ZAHLENTHEORETISCHE FUNKTIONEN FÜR DIE ZERTEILUNG DER NUMMER n IN k SUMMANDEN; k = 2, 3, 4, 5, 6

Robert Karpe, Brno

(Eingegangen am 1. Juli 1968)

Definition 1.

a) Es sei M die Menge aller natürlichen Zahlen. Die endliche Folge $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$, die die Bedingungen erfüllt:

1. $e_1 \leqq e_2 \leqq \ldots \leqq e_k$, 2. $e_1 + e_2 + \ldots + e_k = n$, wo $e_i \in M$ ist, $(i = 1, 2, \ldots, k)$, benennen wir ,,Kombination mit Wiederholung, zur Summe n, k-ter Klasse, aus der Menge M".

Die Anzahl aller solchen möglichen Kombinationen bezeichnen wir mit dem Symbol $\Gamma^k(\int n; M)$, oder kürzer Γ^k_n.

b) Es sei N die Menge der ersten k Naturzahlen; $N = (1, 2, \ldots, k)$. Die endliche Folge $(e_1, e_2, \ldots, e_j)$, die die Bedingungen erfüllt:

1. $e_1 \leqq e_2 \leqq \ldots \leqq e_j$, $1 \leqq j \leqq n$,

2. $e_1 + e_2 + \ldots + e_j = n$, wo $e_i \in N$ ist, $(i = 1, 2, \ldots, j)$, benennen wir ,,Kombination mit Wiederholung, zur Summe n, ohne die festgestellte Klasse, aus der Menge N".

Die Anzahl aller solchen möglichen Kombinationen bezeichnen wir mit dem Symbol $\Gamma(\int n; N)$.

Satz 1.

Für die Zahlen Γ^k_n, wo der Index k, bezw. n, fest, bezw. laufend ist, gilt folgende Ausschaffungsfunktion:

$$(1) \qquad f_k(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)} = \sum_{r=0}^{\infty} \Gamma^k_{k+r} \cdot x^r, \quad k \geqq 1.$$

Beweis: Nach den Formeln (3*) und (4*) aus der Seite 141, siehe [1], falls wir definieren $\Gamma(\int 0; N) = 1$, gilt:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)} = \sum_{r=0}^{\infty} \Gamma(\int r; N) \cdot x^r, \quad k \geqq 1.$$

Anderseits, nach der Formel (15) aus der Seite 125, siehe [1], gilt:

$$\Gamma(\int m - k; N) = \Gamma^k(\int m; M).$$

Durch Verbindung dieser Formeln, falls wir $m - k = r$ bezeichnen, wird die Gültigkeit des Satzes offenbar.

Es sei μ die kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $2, 3, \ldots, k$. Dann kann man $f_k(x)$ in folgender Form schreiben:

(2)
$$f_k(x) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{k} \dfrac{1 - x^\mu}{1 - x^j}}{(1 - x^\mu)^k}.$$

Der Ausdruck im Zähler kann (durch die Durchführung der angezeichneten Operationen) auf die Form eines Polynoms abgewandelt werden:

(3)
$$\prod_{j=1}^{k} \frac{1 - x^\mu}{1 - x^j} = \sum_{i=0}^{\nu} A_i^k \cdot x^i = P_k(x), \quad \text{wo } \nu = \mu k - \binom{k+1}{2},$$

und A_i^k ist die Konstante bei x^i.

Bemerkung: Der Polynom $P_k(x)$ ist symetrisch, weil er als Produkt sämtlicher symetrischen Polynomen $Q_j(x) = \dfrac{1 - x^\mu}{1 - x^j}$ hergestellt wird. $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

Es gilt also:

(4)
$$A_i^k = A_{\nu-i}^k, \quad i = 0, 1, \ldots, \nu.$$

Die Funktion $f_k(x)$ zerlegen wir mit Hinsicht auf (3) folgendermassen:

(5)
$$f_k(x) = \sum_{i=0}^{\nu} A_i^k \frac{x^i}{(1 - x^\mu)^k}$$

Satz 2.

Den Kombinationszahlen $\binom{n}{k-1}$, wo der Index $k - 1 \geqq 0$ fest, und der Index $n \geqq k - 1$ laufend ist, wo n und k natürliche Zahlen sind, gehört folgende Ausschaffungsfunktion

(6)
$$g_k(z) = \frac{1}{(1 - z)^k} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k - 1 + j}{k - 1} \cdot z^j; \quad k \geqq 1.$$

Beweis: Wir benützen die Methode der strengen Induktion. Bei dem Cauchyschen Produkt der Potenzreihen $g_k(z) \cdot g_1(z)$ wenden wir die Relation an:

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1},$$

siehe [1], Seite 248, die Formel (11).

