

Werk

Label: Article

Jahr: 1954

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?311570321_0006|log44

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ПРИЛОГ ПРЕЦИЗИРАЊУ КОНЦЕПЦИЈЕ О СИЛАМА ИНЕРЦИЈЕ*)

БОРИСЛАВ ЛИЛИЋ, БЕОГРАД

1. Прешходне напомене о поводу за овај Прилог. — Када је стало до поузданог упознавања и јасног разумевања појма о силама инерције у механици и физици, па се у томе пиљу прегледа меродавна литература, неће се моћи избећи уверење да међу ауторима у појимању сила инерције још и данас влада приметна неуједначеност, па чак и извесна несагласност. При томе, што такође особито изненађује, код аутора се испољава несагласност не толико можда у начину примене инерцијалних сила и у оперисању са њима, колико у схватању саме њихове физичке природе, и то у смислу: да ли су силе инерције реалне силе или фиктивне силе.

Не задржавајући пажњу на другим видљивим и не ретким случајевима неуједначености и несагласности међу механичарима и физичарима, када се ради о концепцији сила инерције, не би требало мимоићи и не споменути један изразитији пример такве несагласности. Мисли се, напиме, на расправу А. И. Крилова „О силама инерције и Даламберовом принципу“, коју је реферисао у Математичком институту Академије наука СССР поводом 250-годишњице објављивања Њутнових „Принципија“^[1]. Позивајући се на Њутнову концепцију о силама инерције, Крилов у својој расправи инсистира на тврдњи да силе инерције имају карактер физички реалних сила а не фиктивних. Пошто је и сам указао на несагласност у схватању сила инерције код два математичара Г. К. Суслова (Г. К. Суслов) и П. Апела (Paul Appell) и код два физичара К. Шефера (Klempers Scheffer) и В. Фолгта (Woldemar Voigt), Крилов у полемичном тону иде нарочито за тим да коригује схватање Суслова и Апела, по којима се силе инерције имају сматрати као фиктивне силе, па у томе циљу наводи и више примера из инжењерске праксе.

Такво несређено стање у концепцији о силама инерције свакако да не престаје да даје повода даљим покушајима да се најзад једном постигне пожељна јединственост међу механичарима и у тој концепцији. Чисто научним, општим разлозима о потреби за том јединственошћу ваља такође придружити и посебне разлоге које иставља свака конзеквентна и методичка настава из механике, будући да је појам о силама инерције стални садржајни елемент такве наставе не само на вишем него и на средњем нивоу.

Овај Прилог изазван је такође истим поводом. Но, он нема друге интенције до да по могућству допринесе нешто јаснијем прецизирању концепције о силама инерције, у оном смислу у коме она данас преовлађује код већине истакнутих механичара.

*) Саопштено на II Конгресу математичара и физичара ФНРЈ у Загребу, (4—9 октобра 1954).

2. *Постављање питања.* — Расправљање о силама инерције постаје, дакако, знатно скраћеније и упрошћеније, ако се не буде нарочито задржавало на историском развоју њихове концепције и на критици разних несагласних мишљења појединих аутора, већ се ограничи углавном на утаначењу онакве њихове концепције какву прихвата и заступа већина савремених аутора. Када се ма и са тако ограниченијим задатком прегледа потребна литература из механике што се односи на тај предмет, чини се ипак да би се концепција о силама инерције и тада могла довести до прецизности на задовољавајући начин, ако би се успели дати јасни и одређени одговори на ова три питања:

1° На којим местима и у какве сврхе се уводе у механику силе инерције?

2° Ако се то увођење сила инерције јавља на више места и у различите сврхе, онда би ваљало испитати: да ли се може успоставити јединствена концепција о силама инерције?

3° Какав је физички карактер сила инерције: фиктиван или реалан?

3. *Увођење сила инерције.* — Механика уводи силе инерције на два места: 1° код Даламберовог принципа и 2° у динамичкој теорији релативног кретања.

Неће бити некорисно потсетити нешто подробније на оба та места, не би ли се боље утаничила оба начина како се уводе и обе сврхе ради којих се уводе појмови о силама инерције.

1° *Увођење са Даламберовим принципом.* — У логичком реду, статика сачињава посебан део динамике, те је стога статика у односу на динамику и једноставнија механичка дисциплина, једна геометрија посебне врсте. Разумљиво је онда уједно и што се, у историском реду, статика далеко раније развила, још код старих Грка, док се динамика јавила тек са Галилејем у XVII веку. Развој знатно сложеније динамике наводио је отуда тадашње механичаре на настојања да се у што већој мери користе већ стеченим статичким знањима. Из таквих настојања произишао је у другој половини XVIII века један драгоцен принцип, за који се данас веже Даламберово име, а који је послужио као основа за општу методу да се стављање у једначине једног проблема динамике сведе на стављање у једначине одговарајућег проблема статике. Заправо, та општа метода од свога настанка доживљавала је за време од читавог столећа више поступних усавршавања, док није достигла облик у коме је данашња механика користи; па и увођење самог појма о сили инерције, који стоји у непосредној вези са Даламберовим принципом

и са методом заснованом на њему, дошло је касније, тек у првој половини XIX века [2].

Ми ћемо сада формулисати Даламберов принцип са силама инерције одмах у савременом смислу.

Посматрајмо, прво, као елементаран динамички случај, кретање једне слободне материјалне тачке M са масом m у неком интервалу времена. Нека на материјалну тачку M , у сваком тренутку посматраног временског интервала кретања, дејствују извесне дате силе чија је резултанта $\vec{R}$. Тада ће дате силе производити на материјалној тачки, у сваком тренутку, убрзање $\vec{w}$ саобразно векторској једначини

$$m \vec{w} = \vec{R}. \quad (1)$$

Ова једначина претставља основну, Њутнову, динамичку једначину о кретању материјалне тачке. Она се исказује речима динамике овако: *У сваком тренутку, производ из масе покретне материјалне тачке и њеног убрзања једнак је резултанци свих датих сила које дејствују на њу.*

Ну, та се једначина динамике о кретању слободне материјалне тачке може превести на облик једначине статике о равнотежи исте такве слободне материјалне тачке. Ради тога, уведемо поред датих сила са резултантом $\vec{R}$, које су праве нападне силе на материјалну тачку M , нову векторску величину $\vec{M}\vec{T}$ чија је нападна тачка у тачки M а векторска вредност једнака производу $m \vec{w}$ из масе m тачке M и њеног убрзања $\vec{w}$, са негативним знаком, па је назовимо *сила инерције*. Тада се динамичка једначина (1) може преписати у облику

$$\vec{R} + \vec{T} = 0 \quad (2)$$

и исказати, доиста, речима статике: *При кретању слободне материјалне тачке постоји, у сваком тренутку, равнотежа између датих сила и сила инерције.*

У таквом исказу и јесте заправо садржан *Даламберов принцип за слободну материјалну тачку*.

У општијем случају, нека је материјална тачка M неслободна, то јест нека је потчињена извесним везама. У сагласности са Њутновим принципима механике, иста материјална тачка може се и тада сматрати као слободна, но под условом да се датим силама придодају још и силе које потичу од веза наметнутих тачки, такозване силе везе. Означивши резултанту свих датих или, како се такође зову, директно нападаних сила са $\vec{R}_d$ а резултанту свих сила везе

са $\vec{R}_p$ динамичка једначина о кретању неслободне материјалне тачке ће сада гласити

$$m \vec{w} = \vec{R}_d + \vec{R}_l. \quad (3)$$

Уводећи и овде силу инерције $\vec{I} = -m \vec{w}$ на истоветан начин као у претходном случају слободне материјалне тачке, поред датих сила и сила везе, које и јесу једине реално нападне силе, та се динамичка једначина (3) може превести на облик

$$\vec{R}_d + \vec{R}_l + \vec{I} = 0 \quad (4)$$

и исказати опет речима статике: *При кретању неслободне материјалне тачке постоји, у сваком тренушку, равнотежа између датих сила, сила везе и силе инерције.* У таквом исказу састоји се онда Даламберов принцип за неслободну материјалну тачку.

