Werk

Label: Article

Jahr: 1953

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?311570321_0005|log34

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

SUR LES POLYTOPES

Par G. KUREPA. Zagreb

1. On sait que dans chaque polyèdre simple le nombre de ses arêtes dépasse aussi bien le nombre de ses sommets que le nombre de ses faces. Dans ce que suit nous allons démontrer un théorème analogue pour un simplexe quelconque situé dans un espace euclidien. La question est intimement lié à l'étude des ensembles ordonnés (partiellement) et à celle des transformations multivoques. En conséquence, on a les théorèmes 2.1, 3.1, 3.2, 3.3 du domaine des ensembles ordonnés et le théorème 4.1 du domaine des transformations. Soit n un entier >0; designons par $I(n)$ l'intervalle des nombres

(1) $$\geqslant 0 \text{ et } < n; \quad \text{donc } k\,I(n) = n$$

$k\,X$ désignant le cardinal de X. Désignons par

(2) $$P(n)$$

l'ensemble composé de tous les sousensembles $\subseteq I(n)$, l'ensemble vide

(3) $$v$$

et l'ensemble $I(n)$ lui-meme y étant compris.

2. Le nombre γE. Ensembles $R_\alpha E$.

Comme d'habitude, pour un ensemble ordonné E nous désignons par

(1) $$R_0 E \text{ ou par } R_0$$

l' ensemble de tous les points initiaux de E; par récurrence, on pose

(2) $$R_\alpha E = R_0\left(E \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} R_\xi E\right) = R\alpha$$

pour chaque ordinal α. Le premier ordinal α pour lequel $R_\alpha E =$ vide v, sera noté

(3) $$\gamma E .$$

Évidemment, l'ordinal γE et les ensembles $R_\alpha E$ $(\alpha < \gamma E)$ sont bien determinés. Chacun des ensembles (2) est une antichaîne de E mais dans le cas général $R_\alpha E$ n'est pas une antichaîne maximale de E puisque, d'ordinaire, il y aura au moins un point de E qui n'est comparable à aucun élément de $R_\alpha E$. Dans le cas particulier de l'ensemble ordonné $P(n)$, la chose se simplifie considérablement. Ainsi $R_0 P(n) = R_0$ se compose de l'ensemble vide $\{v\}$; $R_1 P(n) = R_1$ se compose des sommets du simplexe $P(n)$; les arêtes de $P(n)$ constituent $R_2 P(n)$ etc. $\gamma P(n) = n+1$;

$Rn\,P(n)$ est constitué de $J(n)$. Ainsi donc l'ensemble $P(n)$ est ordonné — partiellement, bien entendu!

Alors la question qui se pose c'est de déterminer l'ensemble composé d'un nombre maximum de faces de $P(n)$ deux à deux nonincidentes c'est-à-dire deux à deux incomparables. Dans le langage des ensembles ordonnés, il s'agit donc de déterminer la ou les antichaînes maximales de $P(n)$ et en particulier celles qui possèdent au moins autant d'éléments qu'en possède une autre antichaîne quelconque. Par exemple, pour chaque $\alpha < n$ l'ensemble R_α est une antichaîne maximale mais celle dont le nombre d'éléments est le plus grand c'est l'ensemble R_α pour $\alpha = \left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right]$ désignant l'entier le plus grand $\leqslant \frac{n}{2}$ (*cf.* T. 2.1, T. 3.2).

Lemme 2.1 *L'ensemble* $P(n) \equiv (P(n); \subseteq)$ *est semblable à son dual* $(P(n); \supseteq)$.

C'est que le passage d'un $X \in P(n)$ à son complémentaire X' est une opération biunnivoque telle que si $X \subset Y$ alors $X' \supset Y'$; l'opération est une similitude entre $(P(n); \supseteq)$ et $P(n); \subseteq)$. Par exemple, pour le tétraèdre 1, 2, 3, 4 on a le réseau suivant. En le regardant du bas vers le haut ou dans la direction opposée, on obtient dans les deux cas, des ensembles semblables.