Durch Substitution $z = x^\mu$ erhalten wir aus (6):

$$(7) \qquad g_k(x^\mu) = \frac{1}{(1-x^\mu)^k} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k-1+j}{k-1} . x^{j\mu}; \quad k \geqq 1.$$

Nach (5) und (7) gilt also folgende Identität:

$$(8) \qquad f_k(x) = \sum_{i=0}^{\nu} A_i^k . x^i . g_k(x^\mu); \quad k \geqq 1.$$

Diese identische Gleichung kann man auch mittels der Potenzreihen ausdrücken, siehe (1) und (7):

$$(9) \qquad \sum_{r=0}^{\infty} \Gamma_{k+r}^k . x^r = \sum_{i=0}^{\nu} \sum_{j=0}^{\infty} A_i^k . \binom{k-1+j}{k-1} . x^{j\mu+i}; \quad k \geqq 1.$$

Daraus, durch Vergleichung der Koefizienten bei der Potenz x^r, $(r = j\mu + i)$, falls wir j eliminieren und $k + r = m$ bezeichnen, erhalten wir:

$$(10) \qquad \Gamma_m^k = \sum_{i=0}^{\nu} A_i^k . \binom{\dfrac{m-i-k}{\mu} + k - 1}{k-1}; \quad m \geqq k, \quad k \geqq 1,$$

wo die Koeffizienten A_i^k nach (3) festgestellt werden.

Bemerkung: Die Kombinationszahl $\binom{p}{q}$ darf hier, freilich, von der Null nur damals verschieden sein, wenn p eine ganze Zahl ist.

Die Formel (10) benützen wir in nähsten Aufgaben. Vor dem aber werden wir einige Begriffe und Verhältnisse einführen, die die Zahlentheoretischen Funktionen charakterisieren, die in der Anschrift dieser Behandlung erwähnt sind.

Definition 2. (Definition des minimalen Restes).

Es seien a, b, zwei beliebige natürl. Zahlen. Formen wir die Funktion $R(x) = a - b . x$, $x \in H$, wo H die Menge aller ganzen Zahlen ist. Dann kann einer von zwei folgenden Fällen entstehen:

1. $x_0 \in H$ ist solche Nummer, daß es gilt: $|R(x_0)| < |R(x)|$ für alle $x \in H$, $x \neq x_0$.

2. x_0, x_1, sind solche Nummern aus der Menge H, daß es gilt: $|R(x_0)| = |R(x_1)| < |R(x)|$ für alle $x \in H$, $x_0 \neq x \neq x_1$, und dabei gilt es: $R(x_0) > 0$, $R(x_1) < 0$.

Die Nummer $R(x_0)$ nach dem ersten oder dem zweiten Falle benennen wir „Der minimale Rest der Nummer a modulo b“ und wir bezeichen sie $\left(\dfrac{a|}{b}\right)$.

Beispiele:

$$\left(\frac{7|}{3}\right) = 1, \left(\frac{8|}{3}\right) = -1, \left(\frac{9|}{2}\right) = 1, \left(\frac{8|}{2}\right) = 0.$$

Den Absolutwert des minimalen Restes $\left(\frac{a|}{b}\right)$ bezeichnen wir mit dem Symbole $\left|\frac{a}{b}\right|$. Also z. B. $\left|\frac{8}{3}\right| = 1$.

Definition 3. $\Big($Definition der Auf- oder Abrundung der Nummer $\frac{a}{b}$ ihrem nähsten Gesamte.$\Big)$

Es sei $\frac{a}{b}$ der Quotient zweier natürlichen Zahlen: a, b. Es sei p eine natürliche Zahl, die der Ungleichheit $p \leqq \frac{a}{b} < p + 1$ genügt.

Die Auf- oder Abrundung der Nummer $\frac{a}{b}$ zu ihrem nähsten Gesamte bezeichnen wir mit dem Symbol $\left|\frac{a}{b}\right]$ und definieren folgendermassen:

$$\left|\frac{a}{b}\right] = p, \text{ wenn } \frac{a}{b} \leqq p + \frac{1}{2},$$

$$\left|\frac{a}{b}\right] = p + 1, \text{ wenn } \frac{a}{b} > p + \frac{1}{2}.$$

Satz 3.

Es seien a, b, natürliche Zahlen. Dann gilt:

$$\frac{a - \left(\frac{a|}{b}\right)}{b} = \left|\frac{a}{b}\right] \tag{11}$$

Beweis — ist ersichtlich aus den Definitionen 2 und 3.

