## Werk

**Label:** Article

**Jahr:** 1953

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?311570321_0005|log37

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

# QUELQUES PROPRIÉTÉS D'UNE MATRICE CARRÉE SPÉCIALE

par D. MARKOVITCH, Beograd

On recontre souvent un type des matrices carrées de forme speciales qui possèdent les propriétés interessantes. La matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-2} & a_{p-1} \end{bmatrix}$$

est associée ordinairement à son polynome caractéristique et à ses zèros. Voir par ex: Sam Perlis [1], Maurice Parodi [2], Turnbull and Aitken [3]. De même, la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_q \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{q-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_1 \end{bmatrix}$$

et ses puissances postives, liées par une relation récurrente avec une matrice initiale, déterminent dans une forme matricielle les relations récurrentes entre les coefficients du développement d'une fonction rationelle en une série entiére (Polyà und Szegö [4]).

Nous allons aussi dans cet article montrer quelques propriétés d'une matrice carrée spéciale de forme semblable, à savoir

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{m-2} & a_{m-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $A$ sera considérée directement, telle quelle s'est apparue en développant un procédé itératif sur une équation algébrique.

1. *Un procédé itératif.* Soit

(1) $$1 = a_0 x + a_1 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^m \, (a_{m-1} \neq 0)$$

une équation algébrique, $x$ étant un des ses zéros, et les coefficients $a_\nu$ quelques nombres non-négatifs. Equation 1) écrite sous la forme

(2) $$1 = x\,(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{m-1} x^{m-1})$$

devient

(3) $$1 = x^2\,(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{m-1} x^{m-1})$$

lorsqu'on y remplace $a_0$ par

$$a_0 = a_0^2 x + a_0 a_1 x^2 + \ldots + a_0 a_{m-1} x^m.$$

Il est evident que

$$b_\nu = a_0 a_\nu + a_{\nu+1}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \quad m - 1 \, (a_m \equiv 0).$$

La même procédé peut être appliqué et à l'équation (3), c'est à dire $b_0$, exprimé par

$$b_0 = a_0 b_0 x + a_1 b_0 x^2 + \ldots + a_{m-1} b_0 x^m$$

et remplacé dans 3), donne

(4) $$1 = x^3\,(c_0 + c_1 x + \ldots + c_{m-1} x^{m-1})$$

où

$$c_\nu = b_0 a_\nu + b_{\nu+1}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \quad m - 1 \, (b_m \equiv 0),$$

et ainsi de suite.

Le procédé indiqué nous fournira une suite d'égalités

$$1 = x \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu x^\nu = x^2 \sum_{\nu=0}^{m-1} b_\nu x^\nu = \ldots = x^n \sum_{\nu=0}^{m-1} n_\nu x^\nu = \ldots$$

En introduisant une notation plus commode,

$$a_\nu = a_\nu(1), \quad b_\nu = a_\nu(2), \ldots, \quad n_\nu = a_\nu(n), \ldots$$

la suite d'égalités précédentes devient

(5) $$1 = x^n \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu(n)\, x^\nu, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ce que veut dire que les coefficients $a_\nu(n)$ sont aussi des fonctions du rang $n$.

2. *Les relations récurrentes entre les coefficients* $a_\nu$.

La loi de formation des coefficients était déjà indiquée en formant $b_\nu$ et $c_\nu$. Démontrons que cette loi est valable en général. Soit

$$x^n \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu(n)\, x^\nu = x^{n+1} \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu(n+1)\, x^\nu. \tag{6}$$

Exprimons $a_0(n)$ par

$$a_0(n) = \sum_{\nu=0}^{m-1} a_0(n)\, a_\nu\, x^{\nu+1}$$

et en l'introduisant dans (6), il vient

$$x^n \left\{ a_0(n) + \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu(n)\, x^\nu \right\} = x^n \left\{ \sum_{\nu=0}^{m-1} a_0(n)\, a_\nu\, x^{\nu+1} + \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu(n)\, x^\nu \right\} =$$

$$= x^n \left\{ \sum_{\nu=0}^{m-1} a_0(n)\, a_\nu\, x^{\nu+1} + \sum_{\nu=0}^{m-1} a_{\nu+1}(n)\, x^{\nu+1} \right\} = x^{n+1} \sum_{\nu=0}^{m-1} [a_0(n)\, a_\nu + a_{\nu+1}(n)]\, x^\nu,$$

avec $a_m(n) \equiv 0$.

