $b \in S$ si et seulement si a se trouve devant b dans chaque ordre total $\leqslant_\alpha$ (v. G. Kurepa [5] p. 477, [4] p. 66, [1] p. 241)).

De cette manière les permutations, dont le premier domaine était l'analyse combinatoire, ont reçu un nouveau et grand domaine d'applications.

Dushnik-Miller [1] ont donné la définition de la dimension $d_s(S \leqslant)$ d'ensemble partiellement ordonné $(S \leqslant_s)$ comme nombre minimum de nombres cardinaux des ensembles des ordres totaux avec lesquels par le moyen cité l'on peut reconstruire l'ensemble partiellement ordonné S. Parmi les résultats qui se trouvent dans l'étude de Dushnik-Miller je voudrais mettre en relief le théorème 4.22 de la page 605. Dushnik-Miller ont basé ce théorème sur le résultat de Erdös-Szekeres [1] d'après lequel dans chaque permutation de $m \in$ N éléments différents il y a k éléments dans l'ordre croissant ou decroissant; k y est le nombre naturel pour lequel:

$$(k-1)^2 < m \leqslant k^2$$

Dushnik-Miller prouvent que la dimension d_s de l'ensemble S est plus grande que n si l'ensemble S est un ensemble constitué de $2^{2^n}+1$ nombres naturels et de toutes leurs paires ordonnées de cette manière que $x < y$, $x, y \in S$ alors et seulement alors si x est un nombre naturel et y une paire de nombre naturel contenant x comme un terme.

L'idée de cette preuve consiste à généraliser les résultats de Erdös-Szekeres pour le cas de plusieurs permutations. D'après Erdös-Szekeres, de m éléments dans deux permutations il y a dans le même ordre ou dans l'ordre inverse au moins $\sqrt{m} \in N$ ou bien le premier nombre naturel plus grand de $\sqrt{m}$. Il s'ensuit par le même fait que de ses $[\sqrt{m}]$ élé-

[1]) Aujourd'hui, particulièrement en France, l'ensemble partiellement ordonné est nommé „ordonné" par distinction de l'ordonnement total.

ments il y a dans la troisième permutation $\sqrt{[\sqrt{m}]} \geqslant \sqrt{\sqrt{m}}$ ou bien plusieurs éléments qui sont dans toutes ces permutations dans le même ordre ou dans l'ordre inverse, car on peut considérer comme une permutation les deux premières permutations en ce qui concerne le même ordre ou l'ordre inverse de ces $[\sqrt{m}]$ éléments. D'une façon analogue dans quatre permutations ce minorant est $\sqrt[2^3]{m}$ et généralement, pour n permutations $\sqrt[2^{n-1}]{m}$. Naturelment pour n'importe quel nombre des permutations n il existe un nombre naturel, m de cette manière que $\sqrt[2^{n-1}]{m}$ soit arbitrairement grand. Par exemple, dans n permutations de $m = 2^{2^n} + 1$ $(n \in N)$ éléments, il existe toujours 3 éléments, désignons les avec 1, 2, 3, qui dans chaque permutation p_α sont soit dans le rapport $1 <_\alpha 2 <_\alpha 3$, soit dans le rapport $3 <_\alpha 2 <_\alpha 1$. Dans ce cas la paire (1, 3) qui serait toujours après 1 et après 3 serait toujours aussi après 2 ce qui veut dire qu'il ne suffit pas n permutations pour reconstruire l'ensemble $(S \leqslant_s)$.

Au travail de Dushnik-Miller se rattache l'oeuvre de Komm (1).

L'application de la théorie des ensembles en géometrie a formé une nouvelle branche — la topologie ensembliste. C'est ainsi que nous avons encore une nouvelle méthode pour étudier un vieux problème, qu'est le problème des polyèdres commencé par les Grecs.

Le livre de M. G. Kurepa: La théorie des ensembles, Zagreb 1951 contient 14 problèmes de la théorie des ensembles et parmi eux il y en a quelques-uns posés par l'auteur.