In den nähsten Aufgaben werden wir drei Zahlentheoretische Funktionen finden in der Form einfacher Formeln für Γ_n^k, $k = 2, 3, 4$.

Aufgabe 1. Man soll die Formel für $\Gamma^2(fn; M)$, $n \geqq 2$, ableiten.

Nach der formel (10) gilt: $\Gamma_n^2 = 1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{n}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{n-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Das bedeutet, daß zwei relative Formeln gelten:

1. Für $n = 2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, gilt: $\Gamma_n^2 = \frac{n}{2}$.

2. Für $n = 2k + 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, gilt: $\Gamma_n^2 = \frac{n-1}{2}$.

Die beiden relativen Formeln kann man — im Sinne der Definition 2 — mit einer einzigen Einschreibung ausdrücken:

$$\Gamma_n^2 = \frac{n - \left(\frac{n|}{2}\right)}{2}, \quad n \geqq 2,$$

so daß nach dem Satz 3 die Formel gilt:

$$(A\text{-}1) \qquad \Gamma^2(\int n; M) = \left|\frac{n}{2}\right], \quad n \geqq 2.$$

Aufgabe 2. Man soll die Formel für $\Gamma^3(\int n; M)$, $n \geqq 3$, ableiten.

Nach der Formel (10) gilt:

$$\Gamma_n^3 = \sum_{i=0}^{12} A_i^3 \cdot \binom{\frac{n-i-3}{6} + 2}{2},$$

wobei Polynom

$$P_3(x) = \prod_{k=1}^{3} \frac{1-x^6}{1-x^k} = \sum_{i=0}^{12} A_i^3 \cdot x^i,$$

siehe (3). Es gilt also

$$(12) \quad \Gamma_n^3 = 1 \cdot \binom{\frac{n-3}{6} + 2}{2} + 1 \cdot \binom{\frac{n-4}{6} + 2}{2} + 2 \cdot \binom{\frac{n-5}{6} + 2}{2} +$$

$$+ 3 \cdot \binom{\frac{n-6}{6} + 2}{2} + 4 \cdot \binom{\frac{n-7}{6} + 2}{2} + 5 \cdot \binom{\frac{n-8}{6} + 2}{2} +$$

$$+ 4 \cdot \binom{\frac{n-9}{6} + 2}{2} + 5 \cdot \binom{\frac{n-10}{6} + 2}{2} + 4 \cdot \binom{\frac{n-11}{6} + 2}{2} +$$

$$+ 3 . \binom{\frac{n-12}{6}+2}{2} + 2 . \binom{\frac{n-13}{6}+2}{2} + 1 . \binom{\frac{n-14}{6}+2}{2} +$$

$$+ 1 . \binom{\frac{n-15}{6}+2}{2} .$$

Die Methode des weiteren Verfahrens:

In die Relation (12) setzen wir $n = 6k + i$ ein. Die Zahl k betrachten wir als eine beliebige natürl. Zahl. Die Zahl i bedeutet hier einen Rest modulo 6. Deshalb setzen wir nach und nach ein: $i = -3, -2, \ldots, 2$.

Bei jeder aus dieser sechs Substitutionen bereiten wir den Ausdruck (12) auf Polynom im Argumente $6k + i$, mit der eben behandelten Größe i. Durch die rückwertige Transformation $6k + i = n$ erhalten wir also sechs relative Formeln in der Variable n, d. h. für jede von den behandelten Restklassen.

Aus der Mosaik der relativen Formeln entsteht dann — infolge des Satzes 3 — die Gestalt der absolut gültigen Formel.

Dieselbe Methode wenden wir auch in den weiteren Aufgaben an. (In vereinfachter Form war diese Methode auch in der ersten Aufgabe angewandt.)

Wir setzen in die Relation (12) ein:

1) $\mathbf{n = 6k}$: $\Gamma^3_{6k} = 3 . \binom{k+1}{2} + 3 . \binom{k}{2} = \frac{3}{2}(k+1)\,k + \frac{3}{2}k(k-1) =$

$= \mathbf{3k^2} = \frac{(6k)^2}{12}$; das heißt: Für $n = 6k$ gilt: $\Gamma^3_n = \frac{n^2}{12}$.

2) $\mathbf{n = 6k + 1}$: $\Gamma^3_{6k+1} = 4 . \binom{k+1}{2} + 2 . \binom{k}{2} = 3k^2 + k = \frac{(6k+1)^2 - 1}{12}$,

das heißt: Für $n = 6k + 1$ gilt: $\Gamma^3_n = \frac{n^2 - 1}{12}$.

