# AUTOTOPIES DES QUASIGROUPES ET DES SYSTEMES ASSOCIATIFS

A. SADE

Présenté le 13 Octobre 1967

## I. GÉNÉRALITÉS

**1. Introduction.** L'objet de ce travail est d'étudier les méthodes de prospection et les propriétés du groupe d'autotopie d'un système multiplicatif quelconque et de ses sous-groupes. On parvient à des résultats intéressants, 1°, quand le système est à division (quasigroupes), 2° quand il est associatif. La réunion des conclusions obtenues dans ces deux cas fournit les propriétés relatives aux groupes et procure une vérification des énoncés trouvés directement, [22].

**2. Définitions.** La terminologie utilisée est celle des auteurs faisant autorité, (Hasse, V. d. Waerden, Albert, Kurosch).

(i). Une permutation, T, appartenant au groupe symétrique $\mathfrak{S}_E$, sur l'ensemble $E$, est dite *régulière* si tous les cycles de $T$ ont la même puissance. Si un cycle de $T$ contient $m$ éléments, tous les autres ont pour longueur $m$; sinon, tout cycle de $T$ a même puissance que l'infini dénombrable.

(ij). Un *groupoïde* [7], ou *système multiplicatif* [23], $S = E(\cdot)$, est un ensemble, $E$, avec une loi de composition (.) faisant correspondre un élément de $E$ à tout couple $(x, y) \in E^2$; $\forall\, x, y \in E, \exists !\, z \in E,\ x \,.\, y = z$.

Pour éviter toute confusion avec les groupoïdes de Brandt [8], étudiés par Hoehnke [13], Rinow [17] et l'école de Dresden (M. Hasse [12], Michler [15]), en tant que catégories à éléments inversibles, le vocable ,,*système*" sera préféré ici.

(ijj). Un système *à division, ou quasigroupe*, est un système obéissant à la loi du quotient bilatère,

$$\forall\, a, b \in E, \qquad \exists !\, x, y \in E, \qquad a \,.\, x = b, \qquad y \,.\, a = b.$$

Un système est *associatif* s'il satisfait à la loi

$$\forall\, x, y, z \in E, \qquad (x \,.\, y) \,.\, z = x \,.\, (y \,.\, z).$$

Certaines dénominations utilisées pour désigner une telle structure ont été galvaudées par le chauvinisme au point de les mettre hors d'usage. La locution ,,système associatif" a du moins l'avantage de porter en soi sa définition.

(iv). Si $E$, $F$, $H$ sont trois ensembles arbitraires, la structure $(EF \to H)$ avec la loi de composition (*)

$$\forall\, x \in E, \qquad y \in F, \qquad \exists\,!\, z \in E, \qquad x * y = z,$$

s'appelle un *système défectif*, [(18], p. 169, no 24). Tout système défectif peut être plongé dans un système ordinaire.

(v). Soit $G = E(.)$ un groupe et $F$ un sous-groupe de $G$. Alors la structure $E \,.\, F$, où le produit $x \,.\, y$ est défini comme dans $G$ pour tout $x$ de $G$ et tout $y$ de $F$, s'appelle un *groupe défectif* ou *Mischgruppe de* Loewy-Baer [(14], [4]), de *noyau* $F$.

(vi). Dans le système $S = E(.)$ la *translation à droite* relative à l'élément $a$ est l'application $\Delta_a = (x \to x \,.\, a)$, où $x$ parcourt $E$. La *translation à gauche* est $\Gamma_a = (x \to a \,.\, x)$.

Tout quasigroupe peut être regardé ([2], p. 227) comme un système dans lequel les deux translations sont bijectives.

(vij). Un *élément non-singulier* $u$, d'un système $S = E(.)$ est un élément pour lequel les deux translations $\Delta_u$ et $\Gamma_u$ sont 1-1 de $E$ sur $E$; $\Delta_u \wedge \Gamma_u \in \mathfrak{S}_E$, ([9], p. 248); ou, ce qui revient au même, $\forall\, a \in E$, les équations $u \,.\, x = a$ et $y \,.\, u = a$ ont une solution et une seule en $x$ et $y$. On voit sur des exemples que les éléments non-singuliers d'un système quelconque ne forment pas un ensemble fermé, en général. On sait que *l'ensemble des éléments non-singuliers d'un système associatif est un groupe par rapport à la loi de ce système*, à moins d'être vide. Nous le noterons $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\cdot)$.

(vijj). Dans un système quelconque, si $u$ et $v$ sont non-singuliers

$$\Delta_u = \Delta_v \rightleftharpoons u = v \rightleftharpoons \Gamma_u = \Gamma_v.$$

(ix). Si $\mathscr{B} \neq \emptyset$, la condition que le système associatif S possède une unité ([9] p. 251, 1B) est redonante. *Si $S$ n'a qu'un élément non-singulier, celui-ci est neutre dans $S$.*

(x). Le groupe $\mathscr{B}$ est isomorphe à chacun des ensembles $\{\Delta_u\}$ et $\{\Gamma_u\}$, où $u$ parcourt $\mathscr{B}$.

(xi). Le *complexe relatif aux translations à droite* ([21], p. 628, No 3.6 d'un quasigroupe $Q = E()$ est l'ensemble des $\Delta_a^{-1}\Gamma_b$, où $a$ et $b$ décrivent $E$.

(xij). Deux systèmes sur le même ensemble, $S = E()$ et $U = E(.)$, sont *isotopes* s'il existe un ensemble ordonné de trois permutations de $\mathfrak{S}_E$ $(a, b, c)$ tel que

$$\forall\, x, y, z \in E, \qquad xy = z \rightleftharpoons (xa) \,.\, (yb) = zc.$$

$(a, b, c)$ s'appelle une *isotopie* et l'on écrit

$$S(a, b, c) = U.$$

(xijj). Si $D(*) = (EF \to H)$ est un système défectif et $S$ un système dans lequel $D$ est immergé, toute isotopie de $S$ induit sur $D$ une transformation appelée *isomérie*. Toute isomère de $D$ est défini par trois permutations, $\xi \in \mathfrak{S}_E$, $\eta \in \mathfrak{S}_F$, $\zeta \in \mathfrak{S}_H$ et la condition

$$x * y = z \rightleftharpoons (x\xi) \odot (y\eta) = z\zeta,$$

où $(\odot)$ est l'opération de l'isomérie de $D$ ([18], p. 169, N° 25).

(xiv). Une *autotopie* est une isotopie d'un système sur lui-mêne.

(xv). Une isotopie est *homogène* si ses trois composantes sont semblables.

(xvi). Une isotopie $(p, q, 1)$ est dite *principale* si sa $3^{ième}$ composante est l'identique. Le *groupe des autotopies principales* d'un système $S$ est l'ensemble $\{(X, Y, 1)\}$, noté $\mathfrak{A}_P$.

(xvij). Une *isotopie réduite* d'un système $S$ est une isotopie de la forme $(\Delta_a, \Gamma_b, 1)$ où $a$ et $b$ sont deux éléments non-singuliers quelconques de $S$, $a, b \in \mathscr{B}$. Dans le cas des quasigroupes avec unité, $(a, b)$ s'appelle le *couple de translation*, ([3], p. 480, N° 1.12).

(xvijj). Si $U$ est un isotope réduit de $S$, avec $U = S(\Delta_a, \Gamma_b, 1)$ et si $U$ est isomorphe à $S$, $(U = SX)$, l'autotopie de $S$, $I = (\Delta_a, \Gamma_b, 1)\, X^{-1}$ est dite *autotopie fondamentale de $S$*. Quand $(a, b)$ parcourt $\mathscr{B}^2$, l' ensemble des $I$ s'appelle le *complexe des autotopies fondamentales* de $S$: $\mathfrak{A}_F = \{I\}$. Chaque $I$ n'est définie qu'aux automorphismes près et $\mathfrak{A}_F$ est un système de représentants des classes latérales relatives au groupe d'automorphisme $\mathscr{A}$ de $S$ dans le groupe d'autotopie, $\mathfrak{A}$.

(xix). Le *groupe des automorphismes internes* d'un système associatif $S = E()$ est l'ensemble des applications 1-1 de $E$ sur $E$, $J = (x \to m^{-1}xm)$ lorsque $m$ parcourt le groupe $\mathscr{B}$ des éléments non-singuliers. Il est homomorphe à $\mathscr{B}$.

(xx). Par analogie avec la définition des groupes complets, un *système associatif est complet* s'il n'a que des automorphismes internes et si le seul élément central de $\mathscr{B}$ est l'unité de $S$, $(\mathscr{B} \neq \emptyset)$.

On représentera

| | |
|---|---|
| Le groupe d'automorphisme par | $\mathscr{A}$, |
| Le groupe d'autotopie par | $\mathfrak{A}$, |
| Le centre de $A$ par | $\mathfrak{Z}_A$, |
| Le centralisateur de $A$ par | $Z_A$, |
| La normalité de $A$ dans $B$ par | $A \lhd B$, |
| L'isomorphisme de $A$ et de $B$ par | $A \cong B$, |
| Le cardinal de l'ensemble $E$ par | $\lvert E \rvert$, |
| Le produit des complexes $A$ et $B$ par | $AB$, |
| Le produit direct des sous-groupes $A$ et $B$ par | $A \times B$. |

**3. Lemmes.** Dans ce paragraphe on a rassemblé plusieurs propositions usuelles qui interviennent au cours des raisonnements.

(i). *Toute isotopie principale* $(X, Y, 1)$ *appliquant un système quelconque* $S = E()$, *avec élément neutre, sur un système* $H$, *avec élément neutre, est une isotopie réduite* $(\Delta_v, \Gamma_u, 1)$ *où* $u$ *et* $v$ *sont arbitraires dans* $\mathscr{B}$ *et réciproquement. L'élément neutre de* $H$ *est le produit* $uv$ *de* $u$ *et* $v$ *dans* $S$. ([9], p. 249. Th. 1A et Corr.).