Un de ces problèmes se trouve à la page 441 ou 205 du livre cité sous le numéro 4 et on y lit:

»*P* étant un polyèdre, soit $[P]$ l'ensemble formé de l'ensemble vide *v*, des sommets, des arêtes, des faces du polyèdre *P*, et du polyèdre *P* lui-même; déterminez le nombre cardinal

$$\text{(1)} \qquad sup\ dim\ ([P]; \subseteq),\ P \subset C_3$$

ici *dim* est une abbréviation pour la dimension de l'ensemble partiellement ordonné (d_s); naturellement *P* parcourt l'ensemble des polyèdres qui se trouve dans l'espace C_3 (ibid. 205).

Le sujet de cette thèse c'est de résoudre le problème mentioné ainsi que de résoudre quelques questions qui s'y rattachent. Nous prouverons que le nombre (1) est $\aleph_0$.

D'après K. Reidemeister, [1], p. 84, chaque propriété d'un ensemble partiellement ordonné, associé à un polyèdre donné, est une propriété topologique du polyèdre, parce que la structure d'un tel ensemble ne dépend que des relations d'incidence du complexe du polyèdre correspondant. Particulièrement telles propriétés présentent des fonctionnelles d_s et $\overline{d}_s$ ainsi que toutes leurs fonctions. Au contraire, $\overline{d}_s$ n'est jamais, et d_s n'est pas toujours une propriété topologique, ce que j'ai démontré dans ma thèse (v.L.1.5, T.2.7, T.2.11, P.3.1, K.6.6), si nous définissons une propriété topologique comme un invariant des transformations homéomorphes.

Dans la première partie je prouve que l'ordre partiel de tout ensemble admet une extension jusqu'à un ordre total. Comme application de ce théorème je démontre que tout ordre peut être obtenu au moyen d'ordinations totales. (La preuve en a été donné partiellement ou totalement par Szpilrajn [1], Kurepa [6], [7] et Komm [1] et je l'ai exposée sous une forme un peu différente dans mon travail [1]).

A la fin se trouve la définition de la dimension d_s de l'ensemble partiellement ordonné d'après Dushnik-Miller [1]. J'ai donné aussi la définition et quelques propriétés de $\overline{d}_s$ $(S, \leqslant)$.

Dans la deuxième partie je détermine d_s pour le polygone fini et infini, ouvert et fermé, d'où résulte la dépendance de d_s des propriétés du complexe polygonal qui peut être ouvert ou fermé.

Puis je montre qu'au moyen de l'opération élémentaire d'identification d'éléments polyedrique, d_s peut être changé.

Ensuite, est indiqué la méthode générale qui permet les transpositions des éléments dans les permutations tandis que l'ensemble partiellement ordonné représenté par ces permutations ne change pas. Il s'ensuit que chaque permutation p_i peut commencer par l'ensemble $(-\infty, p]$ où p est la première face du polyèdre dans p_i, respectivement chaque permutation peut se terminer par $[v, \infty)$ où v est le sommet extrême dans p_i ce qui est d'ailleurs, étroitement lié aux corps duals.

De ces propriétés il résulte que la représentation de l'ensemble au moyen de permutations est généralement multivoque, bien qu'elle soit univoque pour polygone ouvert.

Finalement j'ai prouvé que d_s est un invariant topologique pour le polygone ouvert ainsi que pour les complexes polyedriques C de dimension 1, respectivement pour la courbe homéomorphe avec un tel complexe (ce qui permet de définir d_s pour les figures géometriques plus compliquées). Notons que $\sup\limits_{C} d_s\ C = \aleph_0$.

Dans la troisième partie on determine d_s pour le manteau de la pyramide, le manteau du prisme triangulaire etc., ainsi que pour une bande triangulée de Möbius et pour la suite finie (infinie) de polygones connexes. On prouve aussi l'existence de la relation: $d_T P = d_T M$, $d_s\ P = d_s\ M$ où P est une figure géometrique d'une face (non-orientable) et M une figure géometrique de deux faces (orientables) ($d_T A$ signifie la dimension de la figure géometrique A au sens classique et $d_s A$ la dimension de l'ensemble associé à A).

Ensuite j'ai donné les théorèmes concernant les difficultés de la représentation de l'ensemble au moyen des permutations. Par exemple, si nous ajoutons un nouveau polygone à un système de polygones, alors il n'est pas toujours possible que cela puisse se réaliser aussi pour les permutations respectives. On a montré aussi la dépendance entre d_s du réseau polygonal et d_s du polyèdre simple. Enfin, au moyen de la méthode inductive d_s est déterminé pour le tétraèdre.

Ici j'ai posé le problème particulier à savoir si d_s est un invariant topologique pour un complexe polyèdrique de deux dimensions.

Dans la quatrième partie sont représentés les théorèmes relatifs $inf\ dim\ ([P];\ \subseteq),\ (P \subset C_3)$; $d_s[S]$ où S est un simplexe n-dimensionnel, et la relation entre d_T et $d_s : d_T P + 1 \leqslant d_s [P] \leqslant \nu$ où ν est le nombre des sommets. Le sujet de cette partie est en partie énoncé dans mon travail [1].

Dans la cinquième partie nous prouvons que $d_s = 3$ pour chaque pyramide, prisme, bipyramide et chaque polyèdre régulier. Puis sont représentés d_s pour une surface triangulée du tore et pour le polyèdre discontinu.

Outre cela on montre que les polyèdres avec une fermeture réductible ou irréductible avec n'importe quel degré de connexion, ou n'importe quelle caractéristique ou espèce peuvent avoir le même d_s. Ce qui montre que la dépendance entre d_s et les propriétés topologiques est très compliquée. Ensuite on a déterminé d_s pour haeptaèdre unilatérale ce qui prouve l'existence de la relation $d_T O = d_T H;\ d_s O < d_s H$, où O est un polyèdre orientable et H polyèdre non-orientable. On parle aussi d'un cas où par suite de la juxtaposition d_s ne change pas.

Dans la sixième partie j'ai donné d'abord la définition de la propriété A^n et la preuve de l'existence du polyèdre R qui d'une part a la propriété A^n et d'autre part correspond à une notion assez élémentaire du polyèdre. En appliquant alors à R un théorème de Dushnik-Miller le problème de Kurepa de déterminer $\sup_P dim\ ([P];\ \subseteq), (P \subset C_3)$ est résolu. Toutefois le problème de Kurepa concernant les polyèdres d'Euler reste encore ouvert. Il en résulte que d_s n'est l'invariant topologique pour aucun complexe polyèdrique de trois ou plusieurs dimensions.

Ensuite est prouvée l'existence des relations qui montrent une plus grande complexité de dépendance de d_s d'autres propriétés topologiques comme par exemple envers l'autopénétration. Il est montré que d_s peut grandir à volonté en ajoutant des polyèdres (le réseau de polyèdres), et qu'il existe des polyèdres dont d_s diffèrent à volonté bien qu'ils aient le même nombre de sommets.

Enfin est démontré le rapport mutuel entre des sommets, des arêts et des faces dans les permutations p_i. Nous en déduisons une méthode qui va simplifier la recherche de d_s; en effet il suffira, en général, de ne considérer dans les permutations p_i liées à l'ensemble $[P]$ que la suite des sommets.

A la fin sont présentés quelques problèmes non résolus dans ce domaine.

En terminant cette introduction j'exprime mes remerciements à M. Kurepa de m'avoir proposé d'étudier son problème ci-dessus comme un sujet de thèse. Je lui exprime aussi mes remerciements pour les conseils, l'aide et l'attention qu'il m'a prêtée pendant tout le temps de mon travail. Je remercie également Messieurs Ž. Marković, S. Bilinski, D. Blanuša et V. Niče.