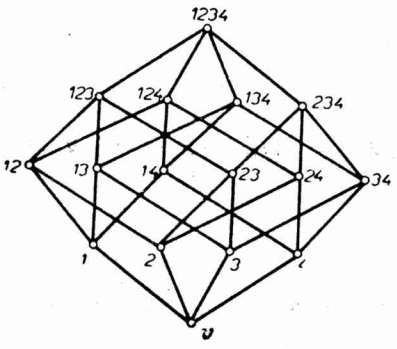

Fig. 1

Lemme 2.2. *Pour chaque ordinal* $\alpha \leqslant n$ on $a\,k R_\alpha P(n) = \binom{n}{\alpha}$ = *le nombre de parties* $\subseteq J(n)$ *dont chacune possède* α *éléments.*

Lemme 2.3 *Pour chaque ordinal* $\alpha \leqslant n$ *l'ensemble* R_α *est une antichaîne maximale.*

On sait que le nombre $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$ est le plus grand dans la suite des nombres $\binom{n}{\alpha}$ $(\alpha < n)$. On pourrait donc s'attendre à ce que l'antichaîne $R_{[\frac{n}{2}]}$ soit celle qu'on cherche. C'est bien ainsi comme le dit le

Théorème 2.1 *Quel que soit l'entier positif* $n > 0$ *l'ensemble* $R_{[\frac{n}{2}]}\,P_{(n)}$ *est une antichaîne maximale de* $P_{(n)}$ *et verifie*

(x) $$k\,R_{[\frac{n}{2}]} \geqslant k\,A$$

quelle que soit l'antichaîne maximale $A \neq R_{[\frac{n}{2}]}$. *Le signe d'égalité y a lieu*

dans le cas et seulement dans le cas où n est impair; dans ce cas $k R_{[\frac{n}{2}]} = k R_{[\frac{n}{2}]+1}$.

Mais la chose n'est pas évidente puisque une antichaîne maximale n'est pas nécessairement située dans l'un des ensembles R_a ($\alpha < n$). Ainsi, par exemple, dans le cas du tétraèdre on a aussi l'antichaîne maximale que voici: $\{1, \{2\ 3\}, 4\}$.

3. *Démonstration du théorème* 2.1. Prouvons d'abord le lemme que voici:

Lemme 3.1 *Soient A une antichaîne d'un ensemble ordonné E et* α *l'ordinal tel que*

$$A \cap R_\alpha E \neq v \text{ et, si } 0 < \alpha, \tag{1}$$

$$A \cap R_\xi E = v \ (\xi < \alpha);$$

alors l'ensemble

$$A \setminus R_\alpha E \tag{2}$$

est disjoint de l'ensemble

$$\bigcup_x R_0 (x, \cdot)_E \ (x \in A \cap R_\xi E). \tag{3}$$

L'ensemble (2) $\cup$ (3) *c'est -à- dire l'union des ensembles* (2) *et* (3) *est une antichaîne de E. De plus, si pour chaque* $x \in A \cap R_0 E$ *l'ensemble* $R_0 (x;)_S$ *est une antichaîne maximale de* $[x, \cdot)_S$, *alors* (2) $\cup$ (3)] *est une antichaîne maximale de E.*

Tout d'abord, les ensembles (2), (3) sont sans aucun point commun. Dans le cas contraire, on aurait un $y \in (2) \cap (3)$; en particulier, $y \in (3)$ et puisque A est disjoint des ensembles $R_\xi E$ ($\xi \leqslant \alpha$), on aurait nécessairement un point $x \in A \cap R_\alpha E$ vérifiant $x < y$, contrairement à ce que $\{x, y\}$, comme partie de l'antichaîne E, est aussi une antichaîne. Pour la même raison, chaque élément de (2) est incomparable à chaque element de (3). D'autre part, chacun des ensembles (2), (3) étant une antichaîne de E, on en conclut bien que l'ensemble (2) $\cup$ (3) est une antichaîne. Prouvons encore le reste du lemme: si pour chaque $x \in A \cap R_\alpha E$ l'ensemble $R_0 (x, \cdot)_E$ est une antichaîne maximale de $(x, \cdot)_E$, alors chaque point $e \in E$ est comparable à un point $e_0 \in (2) \cup (3)$. Or, A étant une antichaîne maximale de E, il y a un point $e_1 \in A$ tel que e soit comparable à e_1. Si $e_1 \in (3)$, il suffit de poser $e_1 = e_0$. Reste le cas où $e_1 \in A \cap R_\alpha E$. Si de plus $e \leqslant e_1$, il suffit de considérer un élément quelconque $e_0 \in R_0 (e_1, \cdot)$. Un tel e_0 existe, $R_0 (e_1, \cdot)$ contenant, par hypothèse, un élément comparable à e_1. Pour la même raison, un pareil e_0 existe aussi dans le cas où $e_1 < e$. Ainsi le lemme 3.1 est complètement démontré.