(ij). *Si un hypergroupoïde,* (en particulier un système $S = E(\times)$) *avec unité scalaire,* $u$, *est isotope d'un hypergroupoïde associatif* $G = E(*)$, $S = G(p, q, r)$, *alors* $S$ *et* $G$ *coïncident par l'isomorphisme* $T = (x \to \to xpr^{-1}q)$; $S = GT$, [20].

Cette proposition est la généralisation de l'énoncé d'Albert [(1), p. 511, Th. 2] dans le cas des quasigroupes isotopes d'un groupe.

(ijj). *Pour toute autotopie principale* $(X, Y, 1)$ *d'un système quelconque,* $S$, *on a*

$$X\{\Delta\} = \{\Delta\} \wedge Y\{\Gamma\} = \{\Gamma\},$$

*où* $(\Delta)$ *et* $(\Gamma)$ *sont les ensembles consistant en toutes les translations de* $S$.

*Preuve.* Si l'on soumet $S$ à une isotopie principale quelconque $(X, Y, 1)$ et si l'on considère les translations $\delta$ et $\gamma$ sur le système, $S'$, obtenu, on aura

$$\delta_{vY} = X^{-1}\Delta_v, \tag{1}$$

$$\gamma_{uX} = Y^{-1}\Gamma_u. \tag{2}$$

Si $(X, Y, 1)$ est une autotopie de $S$,

$$\{\delta\} = \{\Delta\} = X^{-1}\{\Delta\}, \qquad \{\gamma\} = \{\Gamma\} = Y^{-1}\{\Gamma\}.$$

(iv). *Tout automorphisme d'un système quelconque,* $S$, *induit un automorphisme sur l'ensemble* $\mathscr{B}$, *de ses éléments non-singuliers.*

(v). *Si le système* $\Sigma$ *est isotope du système* $S$, $\Sigma = S(p, q, r) = SI$, *le groupe d'autotopie de* $\Sigma$ *est le transformé par* $I$ *de celui de* $S$.

(vi). *Toute isotopie* $(p, q, r)$ *est le produit d'une isotopie principale* $(pr^{-1}, qr^{-1}, 1)$ *par un isomorphisme,* $r$.

(vij). *Toute isotopie appliquant un système* $S$, *avec unité, sur un système,* $U$, *avec unité, est le produit d'une isotopie réduite,* (N° 2, xvij), $(\Delta_v, \Gamma_u, 1)$, $u$, $v$ *non-singuliers dans* $S$, *par un isomorphisme.*

(vijj). *Toute autotopie d'un système* $S$, *avec unité, est le produit d'une isotopie réduite* $(\Delta_v, \Gamma_u, 1)$ *projetant* $S$ *sur un système* $U$ *isomorphe à* $S$, *par l'isomorphisme* $(U \to S)$.

*Preuve.* D'après (vij) une telle autotopie est de la forme $(\Delta_v, \Gamma_u, 1)\, T$. Si elle satisfait à

$$S(\Delta_v, \Gamma_u, 1)\, T = S,$$

on aura

$$S(\Delta_v, \Gamma_u, 1) = ST^{-1} = U.$$

Donc l'isotope principal $U = S(\Delta_v, \Gamma_u, 1)$ est isomorphe à $S$; $U = ST^{-1}$, $T = (U \to S)$.

(ix). *Pour qu'un système quelconque, $S$, soit isotope d'un système avec unité, il faut et il suffit que $S$ possède au moins un élément non-singulier à droite et un élément non-singulier à gauche* ([9], *p.* 249, Th. 1A; [10], p. 57).

(x). *Si $G = \{X\}$ est un groupe ayant pour éléments des permutations régulières, $X \in \mathfrak{S}_E$, si $e$ est un élément fixe arbitraire de $E$ et $F$ l'ensemble des éléments $eX$ de $E$, alors*

(a), *le système défectif $E * F$, avec la loi de composition $x * y = xX_y$, où $X_y$ est définie par $eX_y = y$, est un Mischgruppe de Loewy* (N° 2, (v), *dont le noyau, $F$, est isomorphe à $G$;*

(b), *les classes latérales $v * F$, relatives à $F$, sont des quasigroupes défectifs* (N° 2, iv), *dérivés de $F$ (*) par l'isotopie $(\Gamma_v, 1, \Gamma_v)$ $v \notin F$;*

(c) *Si $E$ est fini, d'ordre $n$, $|F|$ divise $n$.*

*Preuve.* (a), la permutation $X_y$, définie par

$$eX_y = y, \tag{3}$$

n'existe pas pour toute valeur de $y \in E$; mais, si elle existe, elle est unique, car

$$(eX = i \wedge eY = i) \Rightarrow eX = eY \Rightarrow eXY^{-1} = e.$$

Comme toutes les permutations sont régulières, si $XY^{-1} \in G$ laisse fixe l'élément $e$, elle contient le cycle monôme $(e)$; tous ses cycles sont donc monômes et $XY^{-1} = 1$, $X = Y$. Donc, si $F$ est l'ensemble des éléments $i \in E$ pour lesquels $\exists X$, $eX = i$, l'application de $F$ sur $G = \{X\}$, $(x \to Xx)$ est 1-1.

Soit le système défectif $E * F$, avec la loi de composition

$$x * y = xX_y, \qquad x \in E, \qquad y \in F. \tag{4}$$

Si $x$ et $y$ sont dans $F$, on a, (3), $x = eX_x$, et

$$x*y = (eX_x)\, X_y = e(X_x X_y).$$

Si, dans $G$, $X_x X_y = X_z$, on aura

$$x*y = eX_z; \qquad x*y = z, \qquad z \in F.$$

On voit que

$$\forall\, x, y \in F, \qquad x*y = z \rightleftharpoons X_x X_y = X_z.$$

Comme d'ailleurs $(x \to X_x)$ est 1-1, le groupe $G = (X)$ est isomorphe au système $F(*) \subseteq E*F$ et $F(*)$ est lui-même un groupe. Les translations de $F$ sont

$$\Delta_a = (x \to x*a) = (x \to xX_a),$$

c'est-à-dire la restriction à $F$ de $X_a$ dans $G$. Le système défectif $E*F$ est donc un Mischgruppe dont le noyau, $F$, est isomorphe à $G = \{X\}$.

(b). Soit v un élément de $E - F$. Dans la classe latérale $v*F$, $v \notin F$, on $a$

$$\forall\, x, y \in F, \qquad (v*x) * y = v\Delta_x\Delta_y = vX_xX_y = v(X_{x*y}).$$

Mais $x*y = z \in F$, donc

$$(v*x) * y = v*z \in v*F.$$

Le quasigroupe défectif $(v*F) * F$ est isomère du groupe $F(*)$ par $[(x \to v*x),\ 1,\ (z \to v*z)] = (\Gamma_v, 1, \Gamma_v)$.

La dernière partie est évidente.

(xi). *Dans tout système multiplicatif,* $S = E(\ )$, *si* $X$ *est un automorphisme et* $m$ *un élément non-singulier, on a* $X^{-1}\Delta_m X = \Delta_{mX}$.

*Preuve.* $\forall a \in E$, $a\Delta_m X = (am)\,X$ et $aX\Delta_{mX} = (aX)\,(mX)$. Comme $X$ est un automorphisme, $(am)\,X = (aX)\,(mX)$, donc

$$\Delta_m X = X\Delta_{nX}. \tag{5}$$

**4. Groupe d'autotopie d'un système S.** La construction du groupe d'autotopie, $\mathfrak{A}$, d'un système quelconque, $\Sigma = E()$, repose sur l'application successive des propositions n° 3, (ix), (v) et (vijj). Au moyen de (ix) on remplace $\Sigma$ par un système $S$, isotope de $\Sigma$ et possédant un élément neutre. Il est à observer qu'un système peut ne posséder aucun élément non-singulier et avoir néanmoins des autotopies. Ce cas est exclu ici.

Ensuite, d'après (v), la connaissance du groupe d'autotopie de $S$ entraînera celle du groupe de $\Sigma$.

Enfin, d'après (vijj), on soumetra $S$ à toutes les isotopies réduites $(\Delta_v, \Gamma_u, 1)$, $u, v \in \mathscr{B}$, et on construira l'ensemble de tous les isotopes réduits qui sont isomorphes à $S$. Si $U = S(\Delta_v, \Gamma_u, 1) = ST^{-1}$, on en déduira l'autotopie fondamentale (N° 2, (xvijj) de $S$,

$$S(\Delta_v, \Gamma_u, 1)\, T = S.$$

Celle-ci n'est définie qu'aux automorphismes près. A chaque isotope réduit de $S$, isomorphe à $S$, correspond un ensemble d'autotopies qui est le prodint de l'une d'elles par $\mathscr{A}$, groupe d'automorphisme de $S$. En choisissant une seule d'entre elles pour représentes cet ensemble, l'ensemble des autotopies fondamentales correspondant à tous les couples de translation $(u, v)$, (n° 2, xvij), fournira le complexe des autotopies fondamentales de $S$: $\mathfrak{A}_F$.

