SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS, ARCH. MATH, 4,
VII: 153—158, 1971

НЕКОТОРЫЕ НЕКОЛЕБЛЮЩИЕСЯ СВОЙСТВА РЕЩЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

$$y''' + p(x)y'' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]y = 0$$

Ладислав Моравски, Кошице

(Поступило в ребакцию 27-2-1970 г.)

В работе для рассматриваемого дифференциального уравнения построено дифференциальное уравнение второго порядка, которому соответствует т. н. связка решений рассматриваемого дифференциального уравнения. С помощью т. н. связки решений дедуцированы достаточные условия для того, чтобы изучаемое дифференциальное уравнение было неколеблющимся для $x \in J$, $J = (-\infty; \infty)$.

Далее доказан критерий неколеблимости рассматриваемого дифференциального уравнения.

Рассматривая линейное дифференциальное уравнение третьего порядка вида

$$y''' + p(x)\, y'' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + b(x)]\, y = 0 \tag{1}$$

где $p(x)$, $b(x) \in C_0(J)$, $A(x) \in C_1(J)$, $J = (-\infty; \infty)$.

Для любого решения дифференциального уравнения (1) действительны следующие интегральные тождества:

$$\begin{aligned}
&[yy'' - \frac{1}{2}\, y'^2 + A(x)\, y^2] \exp\{\int_{x_0}^{x} p(t)\, dt\} + \\
&+ \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)\, y'^2(t) \exp\{\int_{x_0}^{t} p(s)\, ds\}\, dt + \\
&+ \int_{x_0}^{x} [b(t) - A(t)\, p(t)]\, y^2(t) \exp\{\int_{x_0}^{t} p(s)\, ds\}\, dt = \\
&= y(x_0)\, y''(x_0) - \frac{1}{2}\, y'^2(x_0) + A(x_0) + y^2(x_0),
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&y'' \exp\{\int_{x_0}^{x} p(t)\, dt\} + \{\int_{x_0}^{x} 2A(t)\, y'(t) + [A'(t) + b(t)]\, y(t)\}, \\
&\exp(\int_{x_0}^{t} p(s)\, ds)\, dt = y''(x_0),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $x_0 \in J$ — любая точка, но жёсткая.

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ — фундаментальная система решений дифференциального уравнения (1), для которой в точке $x_0 \in J$, $J = (-\infty; \infty)$ имеют силу следующие свойства

$$y_1(x_0) = y_1'(x_0) = 0, \qquad y_1''(x_0) \neq 0,$$
$$y_2(x_0) = y_2''(x_0) = 0, \qquad y_2'(x_0) \neq 0,$$
$$y_3'(x_0) = y_3''(x_0) = 0, \qquad y_3(x_0) \neq 0.$$

Потом по [4], любое решение $y(x)$ дифференциального уравнения (1) свойства $y(x_0) = 0$ можно написать в виде $y = c_1y_1 + c_2y_2$.

МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (1)

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

называем связкой решений дифференциального уравнения (1) в точке x_0.

По [4] связка решений дифференциального уравнения (1) в точке x_0 соответствует дифференциальному уравнению второго порядка вида

$$wy'' - w'y' + [w'' + p(x)\, w' + 2A(x)\, w]\, y = 0, \tag{4}$$

где $w(x) = w_1(x) = y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x)$ ($y_1(x)$, $y_2(x)$ обладают выше приведенным свойствам) — решение дифференциального уравнения

$$\begin{aligned}[w'' + p(x)\, w']' + p(x)\, w'' + [p^2(x) + 2A(x)]\, w' + \\ + [A'(x) - b(x) + 2A(x)\, p(x)]\, w = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Лемма 1: *Пусть* $p(x)$, $b(x) \in C_0(J)$, $A(x) \in C_1(J)$, $J = (-\infty; \infty)$. *Пусть* $p(x) \geq 0$, $b(x) - A(x)\, p(x) \geq 0$, $A(x) \leq 0$, $A'(x) + b(x) \leq 0$, $[A(x) \leq 0$, $p(x) \leq 0$, $b(x) - A(x)\, p(x) \leq 0$, $A'(x) + b(x) \geq 0]$ *для* $x \in J$. *Пусть* $p(x)$, $b(x) - A(x)\, p(x)$ *одновременно тождественно в никаком частичном промежутке не равны нулю. Потом решение* $w(x) = w_1(x)$ *дифференциального уравнения* (5) *не имеет нулевой точки для* $x \neq x_0 \in J$.