Напоследку, Даламберов принцип се лако уопштава и за систем материјалних тачака било слободних било потчињених разним везама. Замислимо, наиме, да смо написали једначине (4) за све материјалне тачке система, па да смо их потом напросто векторски сабрали. Тада се резултату такве операције може дати овакав исказ, који и сачињава општи *Даламберов принцип за материјални систем: При кретању материјалног система постоји, у сваком тренушку, равнотежа између свих датих сила, сила везе и сила инерције.*

На први поглед би изгледало да се код Даламберовог принципа ради само о превођењу динамичке једначине са облика (1) односно (3) на облик (2) односно (4) и о њеном исказивању језиком статике, те да се од тога неће имати никаква стварна корист. Међутим, имајући на уму како су у статисти извођени равнотежни услови за различите материјалне системе са везама и шта ти равнотежни услови управо значе, предњем исказу општег Даламберовог принципа за материјални систем са везама може се непосредно дати овај облик:

При кретању материјалног система са везама имаће се, у сваком тренушку, равнотежа, на основу веза које постоје у томе тренутку, између датих сила и сила инерције.

У таквом облику Даламберов принцип пружа основу за помешнуту општу и значајну методу да се формулисање задатог динамичког проблема сведе на формулисање помоћног статичког проблема, методу која је од нарочите користи за материјалне системе потчињене везама. Јер кад год би се знале написати једначине о равнотежи неког материјалног система који је принуђен на извесне везе, знале би се такође написати и једначине о кретању истог

система; довољно је, у том циљу, изразити да дате, директно нападне силе заједно са силама инерције у сваком тренутку треба да оверавају већ познате равнотежне услове за посматрани материјални систем.

Да бисмо илустровали корист од тако установљене методе, применимо је на познат леп пример о извођењу динамичке једначине обртања крутог тела око непомицне осе. Најпре, потсетимо се из статике да је за равнотежу крутог тела обртног око непомицне осе потребно и довољно да главни моменат датих сила $\vec{F}_i$, које нападају на круто тело, у погледу на обртну осу буде једнак нули

$$\Sigma \text{Mom}(\vec{F}_i) = 0.$$

Стога ће се динамичка једначина обртања добити тако што ће се написати да дате силе $\vec{F}_i$ и силе инерције $\vec{I}_k$ материјалних тачака, из којих се замишља да је обртно круто тело састављено, чине равнотежу на основу постојеће везе, а то ће рећи да главни моменат свих тих сила у погледу на обртну осу буде нула

$$\Sigma \text{Mom}(\vec{F}_i + \vec{I}_k) = 0.$$

Но, тај се главни моменат одмах раставља на два: главни моменат само датих сила $\vec{F}_i$ и главни моменат само сила инерције $\vec{I}_k$

$$\Sigma \text{Mom}(\vec{F}_i + \vec{I}_k) = \Sigma \text{Mom}(\vec{F}_i) + \Sigma \text{Mom}(\vec{I}_k).$$

Први главни моменат $\Sigma \text{Mom}(\vec{F}_i)$ треба у сваком посебном случају да се израчуна за дате силе $\vec{F}_i$, па се зато у траженој динамичкој једначини задржава у таквом општем изразу. Други моменат $\Sigma \text{Mom}(\vec{I}_k)$ може се, пак, изразити даље на овај начин. Прво ће по дефиницији силе инерције бити

$$\Sigma \text{Mom}(\vec{I}_k) = \Sigma \text{Mom}(-m_k \vec{w}_k) = -\Sigma m_k \text{Mom}(\vec{w}_k).$$

Раставимо сада убрзање $\vec{w}_k$ сваке материјалне тачке m_k на тангенцијално убрзање $w_{tk} = \frac{dv_k}{dt} \vec{T}_{ок}$ и нормално убрзање $w_{пк} = \frac{v_k^2}{\rho_k} \vec{N}_{ок}$; када потом узмемо у обзир да ће свака тачка вршити кружно кретање са полупречником r_k и угаоном брзином $\omega_k = \omega = \frac{d\theta}{dt}$ истом за све тачке, онда ће моменат тангенцијалног убрзања имати вредност

$$\text{Mom}(\vec{w}_{tk}) = r_k \frac{dv_k}{dt} = r_k \frac{d(r_k \omega)}{dt} = r_k^2 \frac{d\omega}{dt},$$

а моменат нормалног убрзања, будући да оно пролази кроз моментну осу, биће једнак нули. Тако главни моменат сила инерције постаје

$$\Sigma \text{Mom}(\vec{I}_k) = -\Sigma m_k r_k^2 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{d\omega}{dt} \Sigma m_k r_k^2 = \mathcal{J} \frac{d\omega}{dt},$$

при чему $\sum m_k r_k^2 = \mathcal{J}$ значи моменат инерције крутог тела у погледу на обртну осу. За тражену динамичку једначину обртања крутог тела око непомицне осе добија се према томе, напоследку

$$\mathcal{J} \frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum M \sin(\vec{F}_i).$$

Из овог илустративног примера се види како нам метода установљена на основу Даламберовог принципа омогућава, одиста, да врло брзо успоставимо динамичку једначину полазећи од познате одговарајуће статичке једначине. У томе заправо и лежи права сврха Даламберовог принципа и њиме уведених сила инерције.

На истој идејној линији, Даламберов принцип са силама инерције добија ванредно широк теориски значај када се комбинује са принципом виртуелних радова, како је то први урадио још Лагранж у својој »Аналитичкој механици«. Наиме, као што се зна, принцип виртуелних радова доводи у могућност да се установи *ошћа једначина статике*, која вреди за ма какав материјалан систем потчињен ма каквим везама без трења. Уносећи, на основу Даламберовог принципа, у општу једначину статике поред датих сила и силе инерције материјалних тачака система, добија се сасвим брзо *ошћа једначина динамике* која је веома употребљива и за теориска проучавања и за решавања практичних проблема.

На завршетку предњих сумарних потсећања на Даламберов принцип, мислимо да не бисмо смели пропустити да учинимо следећу изричиту примедбу [8];

Садржина динамике принципијелно се разликује од садржине статике, те стога никаквим методама није могуће свести динамичке појаве на статичке. Ну, то опет не значи да се, без повреде суштинске разлике између динамике и статике, не могу динамичке једначине преводити на *форму* статичких једначина, користећи се притом свим формалним аналогијама које се отуда дају извучи.

2° *Увођење са теоријом о релативном кретању*. — Пођимо опет од посматрања материјалне тачке M са масом m и под дејством сила чија је резултанта $\vec{R}$. Материјална тачка M кретаће се тада са убрзањем $\vec{w}$ према основној динамичкој једначини (1)

$$m \vec{w} = \vec{R}$$

Ова једначина, међутим, остаје исправна само у погледу на посебне координатне системе, такозване *инерцијалне координатне системе*, који се одликују тиме што у њима вреди принцип инерције. Такав инерцијални координатни систем јесте, у првом реду *Коперников координатни систем*; то је тријада осе чији је почетак у тежишту Сунчевог система а осе су му управљене ка трима удаљеним

звездама званим звездама некретницама. У инерцијалне системе, потом, долазе још и *Галилејеви координатни системи*; то су координатни системи који се у погледу на Коперников систем крећу транс- латорно, праволиниски и једнолико. [4]

Често се, пак, јавља потреба да се кретање материјалне тачке прати динамички у односу на неки координатни систем који није инерцијалан. Као свакидашњи пример таквог неинерцијалног система служи нам наша планета Земља. Саобразно томе, поставља се онда овакво питање: Како ће гласити динамичка једначина о кретању материјалне тачке у погледу на један неинерцијалан координатни систем? — До тражене динамичке једначине долази се тада следећим расуђивањем.

Будући да динамичка једначина (1) о кретању материјалне тачке вреди само у погледу на какав инерцијалан систем, то постаје одмах јасно да се динамичка једначина о кретању исте тачке у погледу на један неинерцијалан систем може успоставити ако се познаје: прво, кретање тога неинерцијалног система у погледу на неки од инерцијалних система и, друго, кинематичке релације за преводње вектора убрзања покретне тачке из неинерцијалног система у инерцијални. Први захтев наводи управо да се постављено питање прецизира у облику оваквог задатка: када су дате нападне силе на материјалну тачку са резултантом $\vec{R}$ и када се познаје кретање изабраног неинерцијалног система у погледу на извешан инерцијалан систем, одредити кретање тачке у погледу на тај неинерцијалан систем. Што се тиче другог захтева, општу кинематичку релацију између убрзања једне покретне тачке одређена у два различита координатна система, у погледу на које се посматра њено кретање, пружа Коријолисова теорема.