Le groupe d'autotopie de $S$ sera le produit de complexes $\mathfrak{A}_F\mathscr{A} = \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}_F$ sera un système de représentants des classes latérales par rapport à $\mathscr{A}$ dans $\mathfrak{A}$. En effet, dans un système quelconque, avec au moins un élément non-singulier, les translations relatives à deux éléments non-singuliers distincts sont distinctes, (N° 2, (vijj). De là on déduit que deux éléments quelconques du produit de complexes $\mathfrak{A}_F\mathscr{A}$ sont distincts car, si

$$(\Delta_v, \Gamma_u, 1)\, T = (\Delta_w, \Gamma_s, 1)\, R,$$

il en résulte, par la 3ième composante, $T = R$, donc

$$\Delta_v = \Delta_w \wedge \Gamma_u = \Gamma_s$$

en enfin, $u = s$ et $v = w$, puisque $u, v, w, s \in \mathscr{B}$. Ainsi

*Le groupe d'autotopie, $\mathfrak{A}$, d'un système quelconque avec unité, $S$, est le produit du complexe $\mathfrak{A}_F = \{(\Delta_v, \Gamma_u, 1)\, T\}$ des autotopies fondamentales de $S$ par le groupe d'automorphisme, $\mathscr{A}$, de $S$.*

*L'ensemble des isotopes réduits, isomorphes à $S$ a pour cardinal l'index $\mathfrak{A} : \mathscr{A}$.*

**5. Calculs pratiques.** On peut résumer ainsi la marche des opérations:

*Pour trouver le groupe d'autotopie d'un système quelconque, $\Sigma$,* (avec au moins un élément non-singulier)

1°. *Remplacer $\Sigma$ par un système $S$, avec unité, isotope de $\Sigma$.*

2°. *Construire tous les isotopes réduits de $S$.*

3°. *Former l'ensemble de ceux qui sont isomorphes à $S$; $U = ST^{-1}$.*

4°. *En déduire le complexe des autotopies fondamentales de $S$; $\mathfrak{A}_F = \{(\Delta_v, \Gamma_u, 1)\, T\}$.*

5°. *Multiplier $\mathfrak{A}_F$ par le groupe d'automorphisme ,$\mathscr{A}$, de $S$.*

6°. *Revenir à $\Sigma$ par l'isotopie inverse de* 1°.

La prospection de ces divers isomorphismes se fait par les méthodes indiquées dans [19], qui permettent d'éviter la construction explicite de tous les isotopes réduits, à savoir.

(i). Utilisation du graphe à arêtes orientées $(x \to x^2)$

(ij). Séries des produits à droite $(u_{n+1} = u_{n-1}u_n)$.

(ijj). Similitude des complexes relatifs aux translations, $(\Delta_a^{-1}\Delta_b)$ (N° 2, (xi). Cette dernière permet de trouver directement des autotopies dans le cas des quasigroupes, quand on n'a pas en vue la totalité de $\mathfrak{A}$. Il suffit d'examiner la structure partitionnelle des éléments $\Delta_a^{-1}\Delta_b$ de chaque sous-complexe, $a =$ Constante. Deux quasigroupes sont isotopes si les sous-complexes de l'un sont semblables aux sous-complexes de l'autre. Si $a_i$ et $b_i$ sont les nombres de cycles d'ordre $i$ de deux permutations finies, la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux permutations soient semblables est que, $\forall i \in N^+$, $a_i = b_i$. Si deux quasigroupes ne sont pas isotopes cette méthode permet de le déceler immédiatement.

L'étude du groupe d'autotopie, $\mathfrak{A}$, d'un système $S$ et des sous-ensembles $\mathscr{A}$, $\mathfrak{A}_P$, $\mathfrak{A}_F$ est intéressante, (i) quand $S$ est un quasigroupe avec unité, (ii) quand $S$ est associatif.

## II

## QUASIGROUPES AVEC ÉLÉMENT NEUTRE

**6. Autotopies principales.** (i). *Le groupe des autotopies principales,* $\mathfrak{A}_P$, *d'un quasigroupe* $Q = E(\ )$, *avec unité, coïncide avec l'ensemble des autotopies réduites* $(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)$.

(ij). *Les composantes* $\Delta$ *et* $\Gamma$ *sont deux permutations semblables et régulières sur* $E$.

(ijj). $\mathfrak{A}_P$ *est isomorphe au groupe formé par les éléments de l'une quelconque de ses composantes non identiques.*

(iv). $\mathfrak{A}_P$ *est isomorphe à un sous-quasigroupe de* $Q$, *qui est donc un groupe, et dont les éléments sont les indices,* $m$, *des translations qui définissent ces autotopies principales;* $\mathfrak{A}_P \cong \{m\}$. *Le groupe* $\{m\}$ *est le nucles au milieu de* $Q$. *Si* $E$ *est fini, l'ordre de ce groupe divise celui de* $Q$.

*Preuve.* (i). D'après N° 3, i, toute autotopie principale de $Q$ est de la forme $(\Delta_v, \Gamma_u, 1)$ où $\Delta$, $\Gamma$ sont les translations de $Q$. Pour que la nouvelle unité soit la même que l'ancienne, $e$, il faut et il suffit que $uv = e$. Puisque $(\Delta_v, \Gamma_u, 1)$ est une autotopie, on a

$$\forall x, y \in E, (xv)(uy) = xy,$$

en particulier, si $x = e$, $v(uy) = y$, $\Gamma_w \Gamma_v = 1$, $\Gamma_u = (\Gamma_v)^{-1}$, et l'autotopie est bien $(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)$, $m \in E$. Réciproquement si

$$Q(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1) = Q, \forall x, y \in E, (xm)y = x(my).$$

(ij). Si $(X, Y, 1)$ est une autotopie principale de $Q$, on a

$$\forall x, y \in E, \quad xy = (xX)(yY) = (xX^2)(yY^2) = \dots$$

Le cycle de $X$ qui contient l'élément $x$ est

$$(\dots xX^{-1}, x, xX, xX^2, \dots).$$

Le cycle de $Y$ qui contient l'élément $y$ est

$$(\dots, yY^{-1}, y, yY, yY^2, \dots).$$

Si le premier est fini et a pour longueur $m$, on aura $xX^m = x$, d'où

$$xy = (xX^m)(yY^m) = x(yY^m).$$

Cancellant par $x$, ce qui est légitime dans un quasigroupe,

$$\forall y \in E, \quad y = yY^m, \quad \text{ou} \quad Y^m = 1.$$

Laissant $x$ fixe, on voit que tout cycle de $Y$ a pour longueur un diviseur $m'$, de $m$. Mais, en raisonnant symétriquement sur $y$ et $x$, on voit que tout cycle de $X$ a même longueur que tout cycle de $Y$; ainsi (N° 2, (i)), $X$ et $Y$ sont régulières et semblables.

Si le cycle $(\ldots xX^{-1}, x, xX, \ldots)$ est infini, tous les cycles de $X$ et de $Y$ sont infinis car, si un seul avait une longueur finie, $m$, d'après ce qui précède, tous les autres seraient d'ordre $m$.

(ijj). Deux autotopie principales distinctes ne peuvent pas avoir une composante non identique commune car si, par exemple $(X, Y, 1)$ et $(X, Y', 1)$ ont la composante commune $X$, on aura

$$\forall x, y \in E, \quad (xX)(yY) = xy = (xX)(yY'),$$
$$\forall y \in E, \quad yY = yY', \quad Y = Y'.$$

Il en résulte que les éléments d'une même composante $(\neq 1)$ de $\mathfrak{A}_p$ sont tous distincts et forment donc un groupe isomorphe au groupe des autotopies principales lui-même.

(iv). Que l'ensemble $\{m\} = F$ des indices des translations $\Delta_m$ et $\Gamma_m$ soit un groupe isomorphe à $\mathfrak{A}_p$ résulte immédiatement de (N° 3, (x).

Le groupe défectif $EF$, muni de la même loi que $Q$, où le premier facteur est dans $E$ et le second dans $F$, a pour noyau le groupe $F = \{m\}$, isomorphe à $\mathfrak{A}_p$. Les translations de $S$ induisent sur l'ensemble $F$ des permutations régulières qui sont précisément les translations du noyau.

*Exemple.* Soit le quasigroupe $F_{14}$, défini par ses translations, $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 012.345$, $\Delta_2 = 021.354$, $\Delta_3 = 031524$, $\Delta_4 = 041325$, $\Delta_5 = 051423$. Le groupe des autotopies principales est du 3ième ordre et consiste en les puissances de (012. 345;021.345; 1). $F_{14}$ contient le groupe cyclique du $3^{ième}$ ordre (0, 1, 2), isomorphe à $\mathfrak{A}_p$.

*Remarque.* L'existence de $\mathfrak{A}_p$ entraîne celle d'un sous-quasigroupe associatif dans $Q$. La réciproque n'est pas vraie: $Q$ peut contenir un groupe sans admettre aucune autotopie principale non identique si le nucleus se réduit à l'identique.

**7. Conséquence.** *Pour qu'un quasigroupe fini, avec unité, soit un groupe il faut et il suffit qu'il ait même cardinal que le groupe de ses autotopies principales,*

$$|\mathfrak{A}_p| = |Q| \rightleftharpoons Q \text{ associatif.}$$

*Preuve.* Si $Q$ est un groupe, il est évident que $(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)$ est une autotopie de $Q$ pour tout $m$ dans $E$ car $(xm)(m^{-1}y) = xy$; donc $|\mathfrak{A}_p| = |E|$. Réciproquement, si $Q$ et $\mathfrak{A}_p$ ont même puissance, d'après le N° 6, iv, $Q$ contient un groupe isomorphe à $\mathfrak{A}_p$ et du même ordre que $Q$; donc $Q$ est lui-même un groupe.