Докажем первое утверждение леммы 1. Так как $w(x) = w_1(x) = y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x)$, очевидно $w_1(x_0) = w_1'(x_0) = 0$, $w_1''(x_0) \neq 0$. Пусть $x_1 > x_0$ является первой нулевой точкой $w_1(x)$. Легко проверить, что для $w(x) = w_1(x)$ действительно следующее интегральное тождество:

$$\begin{aligned}&[ww'' + p(x)\, ww' - \tfrac{1}{2} w'^2 + A(x)\, w^2] \exp\{\int_{x_0}^{x} p(t)\, dt\} - \\ &- \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)\, w'^2(t) \exp\{\int_{x_0}^{t} p(s)\, ds\}\, dt - \int_{x_0}^{x} [b(t) - A(t)\, p(t)]\, w^2(t) \\ &\exp\{\int_{x_0}^{t} p(s)\, ds\}\, dt = 0.\end{aligned}$$

Из последнего тождества для $w(x_1) = w_1(x_1) = 0$ вытекает противоречие. Следовательно $w(x) = w_1(x)$ не имеет для $x > x_0$ никакой нулевой точки.

Также легко проверить, что для всякого решения дифференциального уравнения (5) действительно следующее интегральное тождество:

$$[w'' + p(x)\, w' + 2A(x)\, w] \exp\{\int_{x_0}^{x} p(t)\, dt\} = w''(x_0) + p(x_0)\, w'(x_0) +$$

$$+ 2A(x_0)\, w(x_0) + \int_{x_0}^{x} [A'(t) + b(t)]\, w(t) \exp\{\int_{x_0}^{t} p(s)\, ds\}\, dt,$$

из которого легко определить, что $w(x) = w_1(x)$ не имеет нулевой точки для $x < x_0$.

Подобно показывается второе утверждение леммы 1.

С помощью связки решений дифференциального уравнения (1) легко доказывается следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть для коэффициентов дифференциального уравнения (1) выполнены предположения леммы* 1. *Потом нулевые точки связки в точке* $x_0 \in J$, $J = (-\infty; \infty)$ *дифференциального уравнения (1) отделяются направо (налево) от* x_0. *Если* x_1 *— первая нулевая точка решения* $y_1(x)$ *свойства* $y_1(x_0) = 0$, $y_1'(x_0) = 0$, $y''(x_0) \neq 0$ *направо (налево) от точки* x_0, *потом любое решение связки, не равное* $y_1(x)$, *имеет между* x_0 *и* x_1 *одну и только одну нулевую точку.*

Решение $y(x)$ дифференциального уравнения (1) будем называть неколеблющимся в $J = (-\infty; \infty)$, если оно в J имеет не больше чем две нулевые точки, или одну двукратную точку. Дифференциальное уравнение (1) мы будем называть неколеблющимся в промежутке J, если для $x \in J$ все его решения являются неколеблющимися.

Теорема 2. *Пусть* $p(x)$, $b(x) \in C_0(J)$, $A(x) \in C_1(J)$, $J = (-\infty; \infty)$ *такое, что для всех* $x \in J$ *имеют силу* $A(x) \leq 0$, $p(x) \geq 0$, $b(x) - A(x)\, p(x) \geq 0$, $A'(x) + (x) \leq 0$, $[A(x) \leq 0, p(x) \leq 0, b(x) - A(x)\, p(x) \leq 0, A'(x) + b(x) \geq 0]$. *Пусть, по крайней мере, одна из функций* $p(x)$, $b(x) - A(x)\, p(x)$ *— тождественно в никаком частичном промежутке не равна нулю. Потом дифференциальное уравнение (1) — неколеблющееся для* $x \in J$.

Докажем первое утверждение теоремы 2. Пусть $-\infty < x_0 < \infty$. Пусть $y(x)$ – решение дифференциального уравнения (1) свойства

$$y(x_0) = y'(x_0) = 0, \qquad y''(x_0) > 0.$$

Достаточно, если докажем, что $y(x)$ не имет нулевую точку для $x \neq x_0$, потому что всякое решение $\bar{y}(x) \neq y(x)$ дифференциального уравнения (1) свойства $\bar{y}(x_0) = 0$ соответствует томуже дифференциальному уравнению второго порядка вида (4) и, поскольку, выполнены предположения леммы 1, $w(x) \neq 0$ для $x \neq x_0$, и тогда по теореме 1 $\bar{y}(x)$ имеет для $x \neq x_0$ не более одной нулевой точки.

