Werk

Label: Article

Jahr: 1949

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?311570321_0001|log19

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

О ЈЕДНОМ ИСТОРИСКОМ ОБРАСЦУ ЗА КВАДРАТНИ КОРЕН НЕКОГ БРОЈА

ДРАГОЉУБ МАРКОВИЋ

Увод. — У Енциклопедији математичких наука[1]) а на месту званом „Јавна трибина“ у неколико краћих написа расправљали су два математичара M. Lerch и G. Enestrőm о исправности једног обрасца, који даје приближну вредност за квадратни корен неког броја, а који је нађен у списима арабљанског математичара Alkarkhi-a. Образац о коме је реч гласи

$$\sqrt{N} \approx a + \frac{N-a^2}{2a+1}, \tag{1}$$

при чему N значи позитиван број* из којег треба извући квадратни корен, а a други позитиван број* такав да је

$$a^2 < N < (a+1)^2,$$

Пошто се они нису сложили у томе, да је тај образац баш таквог облика, као што је горе наведен, већ друкчији, почели су наводити друге приближне обрасце, тврдећи за њих да су више вероватни од других. Расправа је изгубила првобитни историски карактер и претворила се у полемику о „тачности“ и „нетачности“ појединих образаца,

Обрасци који су, поред наведеног били предмет дискусије су ови[3]):

$$\sqrt{N} \approx a + \frac{N-a^2}{2a} \tag{2}$$

$$\sqrt{N} \approx a + \frac{N-a^2}{2a + \dfrac{N-a^2}{2a}} \tag{3}$$

$$\sqrt{N} \approx a + \frac{N-a^2}{2a} - \frac{\left(\dfrac{N-a^2}{2a}\right)^2}{2\left(a + \dfrac{N-a^2}{2a}\right)} \tag{4}$$

$$\sqrt{N} \approx a + \frac{N-a^2+1}{2(a+1)} \tag{5}$$

---

[1]) Encyclopedie des sciences mathematiques (француско издање), листови уметнути између стр. 480 и 481.

[2]) Tribune publique 9.

*) Може се ограничити само на цео број.

[3]) Enestrőm наводи да се обр. (1) налази код Alkarkhi-a († 1300 г.) а обр. (4) код арабљанског математичара El-Hasssar-a (12 век), а у Европи код Leonard-a из Пизе (13 век).

Пошто ова полемика (према подацима којима сам располагао) није окончана, а с обзиром и на то на то да није вођена на математички убедљив начин, већ су као средства за доказивање била употребљавана само два бројна примера, држим да је од интереса ако прикажем једно математичко излагање овога проблема, које ће не само показати заједничко порекло последња четири, већ узајамним упоређивањем одредити и ранг тачности.

Постанак и упоређење образаца

Образац (1) је врло једноставан и да се објаснити на тај начин, што се лук параболе

$$x=\sqrt{N}$$

може заменити тетивом између тачака $M_1(a^2, a)$ и $M_2((a+1)^2, a+1)$. Уместо ординате $\sqrt{N}$ узима се мања вредност т.ј. ордината праве повучене између тачака M_1 и M_2. Образац (1) проистиче као резултат линеарне интерполације, као што то примећује Enestrőm. Дакле је једначина тетиве

$$y-a=\frac{1}{2a+1}(x-a^2)$$

одакле се решавањем по y добија обр. (1) кад се стави $x=N$.

Обрасци (2), (3), (4) и (5) истога су порекла и могу се објаснити на овај елементаран начин.

Квадратни корен x неког броја N може бити написан у идентичном облику

$$x=\frac{N+\lambda x}{\lambda+x}, \tag{6}$$

где λ претставља неки реалан број $\lambda \geqslant 0$. Поступном итерацијом идентичност (6) може бити претворена у ова три облика:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2\lambda N+(N+\lambda^2)x}{N+\lambda^2+2\lambda x} \\ x=\dfrac{N^2+3\lambda^2 N+(3\lambda N+\lambda^3)x}{\lambda^3+3\lambda N+(N+3\lambda^2)x} \\ x=\dfrac{4\lambda N(N+\lambda^2)+(\lambda^4+6\lambda^2 N+N^2)x}{\lambda^4+6\lambda^2 N+N^2+4\lambda(N+\lambda^2)x} \end{cases} \tag{7}$$