**8. Partition d'égalité.** (i). *L'ensemble des isotopies réduites qui appliquent le quasigroupe $Q$, avec unité, sur un même quasigroupe avec unité, $S$, est le produit du groupe des autotopies principales, $\mathfrak{A}_p$, de $Q$, par l'une quelconque des isotopies réduites qui projettent $Q$ sur $S$.*

(ij). *Si $k$ désigne le cardinal de l'ensemble des quasigroupes à unité, différents, isotopes principaux de $Q$, on a $|E^2| = |\mathfrak{A}_p|\, k$.*

(ijj). *Pour que tous les isotopes réduits de $Q$ soient distincts il faut et il suffit que $\mathfrak{A}_p = 1$.*

*Preuve.* (i). L'égalité des isotopes réduits $R = Q(\Delta_v, \Gamma_u, 1)$ et $S = Q(\Delta_t, \Gamma_w, 1)$ entraîne l'existence de l'autotopie principale de $Q$,

$$Q(\Delta_v \Delta_t^{-1}, \Gamma_u \Gamma_w^{-1}, 1) = Q.$$

Désignant celle-ci par $(X, Y, 1)$, on tire

$$\Delta_v = X\Delta_t \wedge \Gamma_u = Y\Gamma_w.$$

Ainsi, les isotopies réduites qui appliquent $Q$ sur $S$ sont les produits d'une autotopie principale de $Q$ par l'isotopie réduite $(\Delta_t, \Gamma_w, 1)$ qui projette $Q$ sur $S$.

Réciproquement, si $(X, Y, 1)$ est une autotopie principale quelconque de $Q$, on aura

$$Q(X, Y, 1)(\Delta_t, \Gamma_w, 1) = S.$$

Mais, d'après (N° 3, (ijj), $X\Delta_t \in \{\Delta\} \wedge Y\Gamma_w \in \{\Gamma\}$.

Les produits $X\Delta_t$ et $Y\Gamma_w$ sont des translations $\Delta_b$, $\Gamma_a$, de $Q$ et $Q(\Delta_b, \Gamma_a, 1) = S$, de sorte que l'isotopie $(\Delta_b, \Gamma_a, 1)$ applique bien $Q$ sur $S$. Ainsi, sur l'ensemble des isotopes réduits de $Q$, *la relation d'égalitè définit une partition dont les classes ont même puissance que le groupe des autotopies principales de $Q$.*

(ij), (ijj). Les deux dernière parties sont claires.

*Exemple.* Dans $F_{14}$, défini au N° 6, chaque isotope réduit figure trois fois.

**9. Partition d'isomorphisme.** Les isotopies réduites d'un quasigroupe $Q$, avec unité, définissent une relation d'équivalence, $\mathscr{R}$, sur $E^2$, deux éléments $(a, b)$ et $(c, d) \in E^2$ étant congrus toutes les fois que les itosopes réduits qui ont $(a, b)$ et $(c, d)$ pour couple de translation sont isomorphes,

(6) $$(a, b) \equiv (c, d), \quad \operatorname{mod} \mathscr{R} \rightleftharpoons Q(\Delta_a, \Gamma_b, 1) \cong Q(\Delta_c, \Gamma_d, 1).$$

L'équivalence $\mathscr{R}$ induit sur $E^2$ une double partition, obtenue en laissant $b$ fixe et faisant décrire $E$ à l'élément $a$ du couple de translation $(a, b)$, ou en laissant $a$ fixe et faisant décrire $E$ à $b$.

(i). *L'ensemble des isomorphismes qui projettent les uns sur les autres les divers quasigroupes d'un même bloc est un groupe* $\mathscr{H}$, *qui coïncide avec l'ensemble des éléments distincts de la* $3^{\text{ième}}$ *composante de* $\mathfrak{A}$ *et dont l'orde est l'index de* $\mathfrak{A}_P$ *dans* $\mathfrak{A}$; $|\mathscr{H}| = \mathfrak{A} : \mathfrak{A}_P$. *Ce groupe est le même pour tous les blocs.*

(ij). *La double partition d'isomorphisme définie sur* $E^2$ *par les isotopies réduites d'un quasigroupe* $Q = E(\ )$, *avec unité, est invariante par toute isotopie réduite de* $Q$. *Si* $S = Q(\Delta_a, \Gamma_b, 1)$; $C^{te} = a, b \in E$, *est un isotope réduit arbitraire de* $Q$, *l'ensemble des quasigroupes avec unité,* $Q(\Delta_q, \Gamma_r, 1)$, $q, r \in E$, *isotopes réduits de* $Q$, *coïncide avec l'ensemble analogue des isotopes réduits de* $S$.

*L'ensemble des isotopes réduits obtenus en laissant* $r$ *constant et égal à* $h$ *dans le* $1^{er}$ *cas* $(Q)$, *et* $r = h\Delta_a$ *dans le second* $(S)$, *est le même.*

(ijj). *Si* $QI$ *est dérivé de* $Q$ *par l'isotopie réduite* $I$, *si* $\mathscr{A}_I$ *et* $\mathfrak{A}_I$ *désignent respectivement les groupes d'automorphisme et d'autotopie de* $QI$, *alors* $|\mathfrak{A}_I| = |\mathfrak{A}| =$ *Constante.*

(iv). *L'ensemble des quasigroupes réduits isomorphes à* $QI$ *a pour cardinal l'index de* $\mathscr{A}_I$ *dans* $\mathfrak{A}_I$, $|C_i| = \mathfrak{A}_I : \mathscr{A}_I$. *Si* $Q$ *est fini d'ordre* $n$, $\Sigma_I(\mathfrak{A} : \mathscr{A}_I) = n^2$

(v). *L'ensemble des quasigroupes distincts, isotopes de* $Q$, *a pour cardinal* $(n!)^3/|\mathfrak{A}|$.

(vi). *L'ensemble des quasigroupes distincts, avec unité, isotopes de* $Q$, *a pour cardinal* $n^2n!/|\mathfrak{A}|$.

*Preuve.* (i). Soit un quasigroupe avec unité, $Q = E(\ )$, sur lequel on représente les translations par $\Delta$ et $\Gamma$. Le bloc $C_0$ de la partition d'isomorphisme est composé de ceux des isotopes réduits de $Q$ qui sont isomorphes à $Q$.

$$Q(\Delta_q, \Gamma_r, 1) = R = QT,$$

et l'isotopie $I = (\Delta_q, \Gamma_r, 1)\ T^{-1}$ est une autotopie de $Q$. Quand $T$ décrit l'ensemble $\mathscr{H}$ des isomorphismes qui projettent $Q$ sur les divers éléments de $C_0$, l'ensemble des $I$ correspondantes est le groupe d'autotopie, $\mathfrak{A}$, de $Q$, (N° 4). La $3^{\text{ième}}$ composante de $\mathfrak{A}$ consiste en tous les $T^{-1}$ (avec répétition si $\mathfrak{A}_P \neq 1$). Or il est évident que l'ensemble, $\mathscr{H}$, des éléments distincts de la $3^{\text{ième}}$ composante de $\mathfrak{A}$ est un groupe.

L'ensemble des autotopies $(X, Y, Z)$ qui ont en commun leur $3^{\text{ième}}$ composante, $Z$, est une classe latérale, dans $\mathfrak{A}$, par rapport au groupe $\mathfrak{A}_P$ des autotopies principales, car si $(X, Y, Z) \wedge (X', Y', Z) \in \mathfrak{A}$, $(X'X^{-1}, Y'Y^{-1}, 1) \in \mathfrak{A}_P$ et $(Y', X', Z) = (\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)\ (X, Y, Z)$,

$$\{(X', Y', Z)\} = \mathfrak{A}_P(X, Y, Z).$$

Donc

$$|\mathscr{H}|\,|\mathfrak{A}_P| = |\mathfrak{A}|.$$

Soit $C_i$ une classe quelconque de l'équivalence, consistant en tous les isotopes réduits de $Q$, isomorphes à $S$,

$$S = Q(\Delta_a, \Gamma_b, 1). \tag{7}$$

$C_i$ est aussi l'ensemble des isotopes réduits de $S$, isomorphes à $S$. En effet, soit $U$ un isotope réduit quelconque de $Q$,

$$U = Q(\Delta_f, \Gamma_g, 1). \tag{8}$$

En tenant compte de (7),

$$U = S(\Delta_a, \Gamma_b, 1)^{-1}(\Delta_f, \Gamma_g, 1),$$
$$U = S(\Delta_a^{-1}\Delta_f, \Gamma_b^{-1}\Gamma_g, 1).$$

Mais, d'après (1) & (2), N° 3, (ijj), avec $X = \Delta_a$ et $Y = \Gamma_b$, on a

$$\Delta_a^{-1}\Delta_f = \delta_{f\Gamma_b} \wedge \Gamma_b^{-1}\Gamma_g = \gamma_{g\Delta_a},$$

$\delta$ et $\gamma$ étant les translations de $S$. Enfin

$$U = S(\delta_{f\Gamma_b}, \gamma_{g\Delta_a}, 1). \tag{9}$$

Si $U$ est isomorphe à $S$, les égalités (8) et (9) montrent que les isotopes réduits de $Q$, isomorphes à $S$, sont les mêmes que les isotopes réduits de $S$, isomorphes à $S$. Le groupe d'autotopie de $S$ est le transformé (N° 3, (v) par $(\Delta_a, \Gamma_b, 1)$ de celui de $Q$. Donc la $3^{ième}$ composante de ce groupe est identique à celle de $Q$. D'après la première partie, le groupe $\mathscr{H}$ relatif à $C_i$ coïncide avec celui de $C_0$.

