*Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R.P. de Serbie Vol. VI, 1—2 (1954), Beograd*

# ПРИЛОГ ИСПИТИВАЊУ PERRON-ове МОДУЛАРНЕ ФУНКЦИЈЕ ЈЕДНОГ ИРАЦИОНАЛНОГ БРОЈА*)

**БОЖИДАР ЂЕРАСИМОВИЋ**, БЕОГРАД

1. Посматрајмо један ирационалан број $\gamma$ дефинисан правилним верижним разломком

$$\gamma = (b_0, b_1, b_2 \dots).$$

Нека је низ његових главних приближних вредности

$$\frac{x_\nu}{y_\nu} = (b_0, b_1, b_2 \dots b_\nu), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

а низ апсолутних вредности одговарајућих грешака апроксимације

$$\left| \gamma - \frac{x_\nu}{y_\nu} \right| = \frac{1}{\lambda_\nu y_\nu^2}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Последњом једнакошћу је дефинисан низ позитивних бројева $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$, чији је општи члан

$$\lambda_\nu = (b_{\nu+1}\, b_{\nu+2} \dots) + (0\, b_\nu\, b_{\nu-1} \dots b_1) \tag{1}$$

(Perron [5], стр. 5, образац (5)).

Perron [5] дефинише модуларну функцију $M(\gamma)$ ирационалног броја $\gamma$ као

$$M(\gamma) = \limsup_{\gamma \to \infty} \lambda_\nu, \tag{2}$$

Ову функцију испитују затим Perron [6] и Scibata [7], а много пре њих Марков [2, 3].

Циљ овог рада је испитивање неких врста бројева које могу бити вредности или тачке нагомилавања вредности функције $M(\gamma)$, као и њене специјалне тачке са особином коју је за тачку $M(\gamma) = 3$ доказао Perron ([5], Satz 9). У раду ће бити употребљени уређени

---

*) Саопштено на II Конгресу математичара и физичара ФНРЈ у Загребу (4—9 октобар 1954).

комплекси природних бројева и операције са њима дефинисане у раду [1].

2. Став 1. *Сваки природан број $a \geqslant 3$ је тачка нагомилавања вредности модуларне функције $M(\gamma)$. Један од низова вредности функције $M(\gamma)$ које теже броју $a$, дат је обрасцем*

$$M(\theta'_\nu) = \sqrt{a^2 - (-1)^{s_\nu} \frac{4}{[S_\nu]^2}}, \tag{3}$$

*где је $S_\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) низ свих могућих симетричних комплекса састављених од природних бројева $1, 2, \dots, a-3$ (тако да је сваки комплекс $S_\nu^*$ састављен само од истих бројева). Низ комплекса $S_\nu$ је тако уређен да низ природрих бројева $[S_\nu]$ расте са $\nu$. ($s_\nu$ је број чланова комплекса $S_\nu$).*

*Бројеви $\theta'_\nu$ су еквивалентни са бројевима*

$$\theta_\nu = (\overline{a - 1 \ S_\nu^*}) \tag{4}$$

Доказ. Пошто је $(a-1)$ највећи непотпуни количник чисто периодичног разломка (4) (за 2 већи од свих осталих), то је поуздано:

$$M(\theta_\nu)\sqrt{\left\{(a-1 \ S_\nu) + (0 \ \overline{S_\nu^*})\right\}^2 - (-1)^{s_\nu} \frac{4}{[S_\nu]^2}},$$

(Perron [5] Satz 3 и [1] образац (7/III) стр. 67), а израз у великој загради под кореном — према идентичности (13/II), [1] стр. 65 — своди се на $a$, па се добија образац (3). Јасно је даље да за $\nu \to \infty$ и $[S_\nu] \to \infty$, па $M(\theta_\nu) \to a$.

Став 2. *Скуп бројева $\gamma$ за које је $M(\gamma) = a$ има моћ континуума, ма колики био природан број $a \geqslant 3$.*

Доказ. Показаћемо да за сваки природан број $a \geqslant 4$ постоји пребројиво много таквих скупова ирационалних бројева $\gamma$. Нека је $S$ ма који симетрични комплекс састављен од природних бројева $1, 2, 3, \dots a-3$, па посматрајмо ирационалан број $\gamma$ дефинисан правилним верижним разломком

$$\gamma = (a-1 \ \underline{S^*} \ S^{k_1} \ a-1 \ \underline{S^*} \ S^{k_2} \ a-1 \ \underline{S^*} \ S^{k_3} \ a-1 \dots),$$

где је $k_1, k_2, k_3 \dots, k_\nu, \dots$ ма који растући бесконачни низ природних бројева. Тада према саставу комплекса $S$, а на основу обрасца (2), следује:

$$M(\gamma) = a - 1 + (0 \ \underline{S^*} \ \overline{S}) + (0 \ \overline{S}),$$

што се — према идентичности (13/II), [1] стр. 65 — своди на $M(\gamma) = a$. На основу тога и произвољности низа $k_\nu$, став 2 је доказан.

