ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)
Vol. 25, No. 1–2 (1989), 103–106

О РЕГУЛЯРНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ РЕЛЯТИВА

Л. А. СКОРНЯКОВ

(Поступило в редакцию 17 го мая 1988 г.)

Посвящается памяти Милана Секанины

Резюме. Критерий регулярности элемента полугруппы бинарных отношений обобщается на случай релятивов (алгебр отношений). Из этого извлекаются некоторые следствия для полугруппы B-отношений, где B — булева алгебра.

Ключевые слова: релятив, алгебра отношений, полугруппа отношений над булевой алгеброй.

Классификация АМО: 04 A 05, 20 M 20

Релятивой или *алгеброй отношений* называется универзальная алгебра R сигнатуры $\{+\,,\,.\,,\,-\,,0,\,I,\,\circ\,,\,^*\,,\,E\}$, , где $+$, . и $\circ$ — бинарные операции, $-$ и * — унарные, а 0, I и E нульарные, причем $\{_R \mid +\,,\,.\,,\,-\,,0,\,I\}$ — булева алгебра, $\{R \mid \circ\,,\,^*\,,\,E\}$ — моноид инволюцией, $(x + y)\circ z = x \circ z + y \circ z$, $(x + y)^* = x^* + y^*$ и $x^* \circ \overline{x \circ y} \leq \bar{y}$ для любых $x, y, z \in R$. В настоящей заметке приняты обозначения, использовавшиеся в [2], где можно найти и дальнейщие ссылки. Важным примером релятива служит множество всех B-отнощений, где B — булева алгебра (см. [1]). Напомним, что если $B = 2$, то B-отношения — это обычные бинарные отношения. В связи с этим возникает задача обобщения свойств релятива бинарных отнощений на произвольные релятива. Одна из таких задач и решается в настоящей заметке.

Элемент ϱ релятива R называется *регулярным*, если $\varrho = \varrho \circ \delta \circ \varrho$ для некоторого $\sigma \in R$.

Если ϱ — элемент релятива R, то положим

$$\tilde{\varrho} = \overline{\varrho^* \circ \bar{\varrho} \circ \varrho^*}.$$

Теорема 1. *Следующие свойства элемента ϱ релятива R равносильны:* (1) *ϱ регулярен;* (2) $\varrho \leq \varrho \circ \tilde{\varrho} \circ \varrho$; (3) $\varrho = \varrho \circ \tilde{\varrho} \circ \varrho$ (ср. [7], теорема 2).

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Если $\varrho = \varrho \circ \sigma \circ \varrho$, то, применяя соотношение (S 6):

$$(a \circ b)\,(c \circ d) \leq a \circ ((a^* \circ c)\,(b \circ d^*))\ \mathrm{od}\ (\text{см. [2], } c.\ 130, \text{ свойство (S 6)}),$$

где $a = E$, получаем

$$(\varrho \circ \sigma)\,(\bar{\varrho} \circ \varrho^*) \leq (\bar{\varrho}(\varrho \circ \sigma \circ \varrho)) \circ \varrho^* = \bar{\varrho}\varrho \circ \varrho^* = 0.$$

Вторичное применение той же формулы при $d = E$ дает

$$(\varrho^* \circ \bar{\varrho} \circ \varrho^*)\,\sigma = \varrho^* \circ ((\varrho \circ \sigma)\,(\bar{\varrho} \circ \varrho^*)) = 0.$$

Ввиду [3], *c.* 155, упр. 1, отсюда вытекает

$$\sigma \leq \overline{\varrho^* \circ \bar{\varrho} \circ \varrho^*} = \tilde{\varrho}$$

и, ввиду [2], лемма 1 (2),

$$\varrho = \varrho \circ \sigma \circ \varrho \leq \varrho \circ \tilde{\varrho} \circ \varrho.$$

(2) ⇒ (3). Используя неравенство $x^* \circ \overline{x \circ y} \leq \bar{y}$ и двойственное соотношение, получим

$$\varrho \leq \varrho \circ \tilde{\varrho} \circ \varrho = \varrho \circ \overline{\varrho^* \circ \bar{\varrho} \circ \varrho^*} \circ \varrho \leq \overline{\bar{\varrho} \circ \varrho^*} \circ \varrho \leq \bar{\bar{\varrho}} = \varrho.$$

(3) ⇒ (1). Тривиально.

Теорема 2. *Если ϱ — регулярный элемент релятива R, то $\tilde{\varrho} \circ \varrho \circ \tilde{\varrho}$ — наибольший инверсный элемент элемента ϱ* (ср. [7], *c.* 97, следствие).

