Werk

Label: Article

Jahr: 1949

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?311570321_0001|log13

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

О ЈЕДНОЈ ОСОБИНИ ПРОСТИХ БРОЈЕВА

ИВАН ИЗВЕКОВ

Познато је да је такозвана велика теорема Фермата доказана само за појединачне степене, док не постоји општи доказ за макакав степен; међутим има цео низ бројева за које се може дати и општи доказ ове теореме: на првом месту то су прости бројеви.

Изнећемо један доказ из кога следује да n-ти степен ниједног простог броја не може бити једнак збиру n-тих степена два цела позитивна броја.

Претпоставимо да је у једначини

$$a^{2n+1}=b^{2n+1}+c^{2n+1}$$

a прост број. Онда, на основу познате теореме, можемо a^{2n+1} раставити на производ два чиниоца само на $n+1$ разних начина:

$$a^0\cdot a^{2n+1},\ a\cdot a^{2n},\ldots\ldots,\ a^n\cdot a^{n+1}$$

а пошто $b^{2n+1}+c^{2n+1}$ можемо да напишемо као производ два броја

$$(b+c)(b^{2n}-b^{2n-1}c+\ldots\ldots+c^{2n}),$$

то мора да постоји једначина

$$a^k=b+c$$

где је k цео позитиван број

Да бисмо доказали немогућност ове једначине, доказаћемо две следеће теореме:

I

Ако постоји у целим бројевима једначина

$$a^{2n+1}=b^{2n+1}+c^{2n+1}$$

онда је $a=b+c-6q$, где је q цео позитаван број.

$$a^{2n+1}=b^{2n+1}+c^{2n+1}$$

можемо да напишемо на следећи начин:

$$a^{2n+1}-a+a=b^{2n+1}-b+b+c^{2n+1}-c+c$$

или

$$a=b+c-[a(a^{2n}-1)-b(b^{2n}-1)-c(c^{2n}-1)].$$

Пошто је израз $a^{2n}-1$ увек дељив са $(a+1)(a-1)$, то је израз $a(a^{2n}-1)$ дељив са $(a-1)a(a+1)$, а пошто је производ три узастопна цела броја увек дељив са 6, то значи да је и цео израз

$$a(a^{2n}-1)-b(b^{2n}-1)-c(c^{2n}-1)$$

дељив са 6.

Према томе је $a=b+c-6q$. Јасно је да q мора бити позитиван број, јер је $b+c>a$.

II

Доказаћемо да је у једначини

$$a^{2n+1}=b^{2n+1}+c^{2n+1} \qquad a^2>b+c$$

Пошто је $a=b+c-6q>b$, дакле $c>6q$ имамо $b>c>6q$ и можемо узети да је $c=t+6q$, а $c=r+6q$ где су t и r цели позитивни бројеви.

Из

$$a^2=(b+c-6q)^2=(t+r+6q)^2=(t+r)^2+12(t+r)q+36q^2$$

јасно следује да је последњи резултат већи од $b+c=t+r+12q$. Према томе је

$$a^2>b+c.$$

С друге стране је $a<b+c$, дакле је $a^2>b+c>a$ што значи да једначина $a^k=b+c$ није могућа у целим бројевима, а према томе ни једначина

$$a^{2n+1}=b^{2n+1}+c^{2n+1}$$

На исти начин можемо да докажемо немогућност једначине

$$a^{2(2r+1)}=b^{2(2r+1)}+c^{2(2r+1)}$$

где је a прост број.

На основу раније доказаног следује да је $a^4>b^2+c^2>a^2$.

Да би се увидела немогућност једначине $a^k=b^2+c^2$, остаје само један случај, кад је $k=3$ тј. $a^3=b^2+c^2$.

Одузимајући од ове једначине

$$a^2=b^2+c^2-6q$$

добићемо да је

$$a^2(a-1)=6q$$

или

$$a-1=\frac{6q}{a^2}$$

Пошто a не може да буде једнако ни броју 2 ни броју 3 остаје само једна претпоставка, да је

$$6q=a^2t$$

из чега следује да је

$$a^2=b^2+c^2-a^2t$$