Durch dieses Verfahren erhalten wir folgendes Ganze der relativen Formeln:

$n =$	$6k$	$6k \pm 1$	$6k \pm 2$	$6k \pm 3$
$12 . \Gamma^3_n =$	n^2	$n^2 - 1$	$n^2 - 4$	$n^2 + 3$

Leicht beglaubigen wir, daß — im Sinne der Definition 2 — alle diese relativen Formeln kann man mit einer einzigen Einschreibung ausdrücken:

$$\Gamma^3_{6k+i} = \frac{(6k+i)^2 - \left(\left|\dfrac{(6k+i)^2}{12}\right|\right)}{12}, \quad \begin{array}{l} i = -3, -2, \ldots, 2, 3; \\ k = 1, 2, 3, \ldots, \end{array}$$

so daß nach dem Satz 3 gilt:

$$\text{(A-2)} \qquad \Gamma^3(fn; M) = \left|\frac{n^2}{12}\right], \quad m \geqq 3.$$

Aufgabe 3. Man soll die Formel für $\Gamma^4(fn; M)$, $n \geqq 4$, ausdrücken. Nach der Formel (10) gilt:

$$\text{(13)} \qquad \Gamma^4_n = \sum_{i=0}^{38} A^4_i \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{n-i-4}{12} + 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

wo A^4_i der Koeffizient bei x^i ist im Polynom $P_4(x) = \prod_{k=1}^{4} \dfrac{1-x^{12}}{1-x^k}$.

Zwecks Kontrolle der weiteren Ausrechnung führen wir folgende Übersicht der Koeffizienten $A^4_i = A^4_{38-i}$, $i = 0, 1, \ldots, 38$:

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$A^4_i =$	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	30	35	39	42	44	48	48	50

Wir setzen in die Relation (13) ein:

1) **n = 12k:** $\Gamma^4_{12k} = 15 \cdot \binom{k+2}{3} + 48 \cdot \binom{k+1}{3} + 9 \cdot \binom{k}{3} = 12 \cdot k^3 + {}$ $+ 3 \cdot k^2 = \dfrac{(12k)^3 + 3(12k)^2}{144}$; das heißt: Für $n = 12k$ gilt:

$$\Gamma^4_n = \frac{n^3 + 3n^2}{144}$$

2) **n = 12k + 1:** $\Gamma^4_{12k+1} = 18 \cdot \binom{k+2}{3} + 48 \cdot \binom{k+1}{3} + 6 \cdot \binom{k}{3} =$ $= 12 \cdot k^3 + 6k^2 = \dfrac{1}{144} \cdot [(12k+1)^3 + 3 \cdot (12k+1)^2 - 9 \cdot (12k+1) + 5]$;

das heißt: Für $n = 12k + 1$ gilt: $\Gamma^4_n = \dfrac{n^3 + 3n^2 - 9n + 5}{144}$.

Durch dieses Verfahren erhalten wir folgendes Ganze der relativen Formeln:

n	$144 \,.\, \Gamma_n^4$	n	$144 \,.\, \Gamma_n^4$
$12k-6$	$n^3 + 3n^2 \quad - 36$	$12k$	$n^3 + 3n^2$
$12k-5$	$n^3 + 3n^3 - 9n + 5$	$12k+1$	$n^3 + 3n^2 - 9n + 5$
$12k-4$	$n^3 + 3n^2 \quad + 16$	$12k+2$	$n^3 + 3n^3 \quad - 20$
$12k-3$	$n^3 + 3n^2 - 9n - 27$	$12k+3$	$n^3 + 3n^2 - 9n - 27$
$12k-2$	$n^3 + 3n^2 \quad - 4$	$12k+4$	$n^3 + 3n^2 \quad + 32$
$12k-1$	$n^3 + 3n^2 - 9n - 11$	$12k+5$	$n^3 + 3n^2 - 9n - 11$

Wir setzen jetzt die Funktion G(n) fest:

$$G(n) = n^3 + 3n^2 - 9n \,.\, \left|\frac{n}{2}\right|, \quad n \geqq 4. \text{ (Siehe Def. 2.)} \tag{14}$$