3. У овом одељку даћемо два става који се односе на рационално разломљене вредности модуларне функције $M(\gamma)$.

Став 3. *Ма колики био рационалан и позитиван прави разломак $\frac{m}{n}$, увек се може наћи довољно велики природан број a, да вредност*

$$\alpha = a + \frac{m}{n} \tag{5}$$

*буде тачка нагомилавања вредности функција $M(\gamma)$.*

*У том случају су тачке нагомилавања исте функције и сви бројеви $a + p + \frac{m}{n}$, где је $p = 1, 2, 3, \ldots$*

*Један од низова вредности функције $M(\gamma)$, које теже броју $\alpha$ дат је обрасцем:*

$$M(\theta'_\nu) = \sqrt{\alpha^2 + (-1)^{(s+1)(\nu+1)} \frac{4}{[A\{b\,A\}^\nu]^2}}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

*где је уређени комплекс $A = a_1, a_2, a_3 \ldots a_s$ једно, ма које, решење једначине*

$$(0A) - (0\underline{A}) = \frac{m}{n}, \tag{7}$$

*а природни бројеви a и b тако изабрани да је:*

$$a \geqslant a_\nu + 3, \text{ за } \nu = 1, 2, \ldots s; \quad b \leqslant a - 3. \tag{8}$$

*Бројеви $\theta'_\nu$ су еквивалентни бројевима*

$$\theta_\nu = (\overline{a - 1\, A^* \{b\,A\}^\nu}), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Доказ. Једначина (7) има увек решења ма колики био прави разломак $\frac{m}{n}$, јер например, ако је

$$\frac{m}{n} = (0\,B)$$

где је $B = b_1, b_2, b_3, \ldots b_{2n}$ уређени комплекс природних бројева са парним бројем чланова, онда је једно решење једначине (7):

$$A = B'c \tag{10}$$

где је

$$c = [B]\,[B'] + b_{2n}. \tag{11}$$

У то се уверавамо развијањем израза $(0A) - (0\underline{A})$, кад се у њему изврше смене (10) и (11).

Са тако одређеним комплексом $A$, можемо увек формирати низ разломака (9). С обзиром на услове (8), а према обрасцу (7/III) [1] стр. 67, поуздано је:

$$M(\theta_\nu) = \sqrt{g^2 + (-1)^{(s+1)(\nu+1)} \frac{4}{[A\,\{b\,A\}^\nu]^2}}, \tag{12}$$

где је:

$$g = (a - 1\;\underline{A}^*\,\{b\,\underline{A}\}^\nu) + (0\,A\,\{bA\}^\nu).$$

Према идентичности (13/II) [1] стр. 65, последњи израз добија облик

$$g = a + (0A\,\{bA\}^\nu) - (0\underline{A}\,\{b\,\underline{A}\}^\nu),$$

а затим — према идентичности (15/II) [1], стр. 65 — облик:

$$g = a + (0A) - (0\underline{A}),$$

па је према (7) најзад

$$g = a + \frac{m}{n} = \alpha,$$

те се образац (12) претвара у образац (6).

Пошто за $\nu \to \infty$ и $[A\,\{bA\}^\nu] \to \infty$, то је

$$\lim_{\nu \to \infty} M(\theta_\nu) = \alpha.$$

Од броја $s$ зависи да ли ће се вредности $M(\theta_\nu)$ приближавати броју $\alpha$ само са горње стране или осцилаторно.

Став 4. *Постоји безбројно много рационалних разломљених бројева $\alpha$, већих од 3, таквих да скуп ирационалних бројева $\gamma$, за које је $M(\gamma) = \alpha$ има моћ континуума. Ако је $\alpha$ један такав број, онда исту особину имају и сви бројеви $\alpha + p$, где је $p = 1, 2, 3, \ldots$*

*Ма колики био дати рационалан прави разломак $\frac{m}{n}$, увек се може наћи довољно велики природан број $a$, да рационалан број*

$$\alpha = a + \frac{m}{n}$$

*има особину наведену у првом делу овога става.*

Доказ. За једно дато $\frac{m}{n}$, као у доказу става 3, одредимо комплекс $A$, па затим — према условима (8) — природне бројеве $a$ и $b$. Најзад формирамо ирационалан број:

$$\gamma = (a - 1\;\underline{A}^*\,\{b\underline{A}\}^{k_1}\; a - 1\;\underline{A}^*\,\{b\underline{A}\}^{k_2}\; a - 1\;\underline{A}^*\,\{b\underline{A}\}^{k_3}\; a - 1\;\ldots)$$