(ij). Si l'on ne suppose rien sur l'isomorphisme de $U$ et de $S$, la comparaison de (8) et de (9) montre que

$$S(f\Gamma_b, g\Delta_a) = Q(f, g). \tag{10}$$

Comme $f$ et $g$ décrivent $E$ en même temps que $f\Gamma_b$ et $g\Delta_a$, l'ensemble des isotopes réduits $(q, r)$ de $Q$ où l'on donne à $r$ la valeur constante $h$ est le même que l'ensemble des isotopes réduits $(q, r)$ de $S$ où $r$ garde la valeur constante $h\Delta_a$. On arrive à la conclusion analogue pour $q = \mathrm{i}$ et $q = \mathrm{i}\Gamma_b$.

Soit $\mathscr{C} = (C_0, C_1, \ldots)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme,

$$C_i = \{Q(\Delta_q, \Gamma_r, 1) \mid Q(q, r) \cong R\}.$$

A chaque couple de translation $(q, r)$ correspond une classe et une seule. On a ainsi défini une application de $E^2$ sur $\mathscr{C}$, c.-à-d. un système défectif $(E * E \to \mathscr{C}) = T_Q$, où, à chaque couple $(q, r)$ correspond la classe $C_i$ à laquelle appartient l'isotope réduit $Q(\Delta_q, \Gamma_r, 1)$. Si l'on remplace $Q$ par son isotope réduit $S = Q(\Delta_a, \Gamma_b, 1)$, on obtient un nouveau système défectif, $T_S$, *qui est dérivé du premier par l'isomérie* $(\Gamma_b, \Delta_a, 1)$. Sur les tables de Cayley de $T_S$ et de $T_Q$, à l'ordre près, les lignes et les colonnes sont invariantes.

(ijj) résulte immédiatement du N° 3 (v) et les trois derniers énoncés sont évidents.

*Exemple I.* Dans $F_{14}$, défini au N° 6, on a

$$|\mathscr{A}| = 3; \quad |\mathfrak{A}| = 108; \quad |\mathfrak{A}_F| = 36; \quad |\mathscr{C}| = |C_0| = 36;$$
$$|\mathfrak{A}_p| = 3; \quad |\mathscr{H}| = 36.$$

*Exemple II.* Soit $F_3$, défini par ses translations $\Delta_0 = 1$; $\Delta_1 = 01.2534$; $\Delta_2 = 021543$; $\Delta_3 = 031245$; $\Delta_4 = 041352$; $\Delta_5 = 0514.23$. On a

$$|\mathscr{A}| = 1; \quad |\mathfrak{A}| = 4; \quad |\mathfrak{A}_F| = 4; \quad |C_i| = 4, \ (i = 0, 1, 2, \ldots, 8)$$
$$|\mathfrak{A}_p| = 1; \quad |\mathscr{H}| = 4.$$

*Exemple III.* Soit $G$ le quasigroupe deu 5° ordre, non isomorphe au groupe cyclique, et défini par ses translations, $\Delta_0 = 1$; $\Delta_1 = 01.234$; $\Delta_2 = 024.13$; $\Delta_3 = 032.14$; $\Delta_4 = 043.12$.

On a $|\mathfrak{A}_p| = 1$; $|\mathscr{H}| = 12$; $\mathscr{C} = (C_0, \ldots, C_4)$

| | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert\mathscr{A}\rvert$ | 3 | 12 | 3 | 3 | 1 |
| $\lvert\mathscr{C}_i\rvert$ | 4 | 1 | 4 | 4 | 12 |
| $\lvert\mathfrak{A}_i\rvert$ | 12 | 12 | 12 | 12 | 12. |

$T_G =$

| $r \backslash q$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $C_0$ | $C_2$ | $C_4$ | $C_4$ | $C_4$ |
| 1 | $C_1$ | $C_3$ | $C_3$ | $C_3$ | $C_3$ |
| 2 | $C_0$ | $C_4$ | $C_4$ | $C_4$ | $C_2$ |
| 3 | $C_0$ | $C_4$ | $C_2$ | $C_4$ | $C_4$ |
| 4 | $C_0$ | $C_4$ | $C_4$ | $C_2$ | $C_4$. |

Si l'on remplace $G$ par son isotope réduit

$$S = G(\Delta_1, \Gamma_3, 1)$$

$T_S =$

| $r \backslash q$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $C_3$ | $C_3$ | $C_3$ | $C_1$ | $C_3$ |
| 1 | $C_4$ | $C_4$ | $C_4$ | $C_0$ | $C_2$ |
| 2 | $C_4$ | $C_4$ | $C_2$ | $C_0$ | $C_4$ |
| 3 | $C_2$ | $C_4$ | $C_4$ | $C_0$ | $C_4$ |
| 4 | $C_4$ | $C_2$ | $C_4$ | $C_0$ | $C_4$ |

$$T_S = T_G(03214;\ 01.234;\ 1) = T_G(\Gamma_3, \Delta_1, 1).$$

**Monomorphisme.** Une espèce intéressante de quasigroupes, pouvant faire l'objet d'une étude ultérieure, est celle des *G-quasigroupes*, ou *quasigroupes avec unité dont la partition d'isomorphisme a des blocs de même puissance*, $C_i$ = Constante.

*Exemple*. Dans $F_3$, défini au N° 9, ex. II, en représentant $F_3(\Delta_q, \Gamma_r, 1,$ par son couple de translations $(q, r)$ on a les 9 classes d'isomorphisme

$$C_0 = \{00 \equiv 40 \equiv 03 \equiv 43\},$$
$$C_1 = \{10 \equiv 20 \equiv 33 \equiv 53\},$$
$$C_2 = \{01 \equiv 02 \equiv 44 \equiv 45\},$$
$$C_3 = \{30 \equiv 50 \equiv 13 \equiv 23\},$$
$$C_4 = \{41 \equiv 42 \equiv 04 \equiv 05\},$$
$$C_5 = \{11 \equiv 52 \equiv 34 \equiv 25\},$$
$$C_6 = \{21 \equiv 32 \equiv 54 \equiv 15\},$$
$$C_7 = \{51 \equiv 12 \equiv 24 \equiv 35\},$$
$$C_8 = \{31 \equiv 22 \equiv 14 \equiv 55\}.$$

Tous les isotopes réduits d'un $G$-quasigroupe ont des groupes d'automorphisme du même ordre. C'est le cas, par exemple, si le complexe des autotopies homogènes se réduit à l'identique; alors $\mathscr{A} = 1$ pour tous les blocs et $|C_i| = |\mathfrak{A}|$.

Les cas limites de cette *monomorphie* correspondent d'une part, aux quasigroupes dont le groupe d'autotopie se réduit à l'identique; tous les blocs de la partition sont alors monômes, d'autre part, aux quasigroupes avec unité qui sont isomorphes à tous leurs isotopes réduits, quasigroupes envisagés en [11], [16] [5] et en [6], Chap X, p. 175, nommés $G$-loops par Valentin Belousov et dont l'équivalence es universelle, (une seule classe).

## III. SYSTÈMES ASSOCIATIFS

Dans ce qui suit, sauf mention contraire, $S$ désigne toujours un système associatif.

**11. Structure de $\mathfrak{A}_P$,** *Le groupe, $\mathfrak{A}_P$, des autotopies principales d'un système associatif quelconque, $S = E(\ )$, a pour éléments $(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)$ où $m$ décrit le groupe, $\mathscr{B}$,* (N° 2, vij), *des éléments non-singuliers de $S$.*

*Preuve*. D'après N° 3, (ix), (i) et (ij), tout isotope principal, $S(\Delta_u, \Gamma_v, 1)$ de $S$ est isomorphe à $S$ et coïncide avec lui par l'isomorphisme $\Delta_u\Gamma_v$,

$$S(\Delta_u, \Gamma_v, 1) = S\Delta_u\Gamma_v. \tag{11}$$

Pour que cet isotope principal soit égal à $S$ il faut et il suffit que $\Delta_u \Gamma_v$ soit un automorphisme de $S$, ce qui exige

$$\forall x, y \in E, \ (vxu)\,(vyu) = v(xy)\,u.$$

Comme $u$ et $v$ sont non-singuliers, ce sont des éléments cancellables d'où

$$\forall x, y \in E, \quad xuvy = xy.$$

En particulier pour $x = y = e$, [si $\mathscr{B} \neq 0$, $S$ a une unité, $e$, N° 2 **(ix)**],

$$uv = e, \quad u = v^{-1},$$

$u$ est l'inverse de $v$ dans le groupe $\mathscr{B}$. Toute autotopie principale de $S$ est donc $(\Delta_m, \Gamma_{m^{-1}}, 1)$, où $m$ décrit $\mathscr{B}$. Mais

$$\Gamma_m \Gamma_{m^{-1}} = \Gamma_{mm^{-1}} = \Gamma_e = 1,$$

donc

$$\Gamma_{m^{-1}} = (\Gamma_m)^{-1}.$$

Finalement, toute autotopie principale de $S$ est $(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)$, $m \in \mathscr{B}$. L'ensemble $\mathfrak{A}_P$ de ces autotopies est visiblement un groupe isomorphe à $\{\Delta_m\}$ et par conséquent au groupe $\mathscr{B}$ des éléments non-singuliers de $S$.

**12. Structure de $\mathfrak{A}_F$.** *On peut adopter comme système de représentants des autotopies fondamentales le complexe $\mathfrak{A}_F = \{(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v \Gamma_u)\}$ où $u$ et $v$ décrivent le groupe $\mathscr{B}$ des éléments non-singuliers de $S$. Alors $\mathfrak{A}_F$ est un groupe, isomorphe à $\mathscr{B}^2$ et égal au produit direct des sous-groupes* $(1, \Delta_v, \Delta_v)$ et $(\Gamma_u, 1, \Gamma_u)$.