Доказательство. Пусть $\sigma = \tilde{\varrho} \circ \varrho \circ \tilde{\varrho}$. Ввиду теоремы 1,

$$\varrho \circ \sigma \circ \varrho = \varrho \circ \tilde{\varrho} \circ \varrho \circ \tilde{\varrho} \circ \varrho = \varrho$$

и

$$\sigma \circ \varrho \circ \sigma = \tilde{\varrho} \circ \varrho \circ \tilde{\varrho} \circ \varrho \circ \tilde{\varrho} \circ \varrho \circ \tilde{\varrho} = \tilde{\varrho} \circ \varrho \circ \tilde{\varrho} = \sigma,$$

т. е. σ — инверсный для ϱ. Если $\tau \in R$, $\varrho \circ \tau \circ \varrho = \varrho$ и $\tau \circ \varrho \circ \tau = \tau$, то, используя [2], леммы 1 (2) и 1 (4), а также (S 6) из [2], получим

$$\begin{aligned}(\varrho^* \circ \bar{\varrho} \circ \varrho^*)\,\tau &= (\varrho^* \circ \bar{\varrho} \circ \varrho^*)\,(\tau \circ \varrho \circ \tau) \leq \\ &\leq \varrho^* \circ (\varrho \circ \tau \circ \varrho)\,(\bar{\varrho} \circ \varrho^* \circ \tau^*) \circ \tau = \\ &= \varrho^* \circ (E \circ \varrho)\,(\bar{\varrho} \circ \varrho^* \circ \tau^*) \circ \tau \leq \\ &\leq \varrho^* \circ (E \circ (E^* \circ \bar{\varrho})\,(\varrho \circ \tau \circ \varrho) \circ (\varrho^* \circ \tau^*)) \circ \tau = \\ &= \varrho^* \circ \bar{\varrho}\varrho \circ \varrho^* \circ \tau^* \circ \tau = 0.\end{aligned}$$

В силу [3], с. 155, упр. 1, отсюда вытекает, что

$$\tau \leq \overline{\varrho^* \circ \bar{\varrho} \circ \varrho^*} = \tilde{\varrho}.$$

Учитывая [2], лемма 1 (2), получаем $\tau = \tau \circ \varrho \circ \tau \leq \tilde{\varrho} \circ \varrho \circ \tilde{\varrho}$.

Пусть M — непустое множество. Булева алгебра B называется *M-полной*, если она содержит точные верхние и нижние грани любых своих подмножеств, мощность которых не превосходит мощности множества M. Отображение ϱ: $M \times M \to B$ называется *B-отношением*. Произведение $\varrho \circ \sigma$ B-отношений ϱ и σ определяется равенством

$$\varrho \circ \sigma(a, b) = \sum_{x \in M} \varrho(a, x)\,\sigma(x, b)$$

для любых a, $b \in M$ (см. [1]). Если $B = 2$, то B-отношения — это обычные отношения с обычным произвелением. Совокупность всех таких отношений на M оказывается релятивом, если в качестве решеточных операций рассмотреть теоретико-множественные объедиение, пересечение и дополнение, для любых a, $b \in M$ определить $\varrho^*(a, b) = \varrho(b, a)$ и

$$E(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = b, \\ 0, & \text{если } a \neq b, \end{cases}$$

и положить $0 = \emptyset$ и $I = M \times M$. Назовем B-отношение ϱ *рефлексивным*, если $E \leq \varrho$, и *антисиметричным*, если $\varrho\, \varrho^* \leqq E$.

Теорема 3. *Рефлексивное антисиметричное B-отношение ϱ регулярно тогда и только тогда, когда $\varrho = \varrho \circ \varrho$* (ср. [8], *а также* [5] и [7]).

Доказательство. Если $\varrho = \varrho \circ \varrho$, то $\varrho = \varrho \circ \varrho \circ \varrho$, т. е. ϱ регулярно. Если ϱ регулярно, то, в силу теоремы 1, $\varrho = \varrho \circ \tilde{\varrho} \circ \varrho$. Поскольку ϱ рефлексивно, то $\varrho(x, x) = 1$ для всех $x \in M$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{\varrho}(x, z) &= \overline{\sum_{s,t \in M} \varrho(s, x)\, \overline{\varrho(s, t)}\, \varrho(z, t)} = \\ &= \prod_{s,t \in M} (\overline{\varrho(s, x)} + \varrho(s, t) + \overline{\varrho(z, t)}) \leqq \\ &\leqq \overline{\varrho(x, x)} + \varrho(x, z) + \overline{\varrho(z, z)} = \varrho(x, z), \end{aligned}$$