где је $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_\nu$, ма који растући бесконачан низ природних бројева. Према обрасцу (2) и условима (8), тада је поуздано:

$$M(\gamma) = a - 1 + (0\,\underline{A}^*\,\overline{b\underline{A}}) + (0\,\overline{Ab}),$$

а одатле према идентичности (13/II), [1], стр. 65:

$$M(\gamma) = a + (0\,\overline{Ab}) - (0\,\overline{\underline{A}b}),$$

затим, према идентичности (16/II) [1[, стр. 65:

$$M(\gamma) = a + (0\,A) - (0\underline{A}),$$

тј.

$$M(\gamma) = a + \frac{m}{n} = \alpha.$$

Ако се још уочи да све речено остаје у важности кад се $a$ замени са $a + p$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ онда је став 4 доказан у целини.

4. У овом одељку дајемо два става који се односе на вредности функције $M(\gamma)$облика $\sqrt{D}$ и $\frac{\sqrt{D}+P}{Q}$ где су $D$, $P$ и $Q$ природни бројеви.

Став 5. *Ако је* $\theta = (\overline{A})$ *чисто периодичан правилни верижни разломак, чија периода* $A = a_1, a_2 \ldots a_{2m}$ *има паран број чланова а усто је* $a_1 \geqslant a_{\nu+2}$, *за* $\nu = 2, 3, \ldots, 2m$, *онда постоји један скуп ирационалних бројева* $\gamma$ *који има моћ континуума, а за које је:*

$$M(\gamma) = M(\theta).$$

*Наведену особину бројева* $\theta$ *имају и сви квадратни корени из целих бројева (који нису потпуни квадрати), а чија периода — кад се развију у правилан верижни разломак — има паран број чланова.*

Доказ. Нека је $A$ уређени комплекс природних бројева дефинисан у ставу 5, па формирајмо ирационалан број

$$\gamma = (A^{k_1}\,b\,A^{k_2}\,b\,A^{k_3}\,b\ldots)$$

где је $k_1, k_2, \ldots, k_\nu \ldots$ ма који растући бесконачан низ природних бројева а $b$ цео број: $a_{2m} < b < a_1$. Тада су поуздано тачке нагомилавања низа $\lambda_\nu$ које су највише десно:

$$\mu_1 = (\overline{A}) + (0\,\overline{\underline{A}})$$

$$\mu_2^{(s)} = (\overline{A}) + (0\,\underline{A}^s\,b\,\overline{\underline{A}})$$

$$\mu_3^{(s)} = (A^s\,b\,\overline{A}) + (0\,\overline{\underline{A}}),$$

где је $s = 0, 1, 3, \ldots$ Али пошто је $b > a_{2m}$, увек је $\mu_2^{(s)} < \mu_1$, а пошто је $b < a_1$, увек је и $\mu_3^{(s)} < \mu_1$, те је $M(\gamma) = \mu_1$. Како је и $M(\theta) = (\bar{A}) + (0\,\underline{\bar{A}}) = \mu_1$ то је први део става 5 доказан.

Нека је даље:

$$\sqrt{D} = (a, \overline{S, 2a}),$$

где је $D$ природан број, а $S = a_1\, a_2 \ldots a_{2k}\, a_{2k+1}\, a_{2k} \ldots a_2\, a_1$ симетрични комплекс природних бројева са непарним бројем чланова. Тада разломак:

$$\theta = (\overline{2a, S})$$

задовољава услове става 5, јер је $a_\nu \leqslant a$ $(\nu = 1, 2 \ldots 2k+1)$ (Perron [4] стр. 94, Satz 14), а како је $M(\theta) = M(\sqrt{D})$ то је и други део става 5 доказан.

Став 6. *Сваки природан број $a \geqslant 4$ је тачка нагомилавања (са обеју страна) вредности функције $M(\gamma)$ које имају особину да скуп бројева $\gamma$, који одговара ма којој таквој вредности има моћ континуума. Те вредности су облика $\dfrac{\sqrt{D} + P}{Q}$, где су $D$, $P$ и $Q$ природни бројеви.*