En comparant avec l'égalité (6), il suit

$$a_\nu(n+1) = a_0(n)\, a_\nu + a_{\nu+1} \tag{7}$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots m-1 \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

On déduit facilement des relations (7) les relations suivantes

$$a_k(n) = \sum_{\nu=k}^{m-1} a_\nu\, a_0(n-\nu+k-1), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \tag{8}$$

en exprimant ainsi $a_k(n)$ linéairement par $a_0(n-p)$.

3. *Relations entre les coefficients* $a_\nu(n)$ *en forme matricielle.*

La suite (1,5) montre que $x$ peut être écrit comme

$$x = \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu(n)\, x^\nu \Big/ \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu(n+1)\, x^\nu. \tag{9}$$

Ecrivons en forme matricielle

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu(n)\, x^\nu = [a_0(n)\ a_1(n) \ldots a_{m-1}(n)] \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{m-1} \end{bmatrix},$$

et la transformons au moyen de

$$1 = \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu x^\nu \Big/ \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu x^\nu, \quad x^k = x^{k-1} \Big/ \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu x^\nu, \; k = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Il vient,

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu(n) x^\nu = \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu x^\nu} [a_0(n)\, a_1(n) \ldots a_{m-1}(n)] \begin{bmatrix} \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu x^\nu \\ 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{m-2} \end{bmatrix} =$$

$$= x\,[a_0(n)\;\; a_1(n) \ldots a_{m-1}(n)] \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{m-2} & a_{m-1} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{m-1} \end{bmatrix},$$

d'ou en comparaison avec (9), il suit

$$[a_0(n+1)\;\; a_1(n+1) \ldots a_{m-1}(n+1)] =$$

$$(10) \qquad = [a(n)\;\; a_1(n) \ldots (a_{m-1}(n)] \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{m-2} & a_{m-1} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est de même

$$\begin{bmatrix} n_0(n-1) & a_1(n-1) \ldots a_{m-1}(n-1) \\ a_0(n) & a_1(n) \quad \ldots a_{m-1}(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{m-2} & a_{m-1} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_0(n) & a_1(n) & \ldots & a_{m-1}(n) \\ a_0(n+1) & a_1(n+1) & \ldots & a_{m-1}(n+1) \end{bmatrix},$$

et en général

$$(11) \qquad A_{n+1} = A_n A,$$

où

$$A_1 = A = \begin{bmatrix} a_0\, a_1 & \ldots & a_{m-2}\, a_{m-1} \\ 1\ 0 & \ldots\ 0 & 0 \\ .\ . & \ldots\ . & 0 \\ 0\ 0 & \ldots\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_s = \begin{bmatrix} a_0(s) & a_1(s) & \ldots\ a_{m-1}(s) \\ a_0(s-1) & a_1(s-1) & \ldots\ a_{m-1}(s-1) \\ . \quad . \quad . & . & \ldots \quad . \quad . \\ a_0(s-m-1) & a_1(s-m-1) & \ldots\ a_{m-1}(s-m-1) \end{bmatrix},$$

en exprimant par là la liaison entre deux, respectivement $m$, suites successives des coefficients $a_\nu(n)$. Remarquons que, conformément aux conditions initiales déterminées pour les relations (8), il suit

$$a_\nu(1) = a_\nu,\ a_\nu(-p) = \begin{cases} 1\ si\ \nu = p \\ 0\ si\ \nu \neq p \end{cases}$$

$$p = 0, 1, 2, \ldots, m-2 \text{ et } \nu = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

En dêveloppant la relation récurrente (11) on obtiendra

$$A_n = A_1^{n-1} A = A^n,$$

ou

$$\begin{bmatrix} a_0\, a_1 & \ldots & a_{m-2}\, a_{m-1} \\ 1\ 0 & \ldots\ 0 & 0 \\ .\ . & \ldots\ . & . \\ 0\ 0 & \ldots\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n =$$