для дюбых $x, z \in M$. Поскольку ϱ антисимметрично, то

$$\varrho(x, z)\, \varrho(z, x) = \varrho(x, z)\, \varrho^*(x, z) = 0,$$

если $x \neq z$. Следовательно, если $x \neq z$, то

$$\tilde{\varrho}(x, z)\, \varrho(z, x) \leq \varrho(x, z)\, \varrho(z, x) = 0.$$

Кроме того, при любых x, y и $з$ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\varrho}(y, z)\, \varrho(z, x) &= \varrho(y, y)\, \tilde{\varrho}(y, z)\, \varrho(з, x) \leqq \\ &\leqq \sum_{s,t \in M} \varrho(y, s)\, \tilde{\varrho}(s, t)\, \varrho(t, x) = \varrho\tilde{\varrho}\varrho(y, x) = \varrho(y, x), \end{aligned}$$

откуда при $x \neq y$ вытекает

$$\varrho(x, y)\, \tilde{\varrho}(y, z)\, \varrho(z, x) \leq \varrho(x, y)\, \varrho(y, x) = 0.$$

Следовательно, для любого $x \in M$ имеет место

$$\begin{aligned} 1 = \varrho(x, x) &= \sum_{y,z \in M} \varrho(x, y)\, \tilde{\varrho}(y, z)\, \varrho(z, x) = \\ &= \sum_{z \in M} \varrho(x, x)\, \tilde{\varrho}(x, z)\, \varrho(z, x) = \\ &= \varrho(x, x)\, \tilde{\varrho}(x, x)\, \varrho(x, x) = \tilde{\varrho}(x, x). \end{aligned}$$

Таким образом, $E \le \tilde{\varrho}$, что, ввиду [2], лемма 1 (2), влечет

$$\varrho \circ \varrho = \varrho \circ E \circ \varrho \le \varrho \circ \tilde{\varrho} \circ \varrho = \varrho = \varrho \circ E \le \varrho \circ \varrho.$$

Определение рефлексивности и антисимметричности B-отношения дословно переносится на элемент произвольного релятива. При этом аналог теоремы 3 тривиальным образом верен для любого релятива, где $x = x^*$ для любого элемента x, ибо из ее посылок вытекает, что $E \le x = xx^* \le E$. То же самое можно сказать и о релятиве

$$(2^G \mid \cup, \cap, |, \setminus, \varnothing, G, \,.\, , {}^{-1}, \{e\}),$$

где G — группа с единицей e (см. [5], [6]). В самом деле, допустим, что $A, B \in 2^G$, $e \in A$, $A \cap A^{-1} = \{e\}$ и $ABA = A$. Тогда $e = a_1 b a_2$, где a_1, $a_2 \in A$ и $b \in B$. Отсюда

$$a_1^{-1} = ba_2 = eba_2 \in ABA = A$$

и, следовательно, $a_1 = e$. Аналогично получаем, что $a_2 = e$. Таким образом, $e = b \in B$, откуда

$$a'a'' = a' \, e \, a'' \in ABA = A.$$

для любых $a', a'' \in A$. Таким образом,

$$AA \subseteq A \subseteq A\{e\} \subseteq AA,$$

т. е. $AA = A$. Однако, вопрос о справедливости аналога теоремы 3 для произвольного релятива остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Н. Салий, *Бинарные $\mathscr{L}$-отношения*, Известия высш. учебных завед. Математика, 1965, No 1, 133—145.

[2] Л. А. Скорняков, *Матричные алгебры отношений*, Мат. заметки, 41 (1987), No 2, 129—137

[3] Л. А. Скорняков, *Элементы теории структур*, Наука, Москва, 1982.

[4] H.-J. Bandelt, *On regularity classes of binary relations*, Banach. Conter Publ., 9 (1982), 329–333.

[5] S. D. Comer, *A new foundation for the theory of relations*, Notre Dame J. Form. Log., 24 (1983), N 2, 181–187.

[6] S. D. Comer, *Combinatorial aspects of relations*, Algebra Univers, 18 (1984), N 1, 77–94.

[7] B. M. Schein, *Regular elements of the semigroup of all binary relations* Semigroup Forum, 13 (1976), N 1, 95–102.

[8] E. S. Wolk, *A characterization of partial order*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. math., astronom., phys., 17 (1969), N 4, 207–208.

Л. А. Скорняков
Механическо-математический факультет
МГУ
119 899 *Москва*
СССР