Кад се у њима стави $\lambda=a$, и примени правило да се израз

$$\frac{m+nx}{p+qx}$$

за позитивне вредности m, n, p, q и x налази између највеће и најмање вредности количника $\frac{m}{p}$ и $\frac{n}{q}$, и добиће се овај низ неједначина:

$$(8)\qquad \begin{cases} \sqrt{N} < \dfrac{N+a^2}{2a} = a + \dfrac{N-a^2}{2a} \\ \sqrt{N} > \dfrac{3aN+a^3}{N+3a^2} = a + \dfrac{N-a^2}{2a+\dfrac{N-a^2}{2a}} \\ \sqrt{N} < \dfrac{a^4+6a^2N+N^2}{4a(N+a^2)} = a + \dfrac{N-a^2}{2a} - \dfrac{\left(\dfrac{N-a^2}{2a}\right)^2}{2\left(a+\dfrac{N-a^2}{2a}\right)} \end{cases}$$

Неједначине (8) нису ништа друго но изрази за приближне обрасце (2), (3) и (4). Да би се упоредио ступањ тачности, требало би за сваку од неједначина (8) узети и другу границу размака (доњу, односно горњу) и одузимањем наћи ширине Δ_1, Δ_2 и Δ_3. Кад се ово уради, добиће се под претпоставком $N > a^2$ да је

$$(9)\qquad \Delta_1 > \Delta_2 > \Delta_3,$$

што је доказ да се размак сужава.

Стави ли се у прву од идентичности (7) $\lambda = a+1$ (горњи крај интервала) и примени наведена особина количника линеарних функција, добиће се

$$(10)\qquad \sqrt{N} < \frac{N+(a+1)^2}{2(a+1)} = a + \frac{N-a^2+1}{2(a+1)},$$

а то је израз за приближни образац (5).

Најзад кад се у исту идентичност (7) стави $\lambda = a + \frac{1}{2}$ (аритметичка средина размака) добиће се кориговани образац (1) у облику неједначине

$$\sqrt{N} < \frac{N-a^2+\frac{1}{4}}{2a+1} + a.$$

Следећа табела употпуниће слику досадашњег теориског разлагања.

ТАБЕЛА

N	О Б Р А С Ц И					Права вредност (са 3 децимале)
	1	2	3	4	5	
2	1,333	1,500	1,400	1,417	1,500	1,414
3	1,666	2,000	1,666	1,750	1,750	1,732
5	2,200	2,250	2,235	2,236	2,333	2,236
10	3,143	3,166	3,162	3,162	3,250	3,162
35	5,909	6,000	5,909	5,916	5,916	5,916
91	9,526	9,555	9,538	9,539	9,550	9,539
920	30,327	30,333	30,331	30,332	30,338	30,332
949	30,803	30,816	30,805	30,806	30,806	30,806
4502	67,096	67,097	67,096	67,096	67,102	67,096

На основу свега изводе се ови закључци:

1⁰) ниједан образац није погрешан, јер има своје порекло у правилном математичком тумачењу;

2⁰) први образац има своје посебно тумачење, док су остала четири истога порекла;

3⁰) други, трећи и четврти образац јесу уствари три узастопне апроксимације једног истог обрасца (обр. (2));

4⁰) пети образац је исто што и други, само је разлика у почетној приближној вредности: код (2) је a, а код (5) је $a+1$;

5⁰) обрасци (1) и (3) дају увек мању вредност од тачне, док остале дају веће;

6⁰) по ступњу тачности најповољније приближне вредности по правилу даваће најкомпликованији обр. (4), јер он претставља трећу апроксимацију;

7⁰) при свем том обр. (1) даје доста тачне резултате, утолико тачније уколико је веће N. Ово бива услед тога што се успон цитиране параболе са растењем N приближује успону тетиве.

Из разлога под 7⁰), због једноставности његовог постанка, као и његовог облика за брзо рачунање постоји велика вероватноћа да историски образац за приближну вредност квадратног корена има онакав облик какав се по Enestrom-у налази код Alkarkhi-a.

О ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ЧИСЕЛ

Д. МАРКОВИЧ

РЕЗЮМЭ:

Изложить математическое основание некоторых приближеных формул для квадратного корня положительного числа и сравнив я их показать степень их приближености это и ест цель этой работы. Формулы даны ьыражениями (1), (2), (3), (4) и (5)[1] где N и a означают два положительных числа таких что

$$a^2 < N < (a+1)^2.$$

Эти формулы были предметом дискуссии (с исторической точки зрения) между М. Лерхом и Г. Енестремом[2]).

Применяя процес повтореня на тоджество

$$x = \frac{N+\lambda x}{\lambda + x}, \quad \lambda \geqq 0 \tag{6}$$

---

[1]) Формулы переименованы в резюмэ в полном соответствии с формулами сербского текста.

[2]) Tribune publique 9. Encyclopédie des sciences mathématiques (édition) française p. 420).