DAS EINSCHLIESSEN DER LÖSUNG VON GLEICHUNGEN MITTELS EINES VERALLGEMEINERTEN ITERATIONSVERFAHRENS

Von M. Schneider, Karl-Marx-Stadt

Eingegangen am 28. Dezember 1967

1. VORBEMERKUNGEN

Bei der Anwendung von Iterationsverfahren zur Lösung von Gleichungen wird häufig die Tendenz beobachtet, daß die Näherungsfolge die exakte Lösung immer enger einschließt. Diese Einschließungen haben eine große praktische Bedeutung, da bei so gearteten Iterationsverfahren der nach jedem Näherungsschritt noch vorhandene Fehler gegen die Differenz zweier benachbarter Näherungen abgeschätzt werden kann. Untersuchungen über dieses Verhalten von Iterationsverfahren wurden z. B. in der Arbeit [1] durchgeführt. In einigen weiteren Arbeiten (z. B. [2], [3], [4]) wurde gezeigt, daß sich diese Aussagen vielfach durch geeignete Umformungen erzwingen lassen.

Eine Reihe von Problemen lassen sich mit den meist benutzten Iterationsverfahren $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, \ldots$, wobei x_i Elemente eines geeignet gewählten abstrakten Raumes sind und T ein auf einer bestimmten Teilmenge des Raumes definierter Operator ist, nicht erfassen, sondern führen auf ein verallgemeinertes Iterationsverfahren der Form $x_{n+1} = T_n x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, bei dem in jedem Iterationsschritt ein anderer Operator verwendet werden kann. Dabei ist klar, daß an die Auswahl der Operatoren T_n gewisse Bedingungen geknüpft werden müssen, um die Konvergenz des Verfahrens zu sichern. Verallgemeinerte Iterationsverfahren dieser Art wurden von Schmidt [5] und Ehrmann [6] betrachtet. In diesen Arbeiten [5, 6] wird nicht untersucht, ob es auch bei den verallgemeinerten Iterationsverfahren möglich ist, Einschliessungsaussagen zu erhalten und damit die Vorteile dieser Aussagen für die Fehlerabschätzung zu benutzen. Mit diesen Untersuchungen beschäftigt sich die vorliegende Arbeit. Die Betrachtungen werden in einem Raum $\mathfrak{R}$ durchgeführt, der im nächsten Abschnitt erläutert wird.

In den Ergebnissen sind die für das gewöhnliche Iterationsverfahren $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, bereits vorliegenden Aussagen als Spezialfall enthalten.

Die Resultate lassen sich auf viele spezielle Iterationsverfahren anwenden. Darüber soll in einer weiteren Arbeit berichtet werden.

2. DEFINITION UND EIGENSCHAFTEN DES ZUGRUNDE GELEGTEN RAUMES

Die Untersuchungen werden in einem Raum $\mathfrak{R}$ mit den Elementen $x, y, z, \ldots$ durchgeführt. Jedes Element des Raumes $\mathfrak{R}$ lasse sich in eindeutiger Weise durch eine Menge reeller Zahlen charakterisieren. Die die Elemente $x, y, z, \ldots$ charakterisierenden Mengen reeller Zahlen werden mit $\{\xi\}, \{\eta\}, \{\zeta\}, \ldots$ bezeichnet. Betrachten wir je zwei Elemente x und y, so lasse sich jeder Zahl ξ_i der Menge $\{\xi\}$ eineindeutig eine Zahl η_i der Menge $\{\eta\}$ zuordnen. Einander zugeordnete Zahlen werden mit dem gleichen Index i bezeichnet. Soll ausgedrückt werden, daß eine bestimmte Eigenschaft für alle Zahlen der Menge $\{\xi\}$ gilt, so sagen wir $\xi_i \forall i$ habe diese Eigenschaft.

Wir nennen zwei Elemente des Raumes $\mathfrak{R}$ gleich, $x = y$, wenn alle einander zugeordneten Zahlen der charakterisierenden Mengen gleich sind, also $\xi_i = \eta_i \forall i$ gilt. Als Summe zweier Elemente x, y des Raumes $\mathfrak{R}$ definieren wir das Element $z = x + y$ aus $\mathfrak{R}$, das durch die Menge $\{\zeta\}$ charakterisiert wird, wobei für alle $\zeta_i \in \{\zeta\}$ gilt $\zeta_i = \xi_i + \eta_i$.

Als Produkt eines Elementes $x \in \mathfrak{R}$ mit einer reellen Zahl λ definieren wir das Element $z = \lambda x$, das durch die Menge $\{\zeta\}$ charakterisiert wird mit $\zeta_i = \lambda \xi_i \forall i$.

Bei der angegebenen Definition der Summe zweier Elemente aus $\mathfrak{R}$ und des Produktes eines Elements von $\mathfrak{R}$ mit einer reellen Zahl ist der Raum $\mathfrak{R}$ ein linearer Raum.

In $\mathfrak{R}$ definieren wir eine Halbordnung, indem wir $x \leqq y$ schreiben, wenn $\xi_i \leqq \eta_i \forall i$ gilt. Bei dieser Definition gelten die üblichen Bedingungen, die an eine Halbordnung gestellt werden.