Passons maintenant à la démonstration du T. 2.1.

L'idée de la démonstration sera celle-ci: A étant une antichaîne maximale de $P(n)$, on en déduira une autre A^1 telle que $kA^1 \geqslant kA$ et que

A^1 soit disjoint des rangées R_ξ pour les ξ assez éloignés du nombre $\left[\frac{n}{2}\right]$. Soit donc A une antichaîne maximale de $P(n)$. Si $A \cap R_0 \neq v$, alors nécessairement $A = \{v\}$; il suffit de considérer l'ensemble $A^1 = R_1$, pour se rendre compte que A^1 est encore une antichaîne maximale; or $k'R_1 = n$ donc $kA^1 > kA$. Ainsi donc on peut supposer que $A \cap R_0' = v$; dualement, on peut supposer également que $A \cap R = v$, c'est-à-dire que A soit disjoint de R_0, R_n et donc situé dans l'ensemble $\bigcup_\xi R_\xi (0 < \xi < n)$.

Ceci étant, supposons que $A \cap R_1 \neq v$; puisque

$$A = (A \cap R_1) \cup (A \setminus R_1)$$

nous y remplacerons l'ensemble $A \cap R_1$ par l'union des successeurs de ses points:

$$A^1 = \bigcup_x R_0(x, \cdot) \quad \cup (A \setminus R_1) \quad (x \in A \cap R_1).$$

D'après le lemme 3.1, l'ensemble A^1 est une anti-chaîne maximale de $P(n)$.

Prouvons que

(4) $$kA^1 > kA.$$

La relation est une conséquence de ce que

(5) $$k(A \cap R_1) < k \bigcup_x R_0(x, \cdot) \quad (x \in A \cap R_1).$$

Or, si $A \cap R_1 = A$ c'est-à-dire si $A \setminus R_1 = v$, on aura $A^1 = R_2$ et la formule $kR_1 = \binom{n}{1}$, $kR_2 = \binom{n}{2}$ implique l'inégalité (4). Si par contre $A \setminus R_1 \neq v$, soit $b \in A \setminus R_1$; b contient au moins deux points de R_1 donc $k(A \cap R_1) \leqslant n - kb \leqslant n - 2$. Or, pour chaque $x \in R_1$ on a $kR_0(x, \cdot) = n - 1$; $R_0(x, \cdot)$ est constitué des „arêtes"

$$\{x, y\} \ (y \in I(n) \setminus (x)).$$

Donc

$$k \bigcup_x R_0(x, \cdot) \geqslant n - 1 > n - 2 \geqslant k(A \cap R_1).$$

Ainsi donc, l'antichaîne $A \subseteq \bigcup_\xi R_\xi$ $(0 < \xi < n)$ vérifiant $A \cap R_1 \neq v$, peut être remplacée par l'ensemble A^1 de tout à l'heure: A_1 sera une antichaîne maximale ayant plus d'éléments que A et vérifiant, de plus, la condition $A^1 \cap R_1 = v$. Donc pour notre but on peut supposer que $A \cap R_1 = v$; à cause de dualité de $P(n)$ on peut supposer également que $A \cap R_{n-1} \neq v$.