По интегральному тождеству (2) мы легко убедимся, что рассматриваемое решение $y(x)$ не имеет никакой нулевой точки для $x < x_0$.

Подобно из интегрального тождества (3) следует, что $y(x)$ не имеет никакой нулевой точки для $x > x_0$.

Подобно доказывается второе утверждение теоремы 2.

Смотря на дальнейшие рассуждения мы приведём следующий пример:

Пример 1. Пусть для коэффициентов дифференциального уравнения (1) для $x \in J$, $J = (-\infty;\ \infty)$ имеют силу $A(x) = -\dfrac{3k^2 + 4k\,e^{kx}}{8}$, $b(x) = \dfrac{k^3 + 3k^2\,e^{kx}}{4}$, $p(x) = e^{kx}$,

где k — положительная постоянная. Потом для всех $x \in J$ действительны отношения

(6) $$4A(x) - 2p'(x) - \tfrac{2}{3}p^2(x) \neq 0,$$

(7) $$\frac{\tfrac{2}{3}A(x)\,p(x) - 3b(x) - A'(x)}{4A(x) - 2p'(x) - \tfrac{2}{3}p^2(x)} = M(x) \in C_1(J),$$

(8) $$M^2(x) + M'(x) + \tfrac{2}{3}p(x)\,M(x) + \tfrac{2}{3}A(x) = 0.$$

О верности отношений (6), (7), (8) можно легко убедиться простым вычислением.

Лемма 2. *Пусть* $A(x)$, $p(x) \in C_1(J)$, $b(x) \in C_0(J)$, $J = (-\infty;\ \infty)$ *такие, что для всех* $x \in J$ *выполнены отношения* (6), (7), (8). *Потом функция*

(9) $$v(x) = v(x_0)\exp\Big\{\int_{x_0}^{x} M(t)\,dt\Big\},$$

где $x_0 \in J$, $v(x_0) = k_1 \neq 0$ *не противоречит дифференциальным уравнениям*

(10) $$v'' + \tfrac{2}{3}p(x)\,v' + \tfrac{2}{3}A(x)\,v = 0,$$

(11) $$A'(x) + 3b(x) + [4A(x) - 2p(x)]\frac{v'}{v} + p(x)\frac{v''}{v} = 0.$$

Доказательство. Потому что $4A(x) - 2p'(x) - \tfrac{2}{3}p^2(x) \neq 0$ для $x \in J$, $J = (-\infty;\ \infty)$, легко убедиться о верности следующего равенства:

$$\frac{A'(x) + 3b(x) - \tfrac{2}{3}A(x)\,p(x)}{4A(x) - 2p'(x) - \tfrac{2}{3}p^2(x)}\,[4A(x) - 2p'(x) - \tfrac{2}{3}p^2(x)] = A'(x) + 3b(x) - \tfrac{2}{3}A(x)\,p(x).$$

Последнее равенство можно написать в виде:

(12) $$[4A(x) - 2p'(x)]\,\frac{\tfrac{2}{3}A(x)\,p(x) - A'(x) - 3b(x)}{4A(x) - 2p'(x) - \tfrac{2}{3}p^2(x)} + A'(x) + 3b(x) = \tfrac{2}{3}A(x)\,p(x) + \tfrac{2}{3}p^2(x)\,\frac{\tfrac{2}{3}A(x)\,p(x) - A'(x) - 3b(x)}{4A(x) - 2p'(x) - \tfrac{2}{3}p^2(x)}.$$

Если к обеим сторонам равенства (12) причислим функцию

$$p(x)\,[M^2(x) + M'(x)]$$

получим

$$A'(x) + 3b(x) + [4A(x) - 2p'(x)]\frac{\tfrac{2}{3}A(x)\,p(x) - A'(x) - 3b(x)}{4A(x) - 2p'(x) - \tfrac{2}{3}p^2(x)} + \tag{13}$$
$$+ p(x)\,[M^2(x) + M'(x)] = p(x)\,[M^2(x) + M'(x)] + \tfrac{2}{3}A(x)\,p(x) +$$
$$+ \tfrac{2}{3}p^2(x)\frac{\tfrac{2}{3}A(x)\,p(x) - A'(x) - 3b(x)}{4A(x) - 2p'(x) - \tfrac{2}{3}p^2(x)}.$$