(12)

$$= \begin{bmatrix} a_0(n) & a_1(n) & \ldots\ a(n) \\ a_0(n-1) & a_1(n-1) & \ldots\ a_{m-1}(n-1) \\ . & . & \ldots \quad . \\ a_0(n-m+1) & a_1(n-m+1) & \ldots\ a_{m-1}(n-m+1) \end{bmatrix}$$

4. *Une forme limite de la matrice A.* En profitant le résultat (3,12) et en lui associant la formule connue de Daniel Bernoulli sur la valeur du zéro de plus petit module d'une équation algébrique, nous allons prouver:

*Soit $x_0$ zéro positif de l'équation*

$$1 - a_0 x - a_1 x^2 - \ldots - a_{m-1} x^m = 0$$

*alors*

$$(13)\qquad \frac{1}{a_0(n)} A^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & P_{m-1} & \dots & P_1 \\ x_0 & x_0 P_{m-1} & \dots & x_0 P_1 \\ \vdots & \cdot & \dots & \cdot \\ x_0^{m-1} & x_0^{m-1} P_{m-1} & \dots & x_0^{m-1} P_1 \end{bmatrix},$$

*où* $P_{m-k}$ *désigne*

$$P_{m-k} = \sum_{\nu=k}^{m-1} a_\nu x_0^{\nu+1-k}.$$

En effet, la formule de Bernoulli donne

$$\frac{a_0(n-1)}{a(n)} \underset{n\to\infty}{\to} x_0,$$

et puisque

$$\frac{a_0(n-k)}{a_0(n)} = \frac{a_0(n-k)}{a_0(n-k+1)} \cdot \frac{a_0(n-k+1)}{a_0(n-k+2)} \cdots \frac{a_0(n-1)}{a_0(n)},$$

de même

$$\frac{a_0(n-k)}{a_0(n)} \underset{n\to\infty}{\to} x_0^k.$$

Des relations (8) il suivra

$$\frac{a_k(n)}{a_0(n)} = \sum_{\nu=k}^{m-1} a_\nu \frac{a_0(n+k-\nu-1)}{a_0(n)},$$

d'où

$$(15)\qquad \frac{a_k(n)}{a_0(n)} \to \sum_{n=k}^{m-1} a_\nu x_0^{\nu+1-k} \underset{n\to\infty}{=} P_{m-k}, \quad \frac{a_{m-1}(n)}{a_0(n)} \underset{n\to\infty}{\to} a_{m-1} x_0 = P_1.$$

Enfin, si l'on divise la matrice $A_n$ dans (12) par $a_0(n)$ et on applique les formules (13) et (14), on obtiendra immédiatement la forme llmite (13). Comme on voit la matrice limite dans (13) est une matrice singulière.

## RÉFÉRENCES


[1] Sam Perlis: *Theory of matrices* (1952), p. 148.

[2] Maurice Parodi: *Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des matrices carrées*, Mémorial des siences mathématiques (1952), F. CXVIII. p. 31.

[3] Turnbull and Aitken: *An introduction to the theory of canonical matrices*, (1948), p. 49.

[4] Polyà und Szegö: *Aufgaben und Lehrsätze II*, S. 105, VII Abschn. § 2, Nr. 32.

# НЕКЕ ОСОБИНЕ ЈЕДНЕ СПЕЦИЈАЛНЕ КВАДРАТНЕ МАТРИЦЕ

ДРАГОЉУБ МАРКОВИЋ, Београд

## Садржај

У овом раду преко једног итеративног поступка (т. 1.) и особина коефицијената $a_\nu(n)$ (обрасци (7) и (8) као и (10) и (11)) долазим најпре до обрасца (12). Њиме је изражен макоји цео и позитиван степен матрице $A$ (11) једном матрицом чији су елементи коефицијенти $a_\nu(n)$. Матрица А игра овде значајну улогу у формирању коефицијената $a_\nu(n)$, и јавља се као нека врста „матрице генератрисе". Користећи такву особину матрице $A$ (12), као и методу Daniel Bernoulli-а за решавање алгебарских једиачина (обрасци (14) и (15)), исказујем резултат:

*Ако се са $x_0$ означи позитиван корен једначине* (1), *онда гранични облик $A^n/a_0(n)$ матрице $A$, кад $n \to \infty$ тежи матрици облика исказаног у* (13).

Као што се види тај гранични облик претставља једну сингуларну квадратну матрицу.