Ceci étant, soit $i < \left[\frac{n}{2}\right]$ et supposons que A soit une antichaîne maximale de $P(n)$ tel que

(6) $$A \subseteq \bigcup_\xi R_\xi \quad (n \leqslant \xi \leqslant n \quad i)$$

et que

$$A \cap R_i \neq v. \tag{7}$$

Nous allons en déduire une autre antichaîne maximale A^i encore plus nombreuse. Il suffit de poser

$$A^i = (A \setminus R_i) \cup \bigcup_x R_0(x, \cdot) \quad (x \in (7)). \tag{8}$$

D'après le lemme 3.1 l'ensemble A^i est une antichaîne maximale de $P(n)$, est disjoint des esembles $R_\xi P(n)$ $(\xi \leqslant i)$. Prouvons encore que

$$k A^i > k A\,. \tag{9}$$

Les deux ensembles du second coté de (8) étant disjoint, l'inégalité (9) rèsulte de ce que le cardinal de (7) est inférieur à celui de l'ensemble constituant la seconde partie de l'ensemble $(8)_2$. Or, pour prouver ceci, prouvons le lemme suivant intéressant par lui-même:

Lemme: 3.2 *Soit* $0 < i < \left[\frac{n}{2}\right]$; *soit* F_i *une famille non vide quelconque* $\subseteq R_i(n)$; *en posant*

$$F^i = \bigcup_x R_0(x, \cdot) \quad (x \in F_i), \tag{10}$$

on aura $F^i \subseteq R_{i+1}(n)$ *et*

$$k F_i < k F^i. \tag{11}$$

Tout d'abord, si $F_i = R_i(n)$, on aura évidemment $F^i = R_{i+1}(n)$ et la formule (11) s'énonce par l'inégalité $\binom{n}{i+1} > \binom{n}{i}$ (*cf.* L. 2.2). Reste le cas où $F_i \subset R_i(n)$; pour simplifier, posons

$$f_i = k F_i.$$

Si $i = 1$, F_1 se compose de f_1 sommets; F^1 se compose: de $\binom{f_1}{2}$ arêtes dont les deux extrémités appartiennent à F_1 et de f_1 $(n - f_1)$ arêtes dont l'une extrémité est dans F_i et l'autre dans l'ensemble complémentaire (se composant de $n - f_1$ points). Si $i > 1$, soit $M = \bigcup_x x$ $(x \in F_i)$ et $M' = I(n) \setminus M$. Alors F^i consiste des ensembles X vérifiant $kX = i + 1$ et $k(X \cap M') \leqslant 1$; le nombre des $X \subseteq M$ est donc $\binom{kM}{i+1}$ et le nombre des autres X est $\binom{kM}{i} \cdot (n - k)$; c'est que les X de la dernière cathégorie s'obtiennent en

[1]) $(8)_2$ dénote la seconde partie de la relation (8).

adjoignant à chaque ensemble de i point de M un élément de $I(n) \setminus M$; puisque aux choix distincts correspondent des X deux à deux distincts, on a donc

$$kF^i = \binom{kM}{i+1} + \binom{kM}{i}(n - kM). \tag{12}$$

Notons que

$$kF_i \leqslant \binom{kM}{i}. \tag{13}$$

Ceci étant, l'inégalité (11) se démontre de la façon suivante: si $n - kM = 0$ c'est-à-dire si $M = I(n)$, alors $kF^i = \binom{n}{i+1}$ et (11) provient de ce que $\binom{n}{i} < \binom{n}{i+1}$ pour $i < \left[\frac{n}{2}\right]$. Si, par contre, $kM < n$, alors (11) résulte immédiatement de ce que, d'après (12), $kF^i > \binom{kM}{i}$, ce qui, d'après (13), est $\geqslant kF_i$. Ainsi donc le lemme 3.2 est complètement démotré.