*Preuve.* D'après le N° 4, toute autotopie d'un système associatif, $S = E(\ )$, avec élément neutre, est $I = (\Delta_v, \Gamma_u, 1)\,T$, où u et $v \in \mathscr{B}$ et où $T$ est l'un quelconque des isomorphismes qui appliquent $S(\Delta_v, \Gamma_u, 1)$ sur $S$,

$$S(\Delta_v, \Gamma_u, 1)\,T = S.$$

Mais on a [N° 11, équ. (11)],

$$\forall u, v \in \mathscr{B}, \quad S(\Delta_v, \Gamma_u, 1) = S(\Delta_v \Gamma_u),$$

d'où

$$ST^{-1} = S(\Delta_v \Gamma_u).$$

Le produit $\Delta_v \Gamma_u\, T$ est donc un automorphisme, $X$, de $S$ et

$$T = \Gamma_u^{-1} \Delta_v^{-1} X, \ X \in \mathscr{A}.$$

Toute autotopie de $S$ est ainsi

$$I = (\Delta_v, \Gamma_u, 1)\,T = (\Delta_v \Gamma_u^{-1} \Delta_v^{-1};\ \Gamma_u \Gamma_u^{-1} \Delta_v^{-1};\ \Gamma_u^{-1} \Delta_v^{-1})\,X.$$

Comme $S$ est associatif, $\forall x,\ y \in E,\ \Delta_x \Gamma_y = \Gamma_y \Delta_x$, donc

$$I = (\Gamma_u^{-1},\ \Delta_v^{-1},\ \Gamma_u^{-1}\Delta_v^{-1})\ X$$

ou, par un changement de notation évident, puisque u, $v \in \mathscr{B}$,

$$I = (\Gamma_u,\ \Delta_v,\ \Delta_v \Gamma_u)\ X, \qquad X \in \mathscr{A},$$

en choisissant $X = 1$

$$\mathfrak{A}_F = \{(\Gamma_u,\ \Delta_v,\ \Delta_v\Gamma_u)\}, \qquad u, v \in \mathscr{B}.$$

Il est clair que, lorsque $u$ et $v$ décrivent $\mathscr{B}$, $\mathfrak{A}_F$ décrit un groupe isomorphe à $\mathscr{B}^2$.

Enfin, tout système associatif possède les autotopies évidentes $(1,\ \Delta_v,\ \Delta_v)$ et $(\Gamma_u,\ 1,\ \Gamma_u)$ et $\mathfrak{A}_F$ est le produit direct des deux groupes qu'elles forment.

**13. Structure de $\mathfrak{A}$.** D'après le N° 4, le groupe d'autotopie de $S$ est le produit de complexes de $\mathfrak{A}_F$ par $\mathscr{A}$, groupe d'automorphisme de $S$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_F \mathscr{A}.$$

**14. Propriétés de $\mathscr{A}$.**

(i). $$\mathscr{A} \cap \mathfrak{A}_P = 1,$$

(ij . $$\mathscr{A} \cap \mathfrak{A}_F = 1.$$

(ijj). *Pour que $\mathscr{A}$ soit normal dans $\mathfrak{A}$ il faut et il suffit que tout élément de $\mathscr{A}$ soit permutable avec tout élément de $\mathfrak{A}_F$, ou, ce qui revient au même, qu'aucun élément non-singulier de $S$ ne soit déplacé par $\mathscr{A}$ et alors $\mathfrak{A}$ est le produit direct des sous-groupes $\mathscr{A}$ et $\mathfrak{A}_F$.*

*Preuve.* (i) La 3^ième^ composante de tout élément de $\mathfrak{A}_P$ étant identique, la seule autotopie principale qui puisse être un automorphisme est l'identique.

(ij). Pour que $(\Gamma_u,\ \Delta_v,\ \Delta_v\Gamma_u) \in \mathfrak{A}_F$ soit un automorphisme il faut et il suffit que ses trois composantes soient égales, or

$$\Delta_v = \Delta_v \Gamma_u \Rightarrow \Gamma_u = 1.$$

(ijj). Tout élément de $\mathfrak{A}$ est, (N° 12).

$$(\Gamma_u,\ \Delta_v,\ \Delta_v\Gamma_u)\ X, \quad u, v \in \mathscr{B}, \quad X \subset \mathscr{A}.$$

Soit $U \in \mathscr{A}$ un automorphisme quelconque de $S$. Pour que $\mathscr{A}$ soit normal dans $\mathfrak{A}$ il faut et il suffit que

$$X^{-1}(\Gamma_u,\ \Delta_v,\ \Delta_v\Gamma_u)^{-1}\ U(\Gamma_u,\ \Delta_v,\ \Delta_v\Gamma_u)\ X$$

soit un automorphisme de $S$, soit $V$. Donc, en posant $XVX^{-1} = W \in \mathscr{A}$, on aura

(12) $$\Gamma_u^{-1} U \Gamma_u = W,$$

(13) $$\Delta_v^{-1} U \Delta_v = W,$$

(14) $$\Gamma_u^{-1} \Delta_v^{-1} U \Delta_v \Gamma_u = W.$$

Portant (12) dans (14),

$$\Gamma_u^{-1} \Delta_v^{-1} U \Delta_v \Gamma_u = \Gamma_u^{-1} U \Gamma_u.$$

Simplifiant

$$\Delta_v^{-1} U \Delta_v = U.$$

Donc, d'après (13), $U = W$ et la condition cherchée est

$$\begin{cases} (\Gamma_u)^{-1} U \Gamma_u = U, \\ (\Delta_v)^{-1} U \Delta_v = U, \end{cases}$$

dont (14) résulte. Elle s'écrit

(15) $$\begin{cases} U^{-1} \Gamma_u U = \Gamma_u, \\ U^{-1} \Delta_v U = \Delta_v \end{cases} \qquad \forall u, v \in \mathscr{B}, \qquad \forall U \in \mathscr{A}.$$

Sous cette forme elle exprime que tout élément de $\mathscr{A}$ est permutable avec tout élément $(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v \Gamma_u)$ de $\mathfrak{A}_F$. Comme, d'autre part, (ij), $\mathscr{A} \cap \mathfrak{A}_F = 1$, on voit que, sous (15), $\mathfrak{A}$ contient le produit direct $\mathfrak{A}_F \times \mathscr{A}$. Mais (N° 4), $\mathfrak{A}$ est le produit de complexes $\mathfrak{A}_F \mathscr{A}$; donc $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_F \times \mathscr{A}$.

La condition (15), d'après N° 3, (xi), équ. (5), est equivalente à la suivante

$$\Gamma_{uU} = \Gamma_u \wedge \Delta_{uU} = \Delta_v$$

ou

$$uU = u \wedge vU = v.$$

Cela signifie que $\mathscr{A}$ laisse fixe tout élément non singulier de $S$.

**15. Propriétés de $\mathfrak{A}_P$.** (i). *Aux isomorphismes près, le groupe des autotopies principales, $\mathfrak{A}_P = \{(X, Y, 1)\}$, d'un système quelconque $S$, est invariant isotopique.*

(ij). *Le groupe des autotopies principales de $S$ est normal dans le groupe d'autotopie,*

$$\mathfrak{A}_P \triangleleft \mathfrak{A}.$$

(ijj). *Si $S$ est associatif, pour que $\mathfrak{A}_P$ soit contenu dans le centre de $\mathfrak{A}$ il faut et il suffit que $\mathscr{A}$ appartienne au centralisateur de $\mathfrak{A}_P$ et alors $\mathscr{B}$ est abélien.*

*Preuve.* (i). Si $R = S(p, q, r) = ST$, toute autotopie principale $(X, Y, 1)$ de $S$ devient, d'après N° 3, (v), une autotopie principale $(p^{-1}Xp, q^{-1}Yq, 1)$ de $R$ et vice-versa. Si $\mathfrak{A}'_P$ est le groupe des autotopies principales de $R$, on a

$$\mathfrak{A}'_P = T^{-1}\mathfrak{A}_P T,$$

et ainsi les deux groupes sont isomorphes.

(ij). D'après (i), si $T = (X, Y, Z)$ est une autotopie quelconque de $S$, la transformée d'une autotopie principale quelconque de $S$ par $T$ est encore une autotopie principale de $S$. Donc $\mathfrak{A}_P$ est transformé en lui-même par tout élément de $\mathfrak{A}$; il est normal dans $\mathfrak{A}$.

Il en résulte que $\mathfrak{A}_P$ sera encore normal dans tout sous-groupe compris entre lui et $\mathfrak{A}$; en particulier

$$\mathfrak{A}_P \lhd \mathfrak{A}_F \leftrightarrows \mathfrak{A}_P \subset \mathfrak{A}_F.$$

On est conduit à étudier l'intersection $\mathfrak{A}_F \cap \mathfrak{A}_P$ (Cf, N° 17 infra.),

(ijj). Pour que $\mathfrak{A}_P$ soit dans le centre de $\mathfrak{A}$ il faut et il suffit que tout élément $(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)$ de $\mathfrak{A}_P$ soit permutable avec tout élément $(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v\Gamma_u)\, X$ de $\mathfrak{A}$ pour tous $u$, $v$, $m$ dans $\mathscr{B}$ et tout $X \in \mathscr{A}$

$$(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)\,(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v\Gamma_u)\, X = (\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v\Gamma_u)\, X(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1),$$

ou

$$\begin{cases} \Delta_m\Gamma_u X = \Gamma_u X\Delta_m, \\ \Gamma_m^{-1}\Delta_v X = \Delta_v X\Gamma_m^{-1}. \end{cases}$$

La condition, sur la $3^{ième}$ composante, est toujours satisfaite. Les deux autres, en observant que $\Delta_m\Gamma_u = \Gamma_u\Delta_m$, puisque $S$ est associatif, et en cancellant, ce qui est légitime puisque $u$, $v$, $m$ sont non-singuliers, deviennent

$$\forall m \in \mathscr{B}, \quad \forall X \in \mathscr{A}, \quad \Delta_m X = X\Delta_m \wedge \Gamma_m X = X\Gamma_m,$$

ce qui est équivalent, comme au N° 14, in fine, à

$$mX = m.$$

*Tout automorphisme de S laisse $\mathscr{B}$ invariant terme à terme* et puisque $\mathscr{B} \cong \mathfrak{A}_P$, (N° 11), $\mathscr{A}$ est dans le centralisateur de $\mathfrak{A}_P$.