У извођењу Коријолисове теореме, један од два координатна система замишља се као непомичан, па се назива апсолутни координатни систем; кретање тачке M у погледу на њега јесте онда апсолутно кретање, а брзина и убрзање тачке M у томе кретању јесу апсолутна брзина и апсолутно убрзање. Онај други координатни систем, који тада нужно постаје помичан, назива се релативни координатни систем; кретање тачке M у погледу на њега јесте релативно, а брзина и убрзање тачке M у томе кретању јесу њена релативна брзина и релативно убрзање. Као посредник између апсолутног и релативног кретања тачке M притом се јавља кретање, у погледу на апсолутни координатни систем, оне тачке релативног координатног система која у посматраном тренутку коинцидира са покретном тачком M ; то се кретање зове преносно кретање тачке

M , а брзина и убрзање коинцидентне тачке у томе кретању зове се преносна брзина и преносно убрзање тачке M . Означивши апсолутно убрзање покретне тачке M са $\vec{w}_a$, њено релативно убрзање са $\vec{w}_r$, а њено преносно убрзање са $\vec{w}_e$, Коријолисова теорема успоставља тада исмеђу тих убрзања овакву векторску релацију

$$\vec{w}_a = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_c, \quad (5)$$

у којој интервенише и четврти векторски члан w_c назван Коријолисово (или допунско) убрзање. Ово Коријолисово убрзање има за израз

$$\vec{w}_c = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_r], \quad (6)$$

где је $\vec{\omega}$ вектор ротације релативног система у погледу на апсолутни систем а $\vec{v}_r$ релативна брзина покретне тачке M .

При коришћењу Коријолисове релације (5) у постављеном задатку, узима се инерцијални систем за апсолутни систем а неинерцијални за релативни; онда апсолутно убрзање $\vec{w}_a$ постаје убрзање $\vec{w}$ у инерцијалном систему, а релативно убрзање $\vec{w}_r$ постаје убрзање у неинерцијалном систему. Саобразно томе, у основној динамичкој једначини (1) о кретању материјалне тачке, која вреди у погледу на инерцијални систем, може се убрзање $\vec{w} = \vec{w}_a$ заменити његовом вредношћу из Коријолисове релације (5), па ће та динамичка једначина прећи на облик

$$m \vec{w}_r + m \vec{w}_e + m \vec{w}_c = \vec{R}. \quad (7)$$

Но, према постављеном задатку, иде се управо за тим да се установи динамичка једначина о кретању материјалне тачке у погледу на неинерцијални систем, која треба да буде аналогна по форми динамичкој једначини (1) за инерцијални систем. Ради тога, довољно је очевидно у предњој једначини (7) са леве стране оставити само члан $m \vec{w}_r$ са убрзањем $\vec{w}_r$ у неинерцијалном систему, а остала два члана $m \vec{w}_e$ и $m \vec{w}_c$ пребацити на десну страну. Према томе, тражена динамичка једначина о кретању материјалне тачке у погледу на неинерцијални систем имаће облик

$$m \vec{w}_r = \vec{R} + (-m \vec{w}_e) + (-m \vec{w}_c). \quad (8)$$

Због тога што се кретање у неинерцијалном систему узима за релативно кретање, изведена једначина (8) носи назив *динамичка једначина о релативном кретању материјалне тачке*. Она показује да се кретање материјалне тачке може проучавати у погледу на неинерцијални систем на аналоган начин као и у погледу на инерцијални систем, но под условом да се нападним силама са резултатом $\vec{R}$ додају два корективна члана — $m\vec{w}_e$ и $-m\vec{w}_c$. Првом члану $-m\vec{w}_e$ даје се име *преносна сила инерције* а другом члану $-m\vec{w}_c$ *Коријолисова сила инерције*. Тада се резултат добијен једначином (8) може резимирати у оваквом исказу: *Динамичка једначина о релативном кретању материјалне тачке, у погледу на један неинерцијалан систем, иста је као и када би тај систем био инерцијалан, но с тим да се силама које дејствују на материјалну тачку додају и две корективне силе, преносна сила инерције и Коријолисова сила инерције*.

На тај начин, из укупног предњег расуђивања са овим резимеом увиђа се следећа чињеница од интереса за питање које се овде разматра:

Сврха ради које су, у теорији о релативном кретању, уведене силе инерције, преносна и Коријолисова, била је да се код кретања материјалне тачке и у погледу на неинерцијалан систем за динамичку једначину задржи форма динамичке једначине о њеном кретању у инерцијалном систему.

Поменимо мимогред да се баш на основу изведене динамичке једначине (8) о релативном кретању материјалне тачке сасвим непосредно закључује о равноправности Галилејевих система према Коперниковом систему у погледу описивања и проучавања механичких појава.

4. Јединственост силе инерције. — Показали смо да се силе инерције уводе у механику на два различита места и у две различите сврхе: док се код Даламберовог принципа силе инерције уводе са сврхом да се у динамици користе резултати статике, дотле се у теорији о релативном кретању оне уводе са сврхом да се установи динамичка једначина у погледу на неинерцијалне системе. Због различитости тих места и сврха, аутори редовно и разликују две врсте сила инерције, па их одвојено и третирају.

Но, уједно са разликовањем двеју врста сила инерције а такође и због неуједначене концепције о њима, аутори чак и у давању назива за њих поступају несагласно. Тако, неки аутори не зову силама инерције оне две из теорије о релативном кретању; за њих они употребљавају краћа имена: преносна сила и Коријолисова

сила [6]. Други, опет, још и преносној сили инерције допуштају инерцијалан део назива, али не и Коријолисовој сили инерције [6]. Тек код треће групе аутора и за Коријолисову силу се такође сусреће назив силе инерције [7]. Са друге стране, сви се аутори слажу да се сила уведена Даламберовим принципом назива силом инерције; притом, извесни аутори, да би ту силу инерције разликовали од оне две из теорије о релативном кретању, дају јој одређеније име Даламберова сила инерције [8]; ми ћемо такође усвојити тај термин.

Пошто је, дакле, утврђено да постоје две врсте сила инерције, које се уводе на два различита начина, сасвим се природно поставља ово принципијелно питање:

Да ли се све силе инерције могу обухватити у једној јединственој концепцији?

Неће стајати великог труда да се на то питање пружи потврдан одговор.

Већ на први поглед се види да све три силе инерције — Даламберова, преносна и Коријолисова — имају истоветне изразе: свугде су то производи из масе покретне материјалне тачке и односних убрзања, са негативним знаком.

Али не само то; чак и у поступцима којим се уводе силе инерције може се открити истоветност. Ради тога, пођимо од поступка којим се уводи Даламберова сила инерције. Ту се напросто радило о томе да се у основној динамичкој једначини (1) односно (3) производ из масе m материјалне тачке и њеног убрзања $\vec{w}$ пренесе на ону страну једначине на којој су и нападне силе, па да се онда тај производ са негативним знаком прогласи силом. Напишимо динамичку једначину (1) у таквом Даламберовом облику

$$\vec{R} + (-m \vec{w}) = 0, \quad (2')$$

па потом у њој рашчланимо убрзање $\vec{w}$ према Коријолисовој релацији (5)

$$\vec{R} + (-m \vec{w}_r) + (-m \vec{w}_e) + (-m \vec{w}_c) = 0. \quad (9)$$

Са друге стране, код поступка којим се уводе преносна сила инерције и Коријолисова сила инерције, радило се такође напросто о томе да се опет у основној динамичкој једначини само у рашчлањеном облику (7) производи из масе m материјалне тачке са њеним преносним убрзањем $\vec{w}_e$ и њеним Коријолисовим убрзањем $\vec{w}_c$ пренесу на страну нападаћих сила, па да се онда опет ти производи са