Dans le cas de l'ensemble $P(2n+1)$ la démonstration précédente s'applique encore pour le cas $i = n$ ce qui nous fournit le

Lemme 3.3. *Si* $F_n \subset R_n(2n+1)$ *(donc* $F_n \neq R_n(2n+1)$*) alors, en posant*

$$F^n = \bigcup_x R_0(x, \cdot) \quad (x \in F_n)$$

on aura

$$kF_n < kF^n, \quad F^n \subseteq R_{n+1}(2n+1).$$

Ainsi donc on a prouvé le théorème 2.1 aussi bien que celui-ci:

Théorème 3.1. *Soit n un nombre naturel quelconque; alors l'ensemble $R_n(2n)$ des sous-ensembles $X \subseteq T(2n)$ vérifiant $kX = n$ est constitué des éléments deux à deux incomparables; pour n'importe lequel autre ensemble pareil $A \subseteq P(2n)$, on a $kA < kR_n = \binom{2n}{n}$; dans le cas de l'ensemble $P(2n+1)$ la même propriété appartient à l'ensemble $R_n(2n+1)$ aussi bien qu'à l'ensemble $R_{n+1}(2n+1)$. En particulier, si une antichaîne $A \subseteq P(n)$ possède au moins deux éléments (faces) de dimensions distinctes c'est — à-dire si A est nondisjoint d'au moins deux des ensembles $R_\xi P(n)$ $(\xi < \gamma P(n))$, on a nécessairement*

$$kA < \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Cela se produit même si $A \subseteq R(2n+1) \cup R(2n+1)$. Autrement dit, l'ensemble $R_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ des faces de dimension $\left[\frac{n}{2}\right] - 1$ du simplexe $I(n)$ est le nombre maximum absolu de faces deux à deux nonicidentes.

Ainsi donc en nous servant du langage géométrique nous avons le

Théorème 3.2. *Soit* $A \subseteq P(n)$ *une antichaîne de* $P(n)$ *telle que* $k\,A \geqslant k\,X$ *pour chaque antichaine* X *de* $P(n)$*; alors si* $a, b, b \in A$, *on aura* $\dim a = \dim b$.

4. *Un théorème sur les correspondances multivoques.* Dans la démonstration des thêorèmes précédents on se servait du lemme 3.3. Or, celui-ci est un cas particulier d'une proposition intéressante et que voici:

Théorème 4.1. *Soient* A, B *deux ensembles finis et* f *une transformation de* A *sur* B *et du type* (r, s) *c'est-à-dire, par le procédé* f *on fait correspondre à tout* $x \in A$ *un ensemble* $f(x) \subseteq B$ *vérifiant* $k\,f(x) = r$ *et* $f^{-1}(y) \subseteq A$, $k\,f^{-1}(y) = s (y \in B = f\,A)$. *Alors*

$$r\,k\,A = s\,k\,B. \tag{1}$$

Donc si $r \lessgtr s$, *alors* $k\,A \gtrless k\,B$, *et ce versa.*

En effet, considérons pour chaque $x \in A$ l'ensemble A_x des $\{x, x'\}$ $\{x' \in f(x)\}$; de même, pour chaque $y \in B = f\,A = \bigcup_{x \in A} f(x)$, considérons l'ensemble B_y des $\{y, y'\}$ $(y' \in f^{-1}{}_{(y)})$.

Evidemment, $k\,A_x = v$, $k\,B_y = s$; les ensembles $A_x\,(x \in A)$ sont deux à deux disjoints; dès lors

$$r\,k\,A = k \bigcup A_x\,(x \in A). \tag{2}$$

De même, les ensembles $B_y\,(y \in B)$ sont deux à deux disjoints, donc

$$s\,k\,B = k \bigcup_y B_y\,(y \in B). \tag{3}$$

Or, manifestement, les ensembles $(2)_2$, $(3)_2$ sont identiques; dès lors (2) et (3) entrainent (1). C. q. f. d.

C'est en se servant du théorème 4.1 qu'on abordera dans un autre travail le problème de déterminer les antichaînes absolument maximales $\subseteq [K]$, K etant un complexe, $[K]$ désignant l'ensemble ordonné par $\subseteq$ de toutes les faces de K. Nous y donnerons également des extensions du théorème 4.1.

Institut de Mathématiques, Zagreb, Yougoslavie

BIBLIOGRAPHIE

G. Kurepa, Teorija skupova (Théorie des ensembles), Zagreb 1951, 22 + 444.