Que $\mathscr{B}$ soit alors abélien résulte du fait que, n'importe quel automorphisme de $S$ devant laisser fixe tout $p \in \mathscr{B}$, si l'on applique cela à l'automorphisme interne $\Delta_m\Gamma_m^{-1}$, (N° 2, xix), on aura

$$\forall m,\ p \in \mathscr{B}, \quad p\,\Delta_m\Gamma_m^{-1} = p$$

ou

$$p\Delta_m = p\Gamma_m \rightleftarrows pm = mp.$$

*Remarque*. La comparaison de N° 14 (ijj) et de N°15 (ijj) fournit les implications suivantes,

N° 14. I $\mathscr{A} \lhd \mathfrak{A} \rightleftharpoons$ II, Tout élément de $\mathscr{A}$ est permutable avec tout élément de $\mathfrak{A}_F \rightleftharpoons$ III, $\mathscr{A}$ ne déplace aucun élément de $\mathscr{B} \rightleftharpoons$ IV, $\mathfrak{A} = \mathscr{A} \times \mathfrak{A}_F$. N° 15. V, $\mathfrak{A}_P$ est dans le centre de $\mathfrak{A} \rightleftharpoons$ VI, $\mathscr{A}$ est dans le centralisateur de $\mathfrak{A}_p \rightleftharpoons$ III, $\mathscr{A}$ laisse $\mathscr{B}$ invariant terme à terme.

On a donc, dans tout système associatif

$$\mathrm{I} \rightleftharpoons \mathrm{II} \rightleftharpoons \mathrm{III} \rightleftharpoons \mathrm{IV} \rightleftharpoons \mathrm{V}.$$

**16. Propriété de $\mathfrak{A}_F$.** *$\mathfrak{A}_F$ est normal dans $\mathfrak{A}$, le groupe quotient est isomorphe à $\mathscr{A}$.*

*Preuve*. Tout élément de $\mathfrak{A}_F$ est $T = (\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v\Gamma_u)$. Tout élément de $\mathfrak{A}$ est $U = (\Gamma_m, \Delta_n, \Delta_n\Gamma_m)\, X$, $\forall m, n \in \mathscr{B}$, $\forall X \in \mathscr{A}$. La transformée de $T$ par $U$ est

$$(16) \qquad X^{-1}[(\Gamma_m, \Delta_n, \Delta_n\Gamma_m)^{-1}\, T(\Gamma_m, \Delta_n, \Delta_n\Gamma_m)]\, X.$$

L'expression entre crochets, étant le produit de trois éléments du groupe $\mathfrak{A}_F$, est elle-même un élément de ce groupe. La transformée devient

$$X^{-1}(\Gamma_r, \Delta_s, \Delta_s\Gamma_r)\, X, \qquad r, s \in \mathscr{B}.$$

Comme $X$ est un automorphisme et comme $\Delta_s$, $\Gamma_r$ (et leur produit) sont des bijections de $E$, $X$ les transforme en nouvelles translations qui sont encore des permutations de $\mathfrak{S}_E$; autrement dit

$$(17) \qquad \exists h, k \in \mathscr{B}, \quad X^{-1}(\Gamma_r, \Delta_s, \Delta_s\Gamma_r)\, X = (\Gamma_h, \Delta_k, \Delta_k\Gamma_h).$$

Le second membre est un élément de $\mathfrak{A}_F$. Tout élément de $\mathfrak{A}$ transforme $\mathfrak{A}_F$ en lui-même et $\mathfrak{A}_F \lhd \mathfrak{A}$.

Si $T, T', T'', \ldots \in \mathfrak{A}_F$ et $X, X', \ldots \in \mathscr{A}$, on a

$$(TX)\,(T'X') = X(X^{-1}TX)\,(T'X'),$$

d'après (17),

$$(TX)\,(T'X') = XT''T'X' = XT'''X^{-1}(XX') = T^{\mathrm{iv}}(XX').$$

Le groupe quotient est donc isomorphe à $\mathscr{A}$.

**17. Propriétés de l'ensemble $\{\mathfrak{A}_P, \mathfrak{A}_F\}$.** (i). *Le centralisateur de $\mathfrak{A}_P$ dans le groupe d'autotopie est le produit de complexes $\mathfrak{A}_F\mathscr{A}_1$, où $\mathscr{A}_1$ désigne le sous groupe des automorphismes qui laissent fixes tous les éléments non-singuliers.*

(ij). *L'intersection de $\mathfrak{A}_P$ et de $\mathfrak{A}_F$ a pour éléments $(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)$ où $m$ parcourt l'ensemble des éléments centraux non-singuliers de $S$.*

(ijj). *Les trois affirmations suivantes sont équivalentes:*
(a). $\mathfrak{A}_P$ *est contenu dans* $\mathfrak{A}_F$,
(b). $\mathscr{B}$ *est contenu dans le centre de* $S$,
(c). $\mathfrak{A}_P$ *est normal dans* $\mathfrak{A}_F$.

$$\mathfrak{A}_P \subseteq \mathfrak{A}_F \rightleftarrows \mathscr{B} \subseteq \mathfrak{Z}_S \rightleftarrows \mathfrak{A}_P \lhd \mathfrak{A}_F.$$

*Preuve.* (i). Tout élément de $\mathfrak{A}_P$ est, (N° 11),

$$(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}. 1), \qquad m \in \mathscr{B}.$$

Tout élément de $\mathfrak{A}$ est, (N° 12—13),

$$(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v\Gamma_u)\, X, \qquad u, v \in \mathscr{B}, \qquad X \in \mathscr{A}.$$

Le second sera dans le centralisateur de $\mathfrak{A}_P$ si

$$X^{-1}(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v\Gamma_u)^{-1}\, (\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)\, (\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v\Gamma_u)\, X = (\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1).$$

ou,

$$X^{-1}(\Gamma_u^{-1}\Delta_m\Gamma_u, \Delta_v^{-1}\Gamma_m^{-1}\Delta_v, \Gamma_u^{-1}\Delta_v^{-1}\Delta_v\Gamma_u)\, X = (\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1),$$

ou,

$$X^{-1}(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)\, X = (\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1),$$

ou enfin, si $X$ satisfait

$$\forall m \in \mathscr{B}, \qquad X^{-1}\Delta_m X = \Delta_m \wedge X^{-1}\Gamma_m^{-1}X = \Gamma_m^{-1}.$$

D'après N° 3 (xi), équ. (5),

$$\Delta_{mX} = \Delta_m \wedge \Gamma_{mX} = \Gamma_m.$$

Comme $m$ est non-singulier, comme son image par un automorphisme, $X$, est encore un élément non-singulier, et d'après N° 2 vijj, $mX = m$; $X$ ne déplace aucun élément non-singulier; $X \in \mathscr{A}_1$. Quand $X_1$ décrit $\mathscr{A}_1$ l'élément $(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v\Gamma_u)\, X_1$ décrit le centralisateur $\mathfrak{A}_P\mathscr{A}_1$ de $\mathfrak{A}_P$.
Si $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}$, on retrouve la remarque finale du N° 15.

(ij). Tout élément de $\mathfrak{A}_P$ est $(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)$, $m \in \mathscr{B}$; toute autotopie fondamentale est $(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v\Gamma_u)$, $u, v \in \mathscr{B}$. Tout élément commun à ces deux groupes satisfera aux conditions nécessaires et suffisantes suivantes,

$$\left.\begin{aligned} &(18) & \Delta_m &= \Gamma_u, \\ &(19) & \Gamma_m^{-1} &= \Delta_v, \\ &(20) & 1 &= \Delta_v\Gamma_u. \end{aligned}\right\} \quad u, v, m \in \mathscr{B}.$$

On tire de (18) et (19)

$$\Delta_v\Gamma_u = \Gamma_m^{-1}\Delta_m,$$

d'où, d'après (20)

$$\Delta_m = \Gamma_m,$$

$$\forall x \in E, \qquad xm = mx.$$

Cela exprime que l'élément non-singulier $m$ est dans le centre de $S$,

$$m \in \mathfrak{Z}_S.$$

Pour obtenir l'intersection de $\mathfrak{A}_P$ et de $\mathfrak{A}_F$, il faut donc faire décrire à $m$ l'intersection $\mathscr{B} \cap \mathfrak{Z}_S$. On a alors

$$\mathfrak{A}_P \cap \mathfrak{A}_F = \{(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)\} \cong \mathscr{B} \cap \mathfrak{Z}_S.$$

*Remarque.* $\mathscr{B} \cap \mathfrak{Z}_S$ n'est pas, en général, le centre de $\mathscr{B}$. Par exemple $\mathfrak{S}_3$ a pour centre l'identique alors que tous ses sous-groupes sont abéliens.

(ijj). $(a) \rightleftharpoons (c)$, D'après N° 15 (ij), $\mathfrak{A}_P$ est normal dans le groupe d'autotopie; donc il est normal dans tout sous-groupe, $\mathfrak{A}_F$, compris entre lui et $\mathfrak{A}$. Réciproquement, si $\mathfrak{A}_P$ est normal dans $\mathfrak{A}_F$ il est évidemment contenu dans $\mathfrak{A}_F$.

$(a) \rightleftharpoons (b)$ résulte immédiatement de (ij), car si $\mathfrak{A}_P$ est contenu dans $\mathfrak{A}_F$ l'intersection de ces deux groupes est $\mathfrak{A}_P$ et les éléments non-singuliers de $S$ sont tous centraux; donc $\mathscr{B} \subseteq \mathfrak{Z}_S$.

Réciproquement, si $\mathscr{B} \subseteq \mathfrak{Z}_S$, tous les éléments de $\mathscr{B}$ sont centraux donc, (ij), $\mathfrak{A}_P \cap \mathfrak{A}_F = \mathfrak{A}_P$ ou (a).

**18. Propriétés de l'ensemble $\mathfrak{A}_P$, $\mathfrak{A}_F$, $\mathfrak{A}$.** (i). *Pour que $\mathfrak{A}$ contienne le produit direct $\mathfrak{A}_P \times \mathfrak{A}_F$ il faut et il suffit que le seul élément central non-singulier de $S$ soit $e$; $\mathscr{B} \cap \mathfrak{Z}_S = e$, $\mathscr{B} \neq \emptyset$.*

(ij). *Pour que $\mathfrak{A}$ soit égal au produit direct $\mathfrak{A}_P \times \mathfrak{A}_F$ il faut et il suffit que $S$ soit complet, $\mathscr{B} = \emptyset$.*

*Preuve.* (i). Tout élément de $\mathfrak{A}_P$ est permutable avec tout élément de $\mathfrak{A}_F$ car, d'après N° 17 (i), tout élément de $\mathfrak{A}_P$ est permutable avec tout élément du produit $\mathfrak{A}_F\mathscr{A}_1$, qui contient $\mathfrak{A}_F$. Donc, pour que le produit direct $\Pi = \mathfrak{A}_P \times \mathfrak{A}_F$ soit défini il faut et il suffit que ces deux sous-groupes n'aient en commun que l'identique. Or, d'après N° 17, (ij), cette condition est équivalente à celle de l'énoncé: $\mathscr{B} \cap \mathfrak{Z}_S = e$.

Comme $\mathfrak{A}_P$ et $\mathfrak{A}_F$ sont deux sous-groupes de $\mathfrak{A}$, pour que $\mathfrak{A}$ contienne leur produit direct il faut et il suffit que ce produit soit défini, c'est-à-dire que $\mathscr{B} \cap \mathfrak{Z}_S = e$.

(ij). Pour que $\mathfrak{A}$ soit égal à $\Pi$ il faut et il suffit que, en outre, ce produit contienne $\mathscr{A}$, autrement dit, que l'intersection de $\Pi$ et de $\mathscr{A}$ soit $\mathscr{A}$ lui-même. Mais

$$\Pi = \mathfrak{A}_P \times \mathfrak{A}_F = \mathfrak{A}_P\mathfrak{A}_F.$$

Or il est facile de voir que $\mathfrak{A}_P\mathfrak{A}_F \cap \mathscr{A}$ est le groupe des automorphismes internes de $S$ (N° 2, (xix). En effet, appelons $X$ un automorphisme quelconque de $S$ et désignons par $T$,

$$T = (\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)\,(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v\Gamma_u),$$

un élément arbitraire de $H$. Pour que $T$ appartienne à $\mathscr{A}$ il faut et il suffit que

$$\Delta_m\Gamma_u = \Gamma_m^{-1}\Delta_v = \Delta_v\Gamma_u = X \in \mathscr{A}.$$

D'où $u = m^{-1}$, $v = m$, $X = (x \to m^{-1}xm)$.
Quand $m$ décrit $\mathscr{B}$, $X$ décrit le groupe des automorphismes internes de $S$. La condition cherchée est donc que $\mathscr{A}$ coïncide avec ce groupe, c'est-à-dire que $S$ ne possède que des automorphismes internes. Cela, joint à la condition précédente, (i), que le seul élément central de $\mathscr{B}$ dans $S$ soit l'unité, exprime que $S$ est complet, au sens du N° 2, (xx).

**19. Groupes.** Quand $S$ est à la fois un quasigroupe et un système associatif, et par suite un groupe, il possède en même temps les propriétés de ces deux structures et l'on retrouve les résultats de [22].

## FORMULAIRE

**N° 3**, ijj. $\delta_{vY} = X^{-1}\Delta_v$; $\gamma_{uX} = Y^{-1}\Gamma_u$; $(x, y \in \mathfrak{S}_E)$; $S$ quelconque avec unité.

**N° 3**, xi. $X^{-1}\Delta_m X = \Delta_{mX}$, $X \in \mathscr{A}$; $m \in \mathscr{B}$; $S$ quelconque avec unité.

**N° 6, N° 11.** $\mathfrak{A}_P = \{(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)\}$ $\left\{\begin{array}{l} m \in \text{nucleus an milieu; } S = \text{quasi-groupe} \\ m \in \mathscr{B};\ S \text{ associatif.}\end{array}\right.$

**N° 4, N° 12.** $\mathfrak{A}_F = \{(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v\Gamma_u)\}$; $u, v \in \mathscr{B}$; $S$ associatif.

**N° 4, N° 13.** $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_F\mathscr{A}$; $S =$ quelconque, $\mathscr{B} \neq \emptyset$.

**N° 9.** $|\mathscr{H}| = \mathfrak{A}: \mathfrak{A}_P$; $|C_i| = \mathfrak{A} : \mathscr{A}_I$ quasigroup à mité; $\Sigma_I(\mathfrak{A}: \mathscr{A}_I) = |E|^2$; $S =$ quasigroupe.

**N° 17.** $\mathfrak{A}_P \subseteq \mathfrak{A}_F \rightleftharpoons \mathscr{B} \subseteq \mathfrak{Z}_S \rightleftharpoons \mathfrak{A}_P \lhd \mathfrak{A}_F$; $S$ associatif.

**N° 18.** $\mathfrak{A}_P \times \mathfrak{A}_F \subset \mathfrak{A} \rightleftharpoons \mathscr{B} \cap \mathfrak{Z}_S = e$, $\mathscr{B} \neq \emptyset$; $S$ associatif;
$\mathfrak{A}_P \times \mathfrak{A}_F = \mathfrak{A} \rightleftharpoons \mathscr{B} \cap \mathfrak{Z}_S = e \wedge \mathscr{A} = \{\Gamma_m^{-1}\Delta_m\}$; associatif.

## RÉFÉRENCES


[1] Adrian A. Albert, *Quasigroups I*, Trans. Amer. Math. Soc. 54, (1943), 507 519.

[2] Antonio Almeida Costa, *Cours d'Algèbre Générale, I*. Edit. Fundaçáo Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1964.

[3] Rafael Artzy, *Crossed-inverse and related loops*, Trans. Amer. Math. Soc. 91, (1959), 480—492.

[4] Reinhold Baer, *Zur Einordnung der Theorie der Mischgruppen in die Gruppentheorie*, Sitz. Heidelberger Akad. d. Wissenschaften, (1928), 3—18.

[5] В. Д. Белоусов, (Belousov), Лулы с ядром индекса два, Izdat. „Karta Moldovenjaske". Kishinev (1965), 11—21.

[6] В. Д. Белоусов, (Belousov), Основы теории квазигрупп и луп, Moscou 1967.

[7] Otakar Borůvka, *Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie*, Berlin, 1960.

[8] H. Brandt, *Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs*, Math. Ann. 96, (1926), 360—366.

[9] Richard H. Bruck, *Contributions to the theory of loops*, Trans. Amer. Math. Soc. 60, (1946), 245—354.

[10] Richard H. Bruck, *A Survey of binary Systems*, Berlin, 1958.

[11] Richard H. Bruck, *Some Theorems on Moufang Loops*, Math. Zeitschr. 73, (1960), 59—78.

[12] Maria Hasse, Lothar Michler, *Über die Einbettbarkeit von Kategorien in Gruppoide*. Math. Nachr. 25 (1963) 169—177.

[13] Hans-Jürgen Hoehnke, *Zur Theorie der Gruppoide, I à IX*, Math. Nachr. 24, (1962), 137—168 et suivants.

[14] Alfred Loewy, *Über abstrakt definierte Transmutationssysteme oder Mischgruppen*, Journ. Reine Angew. Math. 157, (1927) 239—254.

[15] Lothar Michler, *Über die Einbettbarkeit spezieller Kategorien in Brandtsche Gruppoide*, Wiss. Z. Hochsch. Sch. Magdeburg, 5 (1961), 21—27.

[16] J. Marshall Osborn, *Loops with the weak inverse property*, Pacific J. Math. 10 (1960), 295—304.

[17] Willi Rinow, *Über die Vervollständigung induktiver Gruppoide*, Math. Nachr., 25 (1963), 199—222.

[18] Albert J. V. Sade, *Quasigroupes obéissant à certaines lois*, Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, Ser. A, 22 (1957), 151—184.

[19] Albert J. V. Sade, *Quelques remarques sur l'isomorphisme et l'automorphisme des quasigroupes*, Abhand, Math. Sem. Univ. Hamburg, 22 (1958), 84—91.

[20] Albert J. V. Sade, *Isomorphisme d'Hypergroupoïdes isotopes*, Pacific J. Math. 9, (1959), 583—584.

[21] Albert J. V. Sade, *Theorie des systèmes demosiens de groupoides*, Pacific J. Math. 10, (1960), 625—660.

[22] Albert J. V. Sade, *Quasigroupes isotopes, autotopies d'un groupe*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 81, (1967), 231—239.

(23) Hans J. Zassenhaus, *The Theory of Groups*, New York, (1956).

*364, Cours de la République*
*Pertuis (Vaucluse), France*