Дифференцируя (9) получаем

$$v' = v(x_0)\,M(x)\exp\{\int_{x_0}^{x} M(t)\,\mathrm{d}t\},$$

из которого следует

$$\frac{v'}{v} = M(x) = \frac{\tfrac{2}{3}A(x)\,p(x) - A'(x) - 3b(x)}{4A(x) - 2p'(x) - \tfrac{2}{3}p^2(x)} \tag{14}$$

Смотря на то, что $M(x) \in C_1(J)$, дифференцированием (14) последовательно получаем

$$\frac{vv''}{v^2} - \frac{v'^2}{v^2} = M'(x),$$

$$\frac{v''}{v} = M^2(x) + M'(x). \tag{15}$$

Принимая во внимание (14) и (15) получаем таким образом из (13)

$$A'(x) + 3b(x) + [4A(x) - 2p'(x)]\frac{v'}{v} + p(x)\frac{v''}{v} = \tag{16}$$
$$= p(x)\,[M^2(x) + M'(x) + \tfrac{2}{3}p(x)\,M(x) + \tfrac{2}{3}A(x)].$$

Так как в уравнении (16) выражение на правой стороне в квадратных скобках для всех $x \in J$ равно нулю, потом учитывая (14) и (15) имеет силу

$$\frac{v''}{v} + \tfrac{2}{3}p(x)\frac{v'}{v} + \tfrac{2}{3}A(x) = 0. \tag{17}$$

Из уравнения (17) по (9) следует (10). Принимая во внимание (8), потом из уравнения (16) следует (11).

Этим доказательство леммы 2 становится оконченным.

Пусть $u(x) \in C_2(J)$, $A(x)$, $p(x) \in C_1(J)$, $b(x) \in C_0(J)$, $J = (x_0;\ \infty)$, $-\infty < x_0$ и пусть для всех $x \in J$ действительны

$$A(x) = -\frac{1}{2}\left[u'(x) + \frac{1}{3}u^2(x) + \frac{2}{3}p(x)\,u(x)\right],$$

$$b(x) = \frac{1}{6}\left[u''(x) + 2u(x)\,u'(x) + 2p'(x)\,u(x) + \frac{2}{3}p(x)\,u^2(x) + \frac{4}{9}u^3(x)\right].$$

Потом дифференциальное уравнение (1) неколеблющееся в J, поскольку подстановкой $y(x) = z(x) \exp \{\frac{1}{3} \int\limits_{x_0}^{x} u(t)\, dt\}$ переходит в вид

$$z''' + [p(x) + u(x)]\, z'' = 0.$$

С помощью последнего утверждения в работе [5] доказано следующее утверждение:

Пусть $b(x) \in C_0(J)$, $A(x)$, $p(x) \in C_1(J)$, $J = (x_0;\ \infty)$, $-\infty < x_0$. Пусть $v(x) \neq 0$ является решением дифференциального уравнения (10) и для всех $x \in J$ имеет силу $A'(x) + 3b(x) + [4A(x) - 2p'(x)] \frac{v'}{v} + p(x) \frac{v''}{v} = 0$. Потом дифференциальное уравнение (1) становится неколеблющимся в J.

На основании последнего утверждения и леммы 2 можно формулировать следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть $A(x)$, $p(x) \in C_1(J)$, $b(x) \in C_0(J)$, $J = (x_0;\ \infty)$, $-\infty < x_0$ такие, что для всех $x \in J$ действительны (6), (7), (8). Потом дифференциальное уравнение (1) является неколеблющимся для $x \in J$.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Greguš M., *Über die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung*, Wiss. Zeitschr. Univ. Halle, Math., Nat. XII/3, 1963, 256—286.

[2] Greguš M., *Über die asymptotischen Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung*, Annali die Matematica pura ed applicata IV. LXIII, 1963, 1—10.

[3] Mamrila J., *O niektorých vlastnostiach riešení lineárnej diferenciálnej rovnice* $y^{(IV)} + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]\, y = 0$, Acta F. R. N. Univ. Comen., VII., 11., 1963, 597—608.

[4] Moravský L., *O niektorých vlastnostiach riešení diferenciálnej rovnice tvrau* $y''' + p(x)\, y'' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + b(x)]\, y = 0$, Acta F. R. N. Univ. Comen. X., 5., Mathematica XIII, 1966, 61—68.

[5] Moravský L., *Einige Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung 3. Ordnung* $y''' + p(x)\, y'' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + b(x)]\, y = 0$, Acta F. R. N. Univ. Comen. Mathematica XVIII — 1967, 35—44.

Ладислав Моравски
Кафедра математики и начертательной геометрии
Горного факультета
Высшей технической школы Кошице, ЧССР