Leicht beglaubigen wir, daß man — im Sinne der Definition 2 — alle angeführten relativen Formeln mit einer einzigen Einschreibung ausdrücken kann:

$$\Gamma^4_{12k+i} = \frac{G(12k+i) - \left(\dfrac{G(12k+i)}{144}\right|\Bigg)}{144}; \quad \begin{array}{l} i = -6, -5, \ldots, 5. \\ k = 0, 1, 2, \ldots \\ 12k + i \geqq 4, \end{array} \tag{15}$$

so daß nach dem Satz 3 gilt:

$$\Gamma^4(\int n; M) = \left| \frac{n^3 + 3n^2 - 9n \,.\, \left|\dfrac{n}{2}\right|}{(3!) \,.\, (4!)} \right], \quad n \geqq 4. \tag{A-3}$$

Durch das eben angeführte Verfahren können wir auch weitere Formeln entdecken. So zum Beispiel, ohne die ausgedehnten Beweisen anzuführen, geben wir hier die Resultate von zwei weiteren Aufgaben an:

$$\Gamma^5(\int n; M) = \left| \frac{n^4 + 10n^3 + 10n^2 - 120n + 90n \,.\, \left|\dfrac{n}{2}\right|}{(4!) \,.\, (5!)} \right], \quad n \geqq 5 \tag{A-4}$$

(A-5) Für $n \geqq 6$ gilt:

$$\Gamma^6(\int n; M) =$$

$$= \left| \frac{n^5 + \dfrac{45}{2} \,.\, n^4 + \dfrac{380}{3} \,.\, n^3 + 480 \,.\, n - 225 \,.\, n(n+9) \,.\, \left|\dfrac{n}{2}\right| - 1600 \,.\, n \,.\, \left|\dfrac{n}{3}\right|}{(5!) \,.\, (6!)} \right].$$

B e m e r k u n g 1. Analogische Formeln zu den (A - i), $i = 1, 2, \ldots, 5$, können wir sofort schreiben für die Anzahl der Kombinationen zur bestimmten Summe, o h n e Wiederholung, entsprechender Klasse, aus der Menge M. Siehe [1], Seite 142, die Formel (7).

B e m e r k u n g 2. Bei den Kombinationen zur bestimmten Summe erscheinen auch solche Kombinationen, die nur aus bestimmten (willkürlich aber fest ausgewählten) Elementen hergestellt werden, und zwar ohne Rücksicht auf die Klasse; siehe [1], Seite 146.

Auch bei dieser Art der Kombinationen können wir durch das obige Verfahren zu analogischen zahlentheoretischen Funktionen gelangen. So z. B., nach dem erwähnten Buche gilt:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^4)} = \sum_{r=0}^{\infty} \Gamma(\int r;\, 1, 3, 4) \,.\, x^r,$$

und daraus, durch das obige Verfahren, erhalten wir

$$\text{(10*)} \qquad \Gamma(\int n;\, 1, 3, 4) = \sum_{i=0}^{28} A_i \,.\, \binom{\frac{n-i}{12}+2}{2}, \qquad n \geqq 0,$$

$$\text{wo } \frac{(1-x^{12})^3}{(1-x)(1-x^3)(1-x^4)} = \sum_{i=0}^{28} A_i \,.\, x^i,$$

und weiter:

$$\text{(16)} \qquad \Gamma(\int n;\, 1, 3, 4) = \left| \frac{(n+4)^2}{24} \right], \qquad n \geqq 0,$$

so daß zum Beispiel gilt:

$$\Gamma(\int 10;\, 1, 3, 4) = \left| \frac{196}{24} \right] = 8,$$

das heißt:

$$10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1+1+3 =$$
$$= 1+1+1+1+3+3 = 1+3+3+3 = 1+1+1+1+1+1+4 =$$
$$= 1+1+1+3+4 = 3+3+4 = 1+1+4+4.$$

Bei dieser Art der Kombinationen finden wir aber oft gewisse Unregelmäßigkeiten der Formel. So z. B. gilt:

$$\text{(17)} \qquad \Gamma(\int n;\, 2, 3, 5) = \left| \frac{(n+5)^2}{60} \right] \text{ für } n = 30k,\, 30k-10, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$= \left| \frac{(n+5)^2}{60} \right] \text{ für } n = 30k+1,\, 30k-11,$$

$$= \left|\frac{(n+5)^2}{60}\right] \text{ für die übrigen Werte } n, \ (n \geqq 0),$$

wo das Symbol $\left|\frac{a}{b}\right]^{\cdot}$, bezw. $\left|\frac{a}{b}\right]_{\cdot}$, bedeutet die Aufrundung, bezw. die Abrundung der Zahl $\frac{a}{b}$ zu ihrem nähsten Gesamte.

LITERATUR VERZEICHNIS

[1] Netto E., *Lehrbuch der Combinatorik*, Berlin, 1901.

Mathematisches Institut
Technische Hochschule, Brno
Gorkého 13, Tschechoslowakei