Доказ. Нека је $A = a_1\, a_2 \ldots a_m$ уређени несиметрични комплекс природних бројева, чији чланови задовољавају услове:

$$a_m \geqslant 2,\ a_\nu \leqslant a - 3 \text{ за } \nu = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Тада формирајмо низ ирационалних бројева

$$\gamma_n = (a - 1\ \underline{A}^*\ \underline{A}^{n-1}\ A^{k_1}\, a - 1\ \underline{A}^*\ \underline{A}^{n-1}\ A^{k_2}\, a - 1\ \underline{A}^*\ \underline{A}^{n-1}\ A^{k_3}\, a - 1 \ldots),$$

где је $n = 1, 2, 3, \ldots$, а $k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots$ ма који растући бесконачан низ природних бројева. Тада је, на основу постављених услова за $a$ и $a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$, поуздано:

$$M(\gamma_n) = (a - 1\ \underline{A}^*\ \underline{A}^{n-1}\ \bar{A}) + (0\ \underline{\bar{A}}).$$

На основу идентичности (13/II) [1] стр. 65, последњи израз постаје:

$$M(\gamma_\nu) = a + (0\underline{\bar{A}}) - (0\underline{A}^n\bar{A}).$$

Апсолутна вредност разлике $(0\underline{\bar{A}}) - (0\underline{A}^n\bar{A})$ опада кад $n$ расте и тежи нули за $n \to \infty$, па је

$$\lim_{n \to \infty} M(\gamma_n) = a.$$

Овим је став 6 доказан. Разликујмо сад два случаја:

a) Нека је $m$ паран број. Тада се $M(\gamma_n)$ приближава броју $a$ само са доње (ако је $a_1 < a_m$) или само за горње стране (ако је $a_1 > a_m$).

b) Ако је $m$ непаран број, онда се чланови низа $M(\gamma_n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ приближавају броју $a$ наизменично са доње и горње стране $(a_1 \neq a_m)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ђерасимовић, Б.: *Једна Диофантова једначина трећег степена*, Весник Друштва математичара и физичара Н.Р.С. V. 3—4 1953.

[2] Markov, A. A.: *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies I.* Math. Ann. Bd. 15 (1879), str. 381—407.

[3] Markov, A. A.: *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies II.* Math. Ann. Bd. 17 (1880), str. 379—400.

[4] Perron, O.: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Stuttgart, 1954, (B. G. Teubner)

[5] Perron, O.: *Über die Approximationen irrationaler Zahlen durch rationale*, I. S. B. der Heidelberger Akad. der Wiss., 1921, Heidelberg.

[6] Perron, O.: *Über die Approximationen irrationaler Zahlen durch rationale*, II. S. B. der Heidelberger Akad. der Wiss., 1921.

[7] Shibata, K.: *On the Order of the Approximation of Irational Numbers by Rational Numbers.* Tohoku Math. J. Bd. 30 (1929) str. 22—50.

# BEITRAG ZUR UNTERSUCHUNG DER PERRON'SCHEN MODULLARFUNKTION $M(\gamma)$ EINER IRRATIONALZAHL*)

von B. DJERASIMOVIĆ, BEOGRAD

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden einzelne Werte sowie auch Häufungspunkte der durch die Gleichung (2) definierten Modularfunktion einer Irrationalzahl untersucht.

Der Verfasser beweist zuerst dass ausser der Zahl 3 auch alle grösseren natürlichen Zahlen Häufungspunkte dieser Funktion sind (Satz 1). Es wird ebenso bewiesen, dass die betrachtete Funktion unendlich viele rationale Häufungspunkte von der Form (5) besitzt, wo $a \geqslant 3$ vom rationalen Bruch $\frac{m}{n}$ abhängig ist (Satz 3). Die Funktion $n(\gamma)$ besitzt unendlich viele Punkte mit folgender Eigenschaft. Für jeden von diesen Punkten existiert eine Menge der Irrationalzahlen von der Mächtigkeit des Kontinuums, die alle dem gleichen Wert der Funktion $M(\gamma)$ entsprechen. Der Verfasser beweist dann dass die gleiche Eigenschaft auch alle rationalen Zahlen aus den Sätzen 1 und 2 (Sätze 2 und 4) besitzen. Weiter beweist er dass diese Eigenschaft auch alle Werte $M(\theta)$ besitzen, wenn $\theta$ die Bedingungen des Satzes 5 befriedigenden quadratischen Irrationalzahlen sind. Unter diesen befinden sich ebenfalls alle Quadratwurzeln aus den natürlichen Zahlen deren Periode eine gerade Anzahl von Gliedern aufweist.

Zuletzt der Satz 6 besagt dass alle natürlichen Zahlen $a \geqslant 4$ Häufungspunkte von Punkten sind welche vorhin angegebene Eigenschaft besitzen.

*) Communiqué au II Congrès des mathématiciens et physiciens de la R.F.P. de Yougoslavie à Zagreb (4—9 octobre 1954).