негативним знацима прогласе силама. Тим поступком добила се је тада динамичка једначина о релативном кретању

$$m \vec{w}_r = \vec{R} + (-m \vec{w}_e) + (-m \vec{w}_c). \quad (8)$$

Када се сада упореди рашчлањена динамичка једначина у Даламберовом облику (9) са динамичком једначином о релативном кретању (8) види се одмах да се оне разликују само по томе што у једначини (8) члан $(-m \vec{w}_r)$ стоји сам на једној њеној страни, дочим се у једначини (9) и тај члан налази са осталим члановима на истој страни, тако да је друга њена страна сведена на нулу. Исти тај резултат упоређивања могао би се окарактерисати и другачије, потсећајући ближе на поменуће поступке којима се дошло до једначина (8) и (9): динамичка једначина о релативном кретању (8) разликују се од динамичке једначине у Даламберовом облику (9) по томе што су, полазећи од основне динамичке једначине у рашчлањеном облику (7), код једначине (8) само два производа из масе m материјалне тачке и две компоненте $\vec{w}_e$ и $\vec{w}_c$ убрзања $\vec{w}$ пребачени на другу страну једначине уз резултанту $\vec{R}$ нападних сила, а производ са трећом компонентом $\vec{w}_r$ убрзања задржан на истој страни, дочим су код једначине (9) сва та три производа пребачена на другу страну уз резултанту $\vec{R}$. Из таквог резултата њиховог упоређивања онда уједно происходи и начин да се из једначине о релативном кретању (8) изведе једначина у Даламберовом облику (9): ради тога, довољно је у њој пренети још и трећи производ $m \vec{w}_r$ на другу њену страну, па га са негативним знаком прогласити силом инерције; при томе, ако би се хтело да се и овој новој, четвртој сили инерције придене посебно име, оно би, у духу имена за раније две силе инерције у теорији о релативном кретању и због присуства релативног убрзања $\vec{w}$, у садањем производу, понајпре требало да буде *релативна сила инерције*. — Дакле, предње упоређење два поступка којим се уводе силе инерције показује, заиста, да између њих постоји потпуна истоветност.

Међутим, могло би се можда помислити да се овде радило само о једној формалној алгебарској игри са члановима основне динамичке једначине, игри која не казује ништа поуздано о јединствениости идејних садржаја код Даламберове силе инерције, са једне стране и код преносне и Коријолисове силе инерције, са друге стране. Да то није тако, да се те обе врсте сила инерције стварно иденти-

фикују по своме идејном садржају, може се показати на одређеним динамичким случајевима; ми ћемо то учинити поступним радом, идући преко посебнијих случајева ка општем.

Узмимо у разматрање, најпре, једначину о релативној равнотежи материјалне тачке. Као што је познато, та се једначина изводи непосредно из динамичке једначине (8) о релативном кретању материјалне тачке када се претпостави да је материјална тачка непокретна у релативном, неинерцијалном координатном систему. Са таквом претпоставком релативна брзина $\vec{v}_r$ тачке постаје једнака нули; а онда ће и њено релативно убрзање $\vec{w}_r$ па према формули (6) и Коријолисово убрзање такође бити једнако нули. Стављајући, дакле, у једначини (8) $\vec{w}_r = 0$ и $\vec{w}_c = 0$, за једначину о релативној равнотежи материјалне тачке добија се

$$\vec{R} + (-m\vec{w}_e) = 0. \quad (10)$$

Тај се резултат у теорији о релативном кретању изказује онда овим речима: *Једначина о релативној равнотежи материјалне тачке добија се када се неинерцијални (помични, релативни) координатни систем сматра као инерцијални (непомични, апсолутни), па се напише да, у сваком тренутку посматраног временског интервала, постоји равнотежа између нападних сила и преносне силе инерције.* Са друге стране, посматрајмо исту материјалну тачку у погледу на инерцијални координатни систем. Будући да је тачка непокретна у неинерцијалном координатном систему, она ће се заједно са овим системом кретати у погледу на инерцијални систем и имаће уопште извесно убрзање $\vec{w}$. Зато кретање ће онда морати вредети основна динамичка једначина

$$m\vec{w} = \vec{R},$$

где $\vec{R}$ значи резултанту свих нападних сила које везују непроменљиво материјалну тачку за покретни неинерцијални систем. Но, убрзање $\vec{w}$ тачке је у овом случају истоветно са убрзањем концидентне тачке неинерцијалног система, то јест истоветно са преносним убрзањем $\vec{w}_e$ из једначине (10), те се предња једначина може писати

$$m\vec{w} = \vec{R}.$$

Ако се сада ова једначина преведе на Даламберов статички облик, добиће се једначина идентична предњој једначини (10). Само, она се

овде има прочитати овим речима у статичком смислу: *У сваком тренутку, постоји равнотежа између нападних сила и Даламберове силе инерције.* — Упоредивши два добијена исказа, утврђује се одмах да се у овом посебном динамичком случају, који се односи на релативну равнотежу материјалне тачке, Даламберова сила инерције идентификује са преносном силом инерције, што се и хтелo постићи.

Аналогна идентификација може се проширити и на општије динамичке случајеве кретања материјалне тачке. Посматрајмо, као наредни шири случај, материјалну тачку која се креће праволиниски и једнолико у погледу на помични неинерцијални систем. Тада је релативна брзина $\vec{v}_r$ тачке константна; њено релативно убрзање $\vec{w}_r$ биће, дакле, једнако нули, дочим ће њено Коријолисово убрзање $\vec{w}_c$ уопште имати извесну вредност различиту од нуле. Стога ће динамичка једначина о релативном кретању материјалне тачке овога пута гласити

$$\vec{R} + (-m \vec{w}_c) + (-m \vec{w}_e) = 0. \quad (11)$$

— Динамичка једначина о кретању материјалне тачке у погледу на инерцијални систем задржава свој основни облик као и у претходном случају

$$m \vec{w} = \vec{R},$$

где је $\vec{w}$ опет убрзање тачке у погледу на инерцијални систем, само сад очевидно са другачијом вредношћу

$$\vec{w} = \vec{w}_e + \vec{w}_c.$$

Преведена на Даламберов статички облик

$$\vec{R} + (-m \vec{w}) = 0, \quad (2')$$

она постаје такође идентична предњој једначини (11). — Ако се, дакле, упореде оба резултата по значењу уведених сила инерције, констатије се да се у овом динамичком случају праволиниског и једноликог релативног (у погледу на помични, неинерцијални координатни систем) кретања материјалне тачке Даламберова сила инерције идентификује са векторским збиром преносне силе инерције и Коријолисове силе инерције.

Напоследку, у општем динамичком случају релативног кретања материјалне тачке, који је напред већ разматран, долази се до идентификовања Даламберове силе инерције са векторским збиром преносне силе инерције, Коријолисове силе инерције и релативне силе инерције.

При идентификовању Даламберове силе инерције и сила инерције из релативног кретања јавља се једна особеност, коју још ваља споменути. Наиме, силе инерције из релативног кретања, то јест преносна, Коријолисова и релативна сила инерције, за једну исту покретну материјалну тачку мењаће своје векторске вредности у зависности од избора релативног координатног система, док Даламберова сила инерције остаје независна од тог избора и свагда је једнака векторском збиру оних првих.

На основу свега напред реченог у овом члану даје се извести овакав коначни закључак:

Сила инерције из Даламберовог принципа идентификује се појмовно са силама инерције из релативног кретања — преносном, Коријолисовом и релативном силом инерције — и што иако што она прва представља векторски збир ових других; према томе, све се силе инерције могу подвести под једну заједничку концепцију.

5. *Физички карактер сила инерције.* — Дошли смо до нашег трећег главног питања, до питања о физичком карактеру сила инерције.

Претежна већина аутора без двоумљења усваја да су силе инерције по свом физичком карактеру фиктивне силе. Да би оправдали такво схватање, аутори најчешће, било посредно било непосредно, са мање или са више подробности, дају за њега и образложења, тумачећи тиме уједно и значење речи фиктиван. Ево, да изложимо оно што чини битнији садржај у тим образложењима.

За јасан и одређен појам о сили у механичком смислу дугује се Њутну, који га је у својим »Принципијама« дефинисао помоћу три »аксиоме или закона кретања«. Дефиницији појма о сили давале су се истина касније каткад другојачије форме од оне првобитне Њутнове, али је суштина самога појма остала иста. Идући, дакле, са Њутном, суштина појма о сили може се окарактерисати на овај начин:

Под силом што дејствује на материјалну тачку разуме се узрок, без обзира на његово физичко порекло (потискивање додиром, гравитација, електризација, магнетизација итд.), који производи убрзање на њој. При томе, силе на посматраној материјалној тачки увек се јављају у узајамном дејству са другим материјалним тачкама, тако да ове тачке и претстављају физички извор сила на посматраној тачки.

Одатле се онда непосредно закључује да ће сила на једној материјалној тачки моћи постојати само ако су испуњена два основна услова: први, да тачка има убрзање и, други, да се може наћи извор силе у другој или другим материјалним тачкама.

Сила има различитих врста, па се оне деле према неколиким класификационим основама; али све те врсте сила испуњавају нужно два истакнута услова. Тако, са гледишта физичког порекла разликују се силе контакта, гравитационе силе, електричне силе, магнетне силе; у динамици материјалног система силе се разврставају према месту одакле потичу у две категорије: спољашње силе и унутрашње силе; у механици непрекидних средина уведена је подела на површинске силе и запреминске силе; у аналитичкој механици, пак, основна подела се односи на директно нападне силе и силе везе, са којима смо се већ служили код Даламберовог принципа. Посебно, код ове последње поделе се чак између двеју врста сила уочава и извесна дубља механичка разлика; наиме, док се директно нападним силама приписује способност да материјалну тачку из мировања ставе у кретање, дотле силе везе, у случају када су везе непомицне, не располажу способношћу за такво дејство; но и поред тога, силе везе јесу силе у смислу Њутнове дефиниције, јер су у стању да, мењајући брзину материјалне тачке у сваком тренутку, производе убрзање на њој.

При одлучивању какав се физички карактер има приписати силама инерције, реалан или фиктиван, морају се, дакле, и оне подвргнути испитивању на истој идејној основи коју утврђује Њутнова дефиниција силе. Према реченом то значи да се мора испитати да ли силе инерције испуњавају два потребна услова који карактеришу сваку силу у Њутновом смислу.

1° Из дефиниција сила инерције, како су раније дате, увиђа се лако да силе инерције нису такве физичке природе да производе убрзање на посматраној материјалној тачки; напротив, оне се појављују тек са појављивањем убрзања проузрокованог од других, правих нападних сила — оне су, заправо, последица тога убрзања које потиче од других сила.

Такав закључак постаје нарочито видљив при разматрању равнотеже материјалне тачке, када се она замисли под дејством сила инерције у заједници са правим нападним силама. Ако би, наиме, силе инерције биле способне да произведу убрзање на материјалној тачки, онда би, у посебном случају њене равнотеже под дејством сила инерције и других правих нападних сила, материјална тачка морала бити без резултантног убрзања, то јест она би се морала налазити или у апсолутном мировању или у праволиниском и једноликом апсолутном кретању. Међутим, одмах се утврђује да то није тако. Ради тога, погледајмо, рецимо, два ранија случаја равнотеже са силама инерције: један, са Даламберовом силом инерције и, други, са преносном силом инерције. Према Даламберовој равнотежној једначини (2) односно (4), материјална тачка би морала бити, када би Даламберова сила инерције била реална сила која производи убрзање, у мировању или праволиниском и једноликом кретању, дочим она уствари може вршити произвољно криволиниско и променљиво кретање. Исто тако, према динамичкој једначини (10) о релативној равнотежи материјалне тачке, ова, уместо да буде у апсолутном миро-

вању или праволиниском и једноликом апсолутном кретању под дејством нападах сила и преносне силе инерције, може уствари опет и овде да врши произвољно криволиниско и променљиво апсолутно кретање.

2° Из дефиниција сила инерције такође се увиђа непосредно да се не може наћи никаква материјална тачка или уопште никакав материјални објект који би се могао сматрати физичким извором силе инерције. Јер, силе инерције су уведене напросто вештачки, са методичким сврхама да се систематизују и олакшају проучавања одређених динамичких проблема, а не као дејства извесних материјалних објеката на посматрану материјалну тачку.

На тај начин, установљава се да силе инерције не поседују два потребна основна својства у смислу Њутнове дефиниције силе. Према томе, силе инерције не могу бити реалне силе у смислу Њутнове дефиниције силе; оне, дакле, могу бити само фиктивне.

Такви су разлози због којих су механичари принуђени да сматрају силе инерције фиктивним; и једино у таквом тумачењу лежи прави смисао речи фиктиван, када њоме механичари карактеришу физичку природу сила инерције.

У намери да поткрепимо образложење о фиктивности сила инерције могли бисмо додати још и следећи закључак заснован на формално-логичком ставу узрочности. Држећи се Њутна, наиме, сила $\vec{F}$ што дејствује на материјалну тачку са масом m јесте узрок који на њој производи убрзање $\vec{w}$. Са гледишта каузалног односа, у физичкој појави кретања материјалне тачке сила $\vec{F}$ се јавља као узрок, а убрзање $\vec{w}$ тачке долази као његова последица, и то последица са правом мером једнаком производу $m \vec{w}$. Прогласити, дакле, тај производ $m \vec{w}$ за силу, то би значило исту толику нереалност, као када би се у једној одређеној физичкој појави поред постојећег узрока и последица прогласила за неки узрок, што претставља сигурно апсурд са гледишта става узрочности.

На целокупно предње расуђивање о физичкој природи сила инерције не може се свакако ставити ни најмањи приговор. Због тога се чини да не би требало да буде никакве сумње у схватање да су силе инерције уистину фиктивне. Па ипак, како је речено у почетку, има аутора који се никако не саглашавају са таквим схватањем у том суштинском питању о силама инерције и који држе да силе инерције не могу бити друго до једино реалне силе, позивајући се притом чак често и на самога Њутна. У чему је заправо ствар?

Познато је да је већ Њутн у својим »Принципијама« обратио пажњу на силе инерције, дајући за њих посебну дефиницију и ближе тумачење^[9]. Но, ако се са дужном брижљивошћу размотри односни текст у »Принципијама«, увериће се да је Њутн силама инерције приписивао другојачији смисао од оног какав им се данас даје са образно пређашњим дефиницијама. По Њутновом схватању, наиме, силе инерције претстављају једну нарочиту врсту сила, чије физичко порекло лежи у инерцијалном својству саме материје према променама њеног кинематичког стања мировања или праволиниског једноликог кретања, својству одраженом у појму инерцијалне масе. При томе, таква сила се јавља не на посматраном материјалном телу чије се кинематичко стање окарактерисано његовом брзином мења, већ на оном другом материјалном телу које дејствује на посматрано. Сила инерције по Њутну јесте, очевидно, *реакција* посматраног тела на тело што дејствује на њ, реакција која је, према трећем Њутном закону, једнака и директно супротна акцији дејствујућег тела на посматрано тело. А тако схваћене силе инерције јесу, заиста, реалне силе у смислу Њутнове опште дефиниције силе.

Првобитна, Њутнова концепција о силама инерције није се, међутим, задржала и касније. Из разлога о којима је напред говорено, са даљим развојем механичке науке, јавиле су се чисто методичке потребе да се вештачки уведу фиктивне силе инерције, *чија би нападна тачка била на самој посматраној покретној материјалној тачки*. Њутновим силама инерције преостало је онда значење да су то најпосто силе реакције посматране покретне материјалне тачке на друге материјалне тачке што на њу дејствују силама акције. За савремену концепцију о силама инерције, која је почела да преовлађује међу механичарима још с почетка прошлог столећа, у овом погледу је од принципијелног значаја следећа примедба у Апеловом курсу^[10], која се иначе у варијантама сусреће и по другим данашњим курсевима:

»Нека је једна материјална тачка потчињена дејству силе $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ и стављена у извесне почетне услове: она узима извесно кретање. У другом експерименту, уклонимо силе $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, узмемо материјалну тачку у руку и наметнимо јој са руком исто кретање. Дејство руке на тачку тада је, у сваком тренутку t , једнако резултанти $\vec{R}$ сила $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ које су дејствовале у првом експерименту, или производу $m \vec{w}$, означивши са $\vec{w}$ убрзање; дакле, према принципу о једнакости акције и реакције притисак тачке на

руку у сваком тренутку је једнак и супротан резултант $\vec{R}$ или производу $m \vec{w}$: тај притисак је једнак сили инерције, али треба добро приметити да је тај притисак сила која дејствује на руку а не на тачку.»

Како се види, ова Апелова примедба утаначује две основне ствари: прво, сила инерције на посматраној покретној материјалној тачки има се строго разликовати од њене силе реакције, јер се дејство реакције не испољава на тој материјалној тачки, дочим се сила инерције односи баш на њу, а то ће рећи да сила инерције и реакција имају различите нападне тачке; и друго, иако су по различитим нападним тачкама различите векторске величине, сила инерције покретне материјалне тачке и њена реакција имају једнаке векторске вредности, тако да једна другој може служити као векторска мера. Са овим утаначењима излази на видело уједно и порекло назива за силе инерције у савременом фиктивном смислу; наиме, назив сила инерције, који се првобитно од стране Њутна приписивао реалној сили реакције покретне материјалне тачке на промене њеног инерцијалног кретања, задржан је после и за векторски једнаку фиктивну силу са пренетом нападном тачком на саму покретну материјалну тачку.

Када у данашње време, и поред такорећи опште усвојене конвенције о силама инерције у њиховом фиктивном смислу, понеки аутори ипак инсистирају на схватању да су силе инерције реалне природе, они се уствари придржавају првобитног, Њутновог схватања о њима као о силама реакције покретних материјалних тачака. У томе смислу третира силе инерције и А. И. Крилов у својој расправи поменутој на почетку, када се залаже за њихову реалност. Од данашњих аутора курсева из механике могу се поменути Л. Г. Лојцјанскиј и А. И. Лурје, који у своме курсу под силама инерције уопште разумеју такође реалне силе реакције; али и код њих силе инерције у Даламберовом принципу и у теорији о релативном кретању већ су фиктивне силе [11].

6. Додашак: О инерцији. — Видели смо да је сила инерције једне покретне материјалне тачке по својој векторској вредности једнака реакцији тачке на промену њеног инерцијалног кретања; а како знамо, инерцијално кретање материјалне тачке са своје стране пак условљено је својством инерције саме материје. Обратно, под смелом филозофском хипотезом да материја нема својство инерције, не би било ни реакције материјалне тачке на промену њеног праволиниског једноликог кретања (које, напосе, може бити и мировање) па ни реакцији векторски једнаке силе инерције материјалне тачке. Одатле онда излази да физички и логички извор сила инерције лежи управо у инерцијалном својству материје.

Због тога, ако се има намера да се задобије што прецизнија логичка концепција о силама инерције, онда је зацело потребно да се то постигне за концепцију о самој

инерцији материје. Руководећи се таквом намером, покушаћемо у овом додатку да, на један брз и упрошћен начин, учинимо концепцију о инерцији материје нешто откривењом и интуитивнијом, инспиришући се при томе поглавито студијом П. Пенлевеа [12] и почетним идејама опште теорије релативитета.

Извесне идеје о инерцији материје постојале су још код *схоластичара* у Средњем веку. Према схоластичарима материја је уживала својство само инерцијалног мировања а не и инерцијалног праволинијског једноликог кретања. У упрошћеном облику њихове идеје би се могле приказати на следећи начин. Схоластичари су веровали да једна материјална тачка може да добије брзину за своје кретање само од блиских материјалних тела. Ако би се материјална тачка замислила крајње удаљена од свих других материјалних система, онда би, као непосредна последица таквог веровања, материјална тачка нужно морала бити и остати једино у мировању; а у томе закључку садржан је заправо схоластичарски принцип инерције. Тако дакле схоластичари нису допуштали могућност да се усамљена материјална тачка креће било каквом, па и константном, брзином. То је пак даље за схоластичаре значило да не може постојати ни стечена брзина; јер, ако би се замислило да су се од материјалне тачке у кретању удаљила нагло и на велика растојања сва остала тела, онда би се материјална тачка морала нагло зауставити. А са одбацивањем стечене брзине био је најзад нужно одређен и избор података који треба да сачињавају почетне услове покретне материјалне тачке: под тим условима схоластичари су подразумевали једино њен положај у почетном тренутку а не и њену брзину. Такав круг идеја био је уједно у пуној сагласности са *Принципом симетрије*, који су схоластичари познавали и признавали у облику који није престао да вреди ни за данашњу механику: ако почетни услови за покретну материјалну тачку пружају извесну симетрију, иста симетрија ће се појавити и у њеном кретању. Резонујући на бази тога принципа о замишљеном случају усамљене материјалне тачке, схоластичари су, заиста, долазили до истог закључка о њеном инерцијалном мировању. Ево тога закључка, који се показује вредан пажње и за даље развијање идеја о инерцији материје: почетни услови за усамљену материјалну тачку у погледу на њен почетни положај јесу симетрични; нема, дакле, разлога да материјална тачка крене пре у једном него у другом правцу; стога она остаје трајно у мировању. Простор у коме се материјална тела налазе и врше своја кретања схоластичари су замишљали као апсолутан, то јест независан од материјалних тела у њему, јединствен и непомичан, и при том са непомичном Земљом у његовом средишту.

Идеје схоластичара о својству материје за инерцијално мировање допунили су *коперниковци* са *Галилејем* идејама и о њеном својству за праволинијско једнолико кретање. На такву допуну коперниковци су били наведени опажањима разних земаљских и астрономских појава, који су делимично додуше били познати и схоластичарима, али су ози били прелазили преко њих без објашњења. Већ тако обична појава као што је кос хитац повукла је коперниковце да ревидирају схоластичарске почетне услове покретне материјалне тачке. Када се баца један камен из извесног положаја, у одређеном правцу, са већом или мањом брзином, — или друкчије речено, када се камен препусти самом себи у произвољном положају, са произвољном брзином по правцу и величини, онда опажања кажу да ће потоње кретање камена тиме бити потпуно одређено. На основу тако просте чињенице искуства и других сличних коперниковци су усвојили да почетне услове кретања материјалне тачке у извесном почетном тренутку мора чинити не само њен почетни положај него и њена почетна брзина. Са тако допуњеним почетним условима принцип симетрије је коперниковцима допустио потом и шири закључак о инерцијалном понашању усамљене материјалне тачке. Ако се замисли, наиме, материјална тачка крајње удаљена од свих других материјалних система и препуштена себи у извесном почетном положају и са извесном почетном брзином, онда су почетни услови

очевидно симетрични у погледу на праву одређену почетним положајем и правцем почетне брзине; стога ће кретање материјалне тачке морати бити симетрично у погледу на ту праву, то јест вршиће се по тој правој. Но, како се види, закључак утврђује само праволиниску трајекторију усамљене материјалне тачке, а не говори ништа о начину кретања, о закону пута по тој трајекторији. Из извесних разлога простоте поткрепљених земаљским и астрономским опажањима (што ће се овде изоставити) коперниковци су усвојили још да се кретање усамљене материјалне тачке врши једнолико. Тако су коперниковци дошли до овог уопштеог принципа инерције: Кретање једне материјалне тачке бесконачно¹⁾ удаљене од свих осталих јесте праволиниско и једнолико (а напосе може бити и мировање). Простор су и коперниковци замишљали као апсолутан, само са непомичним Сунцем.

Њутн је преузео принцип инерције од коперниковаца у неизмењеном значењу и увео га у свој систем механике као прву од три „аксиоме“. Но, Њутн је простор апсолутизовао без икаквих ограничења, апстрахујући га од било каквих материјалних тела [13]. Истина и сам је Њутн увиђао да апстракција о неком чистом простору без материјалних тела стоји далеко од физичког искуства, да је хитотетична и неодређена; али је ипак држао да постоје поуздане индиције које посведочују његову егзистенцију. Те индиције је Њутн видео у појављивању сила инерције код релативних кретања материјалних тела у погледу на убрзане неинерцијалне системе, а напосе центрифугалних сила код обртних тела. По Њутновом схватању, узрок јављању сила инерције лежи управо у егзистенцији апсолутног простора; јер, када не би постојао апсолутни простор, не би ни било сила инерције; зато, силе инерције претстављају онај физички посредник који омогућава и да се констатује и да се ближе упозна апсолутни простор. Наравно, силе инерције је Њутн подразумевао у своме смислу, као реалне силе реакције покретних материјалних тачака на промене њихових инерцијалних кретања.

Њутновом схватању апсолутног простора може се учинити озбиљан приговор већ са гледишта принципа саме Њутнове, класичне механике. Према тим принципима, силе инерције из релативног кретања материјалне тачке у погледу на један дати неинерцијални систем неће имати места за кретање у погледу на било који од безбројних инерцијалних система. Са Њутном, из те чињенице морало би се онда закључити да постоје и безбројно много апсолутних простора, везаних сваки за свој инерцијални систем, који се међусобно крећу транслаторно, праволиниски и једнолико. А овакав закључак, дакако, у основи компромитује концепцију о једном једином и непомичном апсолутном простору. — Такав и други слични приговори на основне идеје класичне механике ипак су дуже времена остајали по страни, потиснути њеним ванредним и неслућеним развојем и постигнутим успесима особито у астрономији. И тек крајем прошлог столећа Ернст Мах (Ernst Mach) је извршио значајнију систематску критику гносеолошке вредности основних појмова у класичној механици. Полазећи од физичког искуства да се само релативни положаји и релативна кретања дају констатовати, Мах сматра да Њутнови докази о егзистенцији апсолутног простора помоћу центрифугалних сила не могу бити друго до само привидни докази. Уствари, Њутнови се докази заснивају на прихватању оваквог факта: ако се замисли да Земља мирује у апсолутном простору и да се цело небо са звездама стајачицама окреће у супротном смеру, онда се на Земљи не би појављивале центрифугалне силе, те Земља не би била спљоштена и сила теже била би иста на екватору као и на полу. А, по Маху, такве тврдње премашују свако могуће искуство да би се могле проверити, па се зато и Њутнови докази морају примити са пуном сумњом [14].

1) Реч бесконачан значи да ће принцип бити утолико тачнији уколико је материјална тачка удаљенија од свих осталих.

Најзад, Ајнштајн са релативистима унео је у цело питање о инерцији материје жељену јасноћу заснивањем опште теорије релативитета. Са једне стране, релативисти се саглашавају са Маховом критиком да се никаквим разлозима, ни гиосеолошким ни физичким, не може правдати Њутново усвајање хипотезе о апсолутном простору, у коме би требало гледати узрок појављивању центрифугалних сила. Са друге стране, апстракција о усамљеној материјалној тачки, односно о материјалној тачки толико удаљеној од свих осталих материјалних тела да њихово дејство на њу ишчезава, апстракција која води порекло још од схоластичара, мора се по релативистима сматрати као нереална. Уствари, када се посматра било које небеско тело, види се да је оно одашуд окружено небројеним другим небеским телима на великој удаљености од њега; праћена са посматраног небеског тела ова се околна небеска тела притом сасвим не приметно релативно померају; тако, слика космоса за свако његово тело приказује се као какав затворен материјалан омот, порозан и чврст, врло велики и врло дебео, у чијој се шупљини оно налази. Допустити, дакле, апстракцију о усамљеном материјалном телу у простору, без икаквог дејства осталих материјалних тела у њему, сем неког фиктивног утицаја самог празног простора, не би значило ништа друго до напросто искључити могуће дејство таквог постојећег материјалног омота на посматрано материјално тело у његовој унутрашњости. На даље питање, какво дејство уопште може доћи у обзир од стране тог удаљеног скупа небеских тела на посматрано тело, релативисти одговарају да се стварно познаје једно опште међусобно деловање свих материјалних тела васионе, а то је гравитација. У сагласности са тим, инерцијално својство материје не треба тражити у материјалном својству само једне усамљене материјалне тачке или у физичким особинама каквог илузорног апсолутног простора, већ управо у свеопштем гравитационом деловању између те материјалне тачке и скупа удаљених и небројених звезда некретница целе васионе. Шта више, ванредну верификацију за такво схватање о вези између инерције материје и њене гравитације пружа и само физичко искуство преко става о једнакости инеционе масе и гравитационе масе, става који је додуше био познат још у Њутново време, но чији је фундаментални значај констатован тек од стране релативиста. На тај начин, својство инерције материје јесте уствари последица њеног гравитационог својства, закључују релативисти.

Када се сада прегледа целокупан развој идеја о инерцији материје од схоластичара до релативиста, па се притом одбаце оне нереалне и илузорне, а задржи њихово здраво логичко и физичко језгро, онда би се на темељу таквог идејног језгра могла конструисати на следећи начин једна конзеквентнија концепција о инерцији материје, која би још усто била у знатној мери и интуитивнија.

Појмимо опет са посматрањем једне материјалне тачке крајње удаљене од свих осталих у простору. Усвајајући, најпре, гледиште релативиста да инерција материје произилази из њеног гравитационог својства, та се материјална тачка мора, нужно по самом устројству космоса, замислити опкољена једним огромним материјалним омотом састављеним од скупа удаљених и небројених звезда некретница. У првој и високој приближности, облик овом материјалном омоту могао би се идеализовати на облик једног порозног лоптастог слоја врло великог унутрашњег пречника и произвољне дебљине. Посматрана материјална тачка треба тада да се налази стално у средишту таквог идеалног лоптастог слоја, и то веома приближно чак и ако јој се дозволи произвољно кретање у односу на лоптаст слој, будући да се дужине њених предлагених путева могу сматрати занемарљивим према огромној дужини унутрашњег пречника слојевог. Тако се може усвојити да материјална тачка у погледу на лоптаст слој задржава стално положај централне симетрије. У таквом симетралном положају биће заправо материјална тачка једино и изложена гравитационом дејству лоптастог слоја. Да би се испитало какве се последице уопште могу јавити услед симетричног гравитационог дејства лоптастог слоја

на централну материјалну тачку, треба још усвојити: на једној страни, заједно са схоластичарима принцип симетрије; а на другој страни, заједно са коперниковцима почетне услове покретне материјалне тачке садржане у њеном почетном положају и њеној почетној брзини.

Узмимо, прво, да посматрана усамљена материјална тачка нема почетну брзину у погледу на скуп звезда некретница, — другим речима, да се у своме почетном положају налази у мировању. Тада, услед симетричног гравитационог дејства космичког лоптастог слоја звезда некретница на материјалну тачку у централном положају, нема разлога да материјална тачка напусти тај свој централни положај пре у једном него у другом правцу; материјална тачка ће, дакле, морати остати стално у мировању.

Узмимо, друго, да посматрана усамљена материјална тачка има почетну брзину у погледу на скуп звезда некретница. Тада се може сматрати да правац те њене почетне брзине лежи на оси симетрије космичког лоптастог слоја звезда некретница; притом, услед симетричног дејства истог слоја не постоји разлог да материјална тачка и у своме даљем кретању напусти тај правац почетне брзине пре на једну страну него на другу; стога ће се материјална тачка нужно кретати по правој одређеној њеним почетним положајем и правцем њене почетне брзине.

Ну, у наставку истоветног резоновања може се сада такође закључити и о нужној врсти таквог праволиниског кретања као последици утврђених физичких услова у космосу, за разлику од коперниковаца који су ту врсту кретања усвајали. Наиме, због реченог врло приближног централног положаја материјалне тачке у космичком лоптастом слоју звезда некретница чак и када се она креће, дејство тога слоја остаје симетрично, те стога нема разлога да материјална тачка промени величину своје расположиве брзине пре у смеру праволиниског кретања него у супротном смеру; брзина материјалне тачке, дакле, мора остати стално константна, то јест материјална тачка се мора кретати једнолико.