Jedem Element $x \in \mathfrak{R}$ ordnen wir ein Funktional Fx zu durch. $\mathrm{F}x = \inf |\xi_i|$. Es ist

(1) $$\mathrm{F}x \geqq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R},$$

(2) $$\mathrm{F}(\lambda x) = |\lambda| \mathrm{F}\, x.$$

Vom Raum $\mathfrak{R}$ fordern wir weiter, daß er normiert ist. Für die Norm seien außer den üblichen Beziehungen die beiden Forderungen

(3) aus $\Theta \leqq x \leqq y$ folge $\|x\| \leqq \|y\|$,

(4) aus $\|x\| \leqq \mathrm{F}y$ folge $x \leqq y$

erfüllt.

Alle Forderunge für den Raum $\mathfrak{R}$ werden beispielsweise von dem Raum C aller über einem Intervall $[a, b]$ stetigen Funtionen erfüllt.

Es soll jetzt ein im folgenden ständig benötigter Hilfssatz für den Raum $\mathfrak{R}$ bewiesen werden.

Hilfssatz. Gilt für vier Elemente x, y, z, w des Raumes $\| x - z \| \leqq \leqq \frac{1}{4} \mathbf{F}(z - w)$, $\| y - w \| \leqq \frac{1}{4} \mathbf{F}(z - w)$ und $x \geqq y$, so gilt auch $z \geqq w$.

Beweis. Die die Elemente x, y, z, w charakterisierenden Mengen reeller Zahlen werden mit $\{\xi\}$, $\{\eta\}$, $\{\zeta\}$, $\{\omega\}$ bezeichnet. Aus $\| x - z \| \leqq \leqq \frac{1}{4} \mathbf{F}(z - w)$, $\| y - w \| \leqq \frac{1}{4} \mathbf{F}(z - w)$ folgt auf Grund der Eigenschaft (2) des Funktionals und der Eigenschaft (4) der Norm $| \xi_i - \zeta_i | \leqq \leqq \frac{1}{4} | \zeta_i - \omega_i |$ und $| \eta_i - \omega_i | \leqq \frac{1}{4} | \zeta_i - \omega_i | \,\forall\, i$. Ferner gilt $\forall\, i$

$$\begin{aligned} | \zeta_i - \omega_i | &= | \zeta_i - \xi_i + \xi_i - \eta_i + \eta_i - \omega_i | \\ &\leqq | \zeta_i - \xi_i | + | \xi_i - \eta_i | + | \eta_i - \omega_i | \\ &\leqq \frac{1}{2} | \zeta_i - \omega_i | + | \xi_i - \eta_i |, \end{aligned}$$

d. h. es ist $\frac{1}{2} | \zeta_i - \omega_i | \leqq | \xi_i - \eta_i | \,\forall\, i$. Damit ist aber auch $\frac{1}{2} \inf\limits_i | \zeta_i - \omega_i | \leqq \inf\limits_i | \xi_i - \eta_i |$ oder anders geschrieben

$$\frac{1}{2} \mathbf{F}(z - w) \leqq \mathbf{F}(x - y). \tag{5}$$

Aus der Beziehung (5) und der Voraussetzung des Hilfssatzes folgt nun $\| x - z \| \leqq \frac{1}{2} \mathbf{F}(x - y)$, $\| y - w \| \leqq \frac{1}{2} \mathbf{F}(x - y)$ und damit wieder auf Grund der Eigenschaft (2) des Funktionals und der Eigenschaft (4) der Norm $| \xi_i - \zeta_i | \leqq \frac{1}{2} | \xi_i - \eta_i |$, $| \eta_i - \omega_i | \leqq \frac{1}{2} | \xi_i - \eta_i |$ $\forall\, i$.

Da $x \geqq y$ sein sollte, gilt $\xi_i \geqq \eta_i \,\forall\, i$ und damit $| \xi_i - \zeta_i | \leqq \frac{1}{2} (\xi_i - \eta_i)$, $| \eta_i - \omega_i | \leqq \frac{1}{2} (\xi_i - \eta_i) \,\forall\, i$. Hieraus folgt $\xi_i - \zeta_i + \omega_i - \eta_i \leqq \leqq \xi_i - \eta_i \,\forall\, i$ und damit $\omega_i \leqq \zeta_i \,\forall\, i$, d. h. aber $z \geqq w$.

Wird im folgenden von Konvergenz im Raum $\mathfrak{R}$ gesprochen, so soll immer die Konvergenz in der Norm verstanden werden.

Mit $\mathfrak{d} = < y, z >$ wird die Menge aller $x \in \mathfrak{R}$ bezeichnet, für die $\Theta \leqq y \leqq x \leqq z$ gilt. Wir verwenden für das Weitere immer Mengen $\mathfrak{d}$, die nur aus positiven Elementen bestehen. In den Anwendungen läßt sich das durch geeignete Wahl des Koordinatensystems realisieren.

3. PROBLEMSTELLUNG UND VORAUSSETZUNGEN

Gesucht sei eine Lösung x^* der Gleichung

$$Lx = Mx. \tag{6}$$

Dabei sei L ein linearer Operator. L sei auf $\mathfrak{d}$ definiert und bilde $\mathfrak{d}$ in sich ab, d. h. es sei $L\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{d}$. Die Gleichung $Lx = r$ sei für beliebiges $r \in L\mathfrak{d}$ eindeutig lösbar und die Lösung sei darstellbar als $x = Gