*Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R.P. de Serbie
Vol. VI, 1—2 (1954), Beograd*

ТРАНСЦЕНДЕНТНИ БРОЈЕВИ И ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ ЈЕДНЕ ФАМИЛИЈЕ ФУНКЦИЈА. ФОРМИРАЊЕ ЈЕДНОГ СКУПА ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ БРОЈЕВА*)

СИМОН ЋЕТКОВИЋ, БЕОГРАД

У овом раду циљ нам је да формирамо што простије функције, и то функције од имениоца рационалних бројева које ће имати следеће необичне особине: прекидне су у свима рационалним тачкама а диференцијабилне у унапред датом коначном скупу трансцендентних бројева као и у још свуда густо распоређеним тачкама. Затим нам је циљ да образујемо свуда густо распоређене трансцендентне бројеве у којима ове функције неће бити диференцијабилне иако су непрекидне.

А

1.1. Сваком реалном броју a формираћемо њему одговарајући низ $g_a(n)$ на следећи начин:

$g_a(n) = min \left| \frac{d}{n} - a \right|$, где се d мења у скупу целих бројева тако да је $\frac{d}{n} \neq a$; n је природан број. Овај низ назваћемо: низ густоће броја a.

Сваком $g_a(n)$ одговарају два цела броја d_1 и $d_1 + 2$ таква да је

$$\frac{d_1}{n} < a < \frac{d_1 + 2}{n},$$

па је

$$g_a(n) = min \left| \frac{d}{n} - a \right| \leqslant \frac{1}{n} \to 0, \quad \text{за } n \to \infty. \tag{1}$$

Значи да је низ $g_a(n)$ нула низ за свако a.

*) Саопштено на II Конгресу математичара и физичара ФНРЈ у Загребу (4—9 октобар 1954).

Напомињем да овај низ густоће увелико карактерише један трансцендентан број у односу на скуп рационалних бројева.

1.2. Означимо са S коначан скуп трансцендентних бројева који су дати унапред.

1.3. Уочимо низ $f(n)$ дефинисан на следећи начин:

$$f(n) = min\left(g_{\xi}(n),\ n^{-n}\right), \tag{2}$$

где се ξ мења у скупу S.

2. Образујмо реалну функцију $F_s(x)$, на следећи начин:

$$F_s(x) = 0, \text{ за } x \text{ ирационалан број},$$

$F_s(x) = \frac{1}{q} \cdot f(x)$, када је x рационалан број облика $\frac{p}{q}$ (p је цео број, p и q узајамно прости бројеви).

3. Овде ће бити показано да је функција $F_s(x)$ диференцијабилна у унапред датом коначном скупу трансцендентних бројева S као и у још свуда густо распоређеним бројевима иако је прекидна у свима рационалним тачкама.

4. Нека је ξ један од бројева скупа S.

4.1. Ако је x ирационалан број различит од ξ тада је

$$\frac{F_s(x) - F_s(\xi)}{x - \xi} = \frac{0}{x - \xi} = 0 \tag{3}$$

јер је и $F_s(x) = 0$ и $F_s(\xi) = 0$.

4.2. Када је x рационалан број облика $\frac{p}{q}$ имамо

$$\left|\frac{F_s(x) - F_s(\xi)}{x - \xi}\right| = \frac{F_s(x)}{|x-\xi|} = \frac{\frac{1}{q}\cdot f(q)}{\left|\frac{p}{q} - \xi\right|} = \frac{1}{q}\cdot\frac{f(q)}{\left|\frac{p}{q} - \xi\right|} \leqslant \frac{1}{q} \tag{4}$$

јер је према (1) и (2) $F_s(x) = \frac{1}{q} f(q) > 0$ и $0 < f(q) \leqslant \left|\frac{p}{q} - \xi\right|$.

Како око сваког реалног броја a постоји једна околина $(a - \delta, a + \delta)$, где је $\delta > 0$, у којој се не налази ниједан рационалан број $\frac{p}{q}$, такав да му је именилац мањи од унапред датог произвољног великог броја N (видети [2] страна 54), произилази да

$$q \to \infty \quad \text{када } x \to \xi. \tag{5}$$

Према томе

$$\left|\frac{F_s(x) - F_s(\xi)}{x - \xi}\right| \to 0 \text{ када } x \to \xi,$$

јер је
$$\left|\frac{F_s(x) - F_s(\xi)}{x - \xi}\right| \leqslant \frac{1}{q} \to 0 \text{ када } q \to \infty.$$

4.3. Из 4.1. и 4.2. следује да је
$$\lim_{x \to \xi} \frac{F_s(x) - F_s(\xi)}{x - \xi} = 0,$$
а из тога следује даље да је заиста функција $F_s(x)$ диференцијабилна у свима тачкама скупа S.

5. Да би показали да је функција $F_s(x)$ диференцијабилна и у алгебарским ирационалним тачкама користићемо се Liouville-овим ставом: Ако је $\frac{p}{q}$ рационалан а ξ алгебарски број реда k тада неједнакост
$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{k+1}}$$
има само коначно много решења по непознатој $\frac{p}{q}$.
Из овог става следује да сваком алгебарском броју ξ реда k одговара једна околина $(\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi))$, у којој важи неједначина
$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{k+1}},$$
за све рационалне бројеве те околине. Но како је
$$\frac{1}{q^q} < \frac{1}{q^{k+1}} \text{ за } q > k + 1$$
то је и
$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^q} \text{ за} \left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \delta(\xi) \text{ и } q > k + 1.$$

Уочимо ли сада ону околину броја ξ у којој је
$$q > k + 1 \text{ и } \left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{k+1}}$$
и означимо је са $\delta_1(\xi)$ имаћемо да је
$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^q} \text{ за } \left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \delta_1(\xi). \tag{6}$$

Када је x ирационалан број имаћемо да је
$$\left|\frac{F_s(x) - F_s(\xi)}{x - \xi}\right| = 0, \text{ јер је } F_s(x) = 0 \text{ и } F_s(\xi) = 0.$$

Ако је x рационалан број и ако је

$$| x - \xi | < \delta_1 (\xi)$$

тада је

$$\left| \frac{F_s(x) - F_s(\xi)}{x - \xi} \right| = \frac{F_s(x)}{|x - \xi|} = \frac{\frac{1}{q} \cdot f(q)}{\left| \frac{p}{q} - \xi \right|} < \frac{1}{q}$$

јер је

$$f(q) \leqslant \frac{1}{q^q} < \left| \frac{p}{q} - \xi \right| \text{ односно } \frac{f(q)}{\left| \frac{p}{q} - \xi \right|} < 1.$$

Према томе је

$$\lim_{x \to \xi} \frac{F_s(x) - F_s(\xi)}{x - \xi} = 0,$$

а из тога следује да је функција $F_s(x)$ диференцијабилна и у алгебарским ирационалним тачкама које су свуда густо распоређене (видети сличне доказе у [1]).

6. Како је

$F_s(x) = \frac{1}{q} \cdot f(q) > 0$, за x рационалан број, и како се у свакој околини таквог x налази бар једно x_1 ирационално за које је $F_s(x_1) = 0$, то је функција $F_s(x_1)$ прекидна у свима рационалним тачкама.

7. Из 4., 5. и 6. следује да је тврђење под 3. заиста тачно.

Б

8. Формираћемо сада неке трансцендентне бројеве у којима функција $F_s(x)$ неће бити диференцијабилна иако је непрекидна.

8.1. Означимо са $h(n)$ највећи број облика n^{-m}(m и n природни бројеви, $n > 1$), који није већи од $\frac{1}{n} \cdot f(n)$. Нека је

$$h_1(n) = h\left(\frac{1}{h(n)}\right) \text{ и } h_{k+1}(n) = h\left(\frac{1}{h_k(n)}\right),$$

где је k природан број.

С обзиром да је и $\frac{1}{n^{-m}} = n^m$ природан број то је и $\frac{1}{h_k(n)}$ природан број већи од 1 јер је и $n > 1$. Узимајући у обзир (2) имаћемо:

$$h(n) < \frac{1}{n} \cdot f(n) \leqslant \frac{1}{n} n^{-n} = \frac{1}{n^{n+1}} < \frac{1}{2},$$

па је и

$$h_k(n) < \frac{1}{2} \text{ односно } \frac{1}{h_k(n)} > 2. \tag{7}$$

Из

$$h_{k+1}(n) = h\left(\frac{1}{h_k(n)}\right)$$

следи

$$h_{k+1}(n) \leqslant \frac{1}{\frac{1}{h_k(n)}} \cdot \left(\frac{1}{h_k(n)}\right)^{-\frac{1}{h_k(n)}} = h_k(n) \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{h_k(n)}\right)^{\frac{1}{h_k(n)}}}$$

односно

$$h_{k+1}(n) < \frac{1}{2} h_k(n) \tag{8}$$

јер је $\frac{1}{h_k(n)} > 2$.

Напоменимо да је $h_k(n) > 0$, што је јасно из саме дефиниције за $h_k(n)$.

Из (7) и (8) следи

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k(n) < 1, \text{ за свако } n > 1.$$

Друкчије речено постоји низ бројева

$$\alpha(n) = \lim_{i \to \infty} \sum_{k=1}^{i} h_k(n), \quad n > 1$$

и чланови тога низа припадају интервалу (0, 1).

8.2. Показаћемо да су чланови низа $\alpha(n)$ трансцендентни бројеви.

8.21. Узмимо једно константно n и њему одговарајући број $\alpha(n)$. Уочимо затим њему одговарајући низ бројева $a(l)$ (l природан број) дефинисан на следећи начин:

$$a(l) = \sum_{k=1}^{l} h_k(n).$$

Чланови низа $a(l)$ су рационални бројеви јер је $h_k(n)$ рационалан број.

Уочимо члан $a(l)$ низа $\alpha(l)$ и покажимо да је његов именилац $\frac{1}{h_l(n)}$. (Кад говоримо о имениоцу неког рационалног броја претпостављамо да је тај број написан у облику $\frac{p}{q}$, p и q узајамно прости цели бројеви.)

Како је $h(n)$ облика $\frac{1}{n^m}$ то је $h_1(n)$ облика $\frac{1}{n^{m \cdot m_1}}$ односно $h_k(n)$ облика $\frac{1}{n^{m \cdot m_1 \ldots m_k}}$, следи да је

$$a(l) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{n^{m \cdot \prod_{i=1}^{k} m_i}} = \frac{1}{n^{m \cdot \prod_{i=1}^{k} m_i}} \cdot \sum_{k=1}^{l} \frac{n^{\prod_{i=1}^{l} m_i}}{n^{\prod_{i=1}^{k} m_i}}$$

или

$$a(l) = \left(\sum_{k=1}^{l-1} \frac{n^{\prod_{i=1}^{l} m_i}}{n^{\prod_{i=1}^{k} m_i}} + 1 \right) \qquad n^{m \cdot \prod_{i=1}^{l} m_i}$$

Произилази да су

$$\sum_{k=1}^{l-1} \frac{n^{\prod_{i=1}^{l} m_i}}{n^{\prod_{i=1}^{k} m_i}} + 1 \quad \text{и} \quad n^{m \cdot \prod_{i=1}^{l} m_i}$$

узајамно прости бројеви јер кад не би били морали би бити дељиви са неким чиниоцем броја n а то је немогуће јер први од ових бројева није са њим дељив. (Кад говоримо о чиниоцима неког природног броја мислимо на чиниоце различите од 1).

Према томе именилац рационалног броја $a(l)$ је $\frac{1}{h_l(n)}$.

8.22. Из

$$\alpha(n) - a(l) = \sum_{k=l+1}^{\infty} h_k(n) < 2\, h_{l+1}(n) = 2\, h\left(\frac{1}{h_l(n)}\right) \leqslant$$

$$2\, h_l(n) \cdot \left(\frac{1}{h_l(n)}\right)^{-\frac{1}{h_l(n)}} = 2\, h_l(n) \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{h_l(n)}\right)^{\frac{1}{h_l(n)}}}. \tag{9}$$

произлази

$$\alpha(n) - a(l) < \frac{1}{\left(\frac{1}{h_l(n)}\right)^{\frac{1}{n_l(n)}}}$$

Из

$$\alpha(n) = \lim_{l \to \infty} \sum_{k=1}^{l} h_k(n)$$

следује да се у свакој околини броја $\alpha(n)$ налазе скоро сви чланови низа $a(l)$, па $\alpha(n)$ не може бити алгебарски број јер би (9) било у супротности са (6). Према томе долазимо до закључка да су сви чланови низа $\alpha(n)$ трансцендентни бројеви.

8.3. Покажимо да функција $F_s(x)$ нема извода у члановима низа $\alpha(n)$.

За $\alpha(n)$ члан низа $\alpha(n)$ и за $x \in$ низа $a(l)$ имамо

$$\frac{F_s(x) - F(\alpha(n))}{x - \alpha(n)} = \frac{F_s(a(l))}{a(l) - \alpha(n)} = \frac{F_s(\alpha(l))}{\sum\limits_{k=l+1}^{\infty} h_k(n)} > \frac{F_s(a(l))}{2\, h_{(l+1)}(n)} \geqslant$$

$$\frac{h\left(\dfrac{1}{h_l(n)}\right)}{2\, h_{(l+1)}(n)} = \frac{h_{(l+1)}(n)}{2\, h_{(l+1)}(n)} = \frac{1}{2},$$

односно

$$\frac{F_s(x) - F(\alpha(n))}{x - \alpha(n)} > \frac{1}{2}, \quad \text{промењива } x \in a(l), \quad \text{константа } \alpha(n) \in \text{ низа } \alpha(n). \tag{10}$$

За $x \in$ ирационалних бројева имамо

$$\frac{F_s(x) - F_s(\alpha(n))}{x - \alpha(n)} = 0. \tag{11}$$

Према (11) и (10) закључујемо да не постоји,

$$\lim_{x \to \alpha(n)} \frac{F_s(x) - F_s(\alpha(n))}{x - \alpha(n)}$$

то јест функција $F_s(x)$ нема извода у тачкама низа $\alpha(n)$.

9. Чланови низа

$$\beta(n) = \alpha(n) \pm \frac{n_1}{n^{n_2}},$$

где су n_1 и n_2 ма која два природна броја, такође су трансцендентни бројеви. Уочимо ли низ рационалних бројева

$$b(l) = a(l) \pm \frac{n_1}{n^{n_2}}$$

имамо да је:

$$\frac{F_s(x) - F_s(\beta(n))}{x - \beta(n)} = \frac{F_s(b(l))}{b(l) - \beta(n)} = \frac{F_s(b(l))}{a(l) - \alpha(n)} =$$

$$= \frac{F_s(a(l))}{a(l) - \alpha(n)}, \quad \text{за } x \in b(l) \text{ и } \frac{1}{h_l(n)} > n^{n_2},$$

па према томе функција $F_s(x)$ неће имати извода у тачкама низа $\beta(n)$.

10. Из горњег следи да помоћу низова $\beta(n)$ *можемо образовати свуда-густо распоређене трансцендентне бројеве у којима функција* $F_s(x)$ *неће бити диференцијабилна и ако је диференцијабилна на скупу трансцендентних бројева* S *као и у алгебарским ирационалним тачкама.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Симон Ћетковић: *Веза између реда алгебарских бројева и диференцијабилности једне фамилије функција.* Весник Друштва математичара и физичара НР Србије V, 3—4 (1953), Београд.

[2] Симон Ћетковић: *О диференцијабилности два скупа реалних функција,* Весник Друштва математичара и физичара НР Србије, IV, 3—4 (1952), Београд.

LES NOMBRES TRANSCENDANTS ET LA DIFFÉRENTIABILITÉ D'UNE FAMILLE DE FONCTIONS. FORMATION D'UN ENSEMBLE DES NOMBRES TRANSCENDANTS*)

par SIMON ĆETKOVIĆ, BEOGRAD

Résumé

Le but de cet article est la formation des fonctions, aussi simples que possible, à savoir des fonctions des dénominateurs des nombres rationnels, lesquelles jouissent des propriétés intéressantes que voici: elles sont discontinues dans tous les points rationnels et différentiables dans un ensemble fini des nombres transcendants, donné d'avance ainsi que dans un ensemble de points partout dense. De même, on forme l'ensemble de nombres transcendants partout dense dans lesquels les fonctions en question ne seront pas différentiables, malgré qu'elles soient continues. On fait ce qui précède de la manière suivante:

1° Pour tout nombre réel a on forme la suite $g_a(n) = min\left|\frac{d}{n} - a\right|$, suite de densité du nombre a, où d varie dans l'ensemble des nombres entiers avec $\frac{d}{n} \neq a$, n étant un nombre naturel.

Ensuite, on considère la suite

$$f(n) = min\,(g_{\xi}(n), n^{-n}),$$

*) Communiqué au II Congrès des mathématiciens et physiciens de la R. F. P. de Yougoslavie, Zagreb, (4—9 octobre 1954).

où ξ appartient à un ensemble fini et arbitraire S des nombres transcendants donnés d'avance.

Après cela on forme la fonction réelle $F_s(x)$ que voici:

$$F_s(x) = 0, \text{ pour } x \text{ irrationnel};$$

$F_s(x) = \dfrac{1}{q} f(q)$, pour $x = \dfrac{p}{q}$, p nombre entier, q naturel et p et q premiers entre eux.

Ceci étant admis, on démontre que la fonction $F_s(x)$ est différentiable dans un ensemble des nombres transcendants S donné d'avance, ainsi que dans un ensemble de points partout dense, quoiqu'elle soit discontinue dans tous les points rationnels.

2° Si $h(n)$ désigne le plus grand nombre de la forme n^{-m}, (m et n nombres naturels, $n > 1$ avec $h(n) \leqslant \frac{1}{n} f(n)$) on construit une suite des suites

$$h_k(n) = h\{1/h_{k-1}(n)\},$$

et avec elle la nouvelle suite suivante

$$\alpha(n) = \lim_{l \to \infty} \sum_{k=1}^{l} h_k(n),$$

Mettant à profit la suite des nombres rationnels

$$a(l) = \sum_{k=1}^{l} h_k(n),$$

on démontre que les $\alpha(n)$ sont des nombres transcendants. Au moyen de ces nombres $\alpha(n)$ on forme, à la fin, l'ensemble partout dense des nombres transcendants et on démontre que la fonction $F_s(x)$ pour ces nombres n'est pas différentiable.