На тај начин, установљена су сва три вида инерцијалиог својства материје: трајно мировање, праволиниско кретање и једнолико кретање. Инерција материје показује се, према томе, као проста последица усвојеног симетричног гравитационог садејства космичког скупа звезда некретница на ма коју усамљену материјалну тачку и усвојених почетних услова кретања материјалне тачке.

Такав резултат одговара принципу инерције класичне механике. Уствари, он треба да претставља само прву приближност под идеализованим физичким условима космоса. Због тога се, зацело, у даљој приближности под условима који отступају од идеализованих имају очекивати и другојачија инерцијална својства материје, онако како то и третира општа теорија релативитета.

Да бисмо, најзад, дошли до сила инерције треба још да погледамо случај када материјална тачка није усамљена. Замислимо да је у близину досада посматране усамљене материјалне тачке доведена друга материјална тачка, која услед извесних датих физичких услова може дејствовати на њу у механичком смислу, а то ће рећи да може утицати на њено кретање. Физичка ситуација посматране материјалне тачке биће тиме битно измењена. Са једне стране, скуп удаљених и небројаних звезда некретница намеће посматраној материјалној тачки праволиниско једнолико кретање. Са друге стране пак, блиска материјална тачка треба да утиче на такво њено кретање; логички, тај утицај био би уопште могућ у виду убрзања првог, другог, трећег и виших редова; а фактички, физичко искуство показује да се он остварује заправо у виду убрзања првог реда. Два различита дејства на посматрану материјалну тачку биће тада изражена и са две различите физичке величине; за дејство скупа звезда некретница та физичка величина јесте инерцијална маса посматране материјалне тачке, а за дејство блиске материјалне тачке то је убрзање посматране материјалне тачке. Резултат заједничког дејства

на посматрану материјалну тачку, и скупа звезда, некретница и блиске материјалне тачке, биће међутим изражен једном физичком једначином; то је основна, Њутнова, динамичка једначина о кретању материјалне тачке. А преко те једначине биће онда уједно уведене и изражене и саме силе инерције, и то како оне реалне у Њутновом смислу реакције тако и оне фиктивне када се користе у савременом методичком смислу.

ЛИТЕРАТУРНЕ БЕЛЕШКЕ

- [1] А. И. Крылов: О силах инерции и начале Даламберта, Собрание трудов, V; Изд. Акад. наук СССР, Москва-Ленинград 1937.
- [2] Историски развитак Даламберовог принципа и појма о силама инерције изложен је подробније у чланку:
Е. Л. Николаи: О начале Даламбера и о силах инерции, Труды Ленинградского индустриального института за 1936 г.
- [3] Том примедбом само се унеколико варирају речи Лојцјанског и Лурјеа из једног пасуса у њиховом курсу:
Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье: Курс теоретической механики, том II, издање IV; Москва, Огиз, 1948; стр. 260.
- [4] Такви називи за две врсте инерцијалних координатних система употребљени су у спису:
Paul Painlevé: *Les axiomes de la Mécanique*; Paris, Gauthier-Villars, 1922; стране XVII и 84.
- [5] На пример:
Антон Билимовић: *Рационална механика*, том I, издање II; Београд, Научна књига, 1950; стр. 316.
Аутор уопште и не каже да су „водећа сила“ и „Коријолисова сила“ силе инерције.
- [6] На пример:
Paul Appell: *Traité de Mécanique rationnelle*, том II, издање VI; Paris, Gauthier Villars, 1953; стр. 269.
Аутор преносну силу инерције назива „force centrifuge“ или „force d'inertie d'entraînement“ а Коријолисову силу инерције само „force centrifuge composée“.
- [7] Ту долазе руски аутори:
1° Аутори цитирани под [3], исти курс, стр. 313.
2° Г. К. Сусллов: Теоретическая механика, издање III; Москва, Огиз, 1946; стр. 233.
3° А. И. Некрасов: Курс теоретической механики, том II; Москва, Огиз, 1946; стр. 238.
- [8] На пример, аутор цитиран под [7] 2°, у истом курсу, стр. 354.
- [9] У дефиницији III Њутн каже:
„Materiae vis insita est potentia resistendi qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum“.
Што у преводу значи:
„Материји својствена (урођена) сила јесте способност опирања, којом посебно тело, уколико је остављено самом себи, стално остаје у своме стању мировања или једноликог праволиноског кретања.“
Ту дефиницију Њутн пропраћа оваквим тумачењем:
... „та сила увек је пропорционална маси и разликује се од инерције масе само по нашем начину схватања. Од инерције масе долази да се свако тело само са напором може извести из свога стања мировања или кретања, те би се стога ма-

Шерији својствена сила могла сасвим разумљиво назвати силом инерције. Ту силу тело испољава једино када друга сила, која напада на њега, производи промену његовог стања. Према њеном испољавању та се сила може сматрати двојачко: као *отпорна* и као *нападна*. Она ће бити отпорна уколико се тело опире нападној сили, тежећи да задржи своје стање; а биће нападна уколико исто тело, тешко попуштајући сили препреке која му се противи, тежи да измени стање те препреке.“

[10] Курс цитиран под [6], само том I, издање VI 1941, № 289, стр. 563 — 564.

[11] Курс цитиран под [3], стр. 259—261 и 313—314.

[12] Спис цитиран под [4], углавном стр. XVI — XVII, 21—23, 31—34 и 56—62.

[13] О простору Њутн се изражава:

„Апсолутни простор остаје по својој природи и без односа према било чему спољњем једнак себи и непомичан. Релативни простор јесте мера тога простора или ма какав његов просторни део у кретању, који се одређује нашим чулима по своме положају према телима и народ га употребљава место непомичног простора.“ И даље:

„Дејства којим се међусобно разликују апсолутна и релативна кретања јесу силе удаљавања од осе у кружном кретању. Јер, у кружном кретању, напросто релативном, ове силе су једнаке нули а у истинском и апсолутном веће су или мање према величини кретања...“

„... Додуше, врло је тешко упознати истинска кретања појединих тела и стварно их разликовати од привидних, зато што се делови онога непомичног простора, у коме се тела заиста крећу, не запажају чулима. Ствар ипак није сасвим безнадежна.... Када би се, например, две лопте, спојене помоћу конца на датом међусобном растојању, окретале око заједничког тежишта, онда би се из напона у концу могла дознати тежња за одмицањем лопти од обртне осе, а одатле би се могла израчунати величина кружног кретања.“

[14] О Маховој критици узето је из књиге:

Макс Борн, *Ајнштајнова теорија релативитета*, превод Д. Блануше; Загреб 1948; стр. 55—57.

CONTRIBUTION À UNE CONCEPTION PLUS PRÉCISE DES FORCES D'INERTIE.*)

par BORISLAV LILIĆ, BEOGRAD

Résumé

Après avoir rappelé que la mécanique traite des forces d'inertie dans deux chapitres différents — le principe de D'Alembert et la théorie dynamique du mouvement relatif, — l'auteur fixe d'abord deux buts différents et deux façons différentes d'un tel traitement.

Ensuite, en faisant une analyse détaillée et critique des deux façons de traitement mentionnées, l'auteur précise la conformité formelle et réelle de la conception des forces d'inertie, ce qui contribue d'un point de vue nouveau à leur définition plus précise. En examinant, dans la suite, la question de la nature physique des forces d'inertie, l'auteur constate qu'on doit les considérer comme des forces fictives, du point de vue de la définition de Newton, dans le cas où on les emploie, dans le classement méthodique, avec le point d'application sur le point matériel considéré même; mais, d'autre part, l'auteur démontre que les forces d'inertie représentent des forces réelles, lorsqu'on les traite comme des forces de réaction du point matériel considéré sur les objets matériels agissant sur ce point par des forces d'action.

Enfin, dans le but de rendre la conception des forces d'inertie plus claire et plus intuitive, l'auteur expose sommairement le problème de l'inertie de la matière, en essayant de faire comprendre cette propriété de la matière, dans la sens des idées embryonnaires de la théorie générale de relativité, comme la conséquence de l'action de gravitation symétrique de la constellation cosmique des astres fixes sur le point matériel isolé considéré.

*) Communiqué au II. Congrès des mathématiciens et physiciens de la R. F. de Yougoslavie, Zagreb (4—9 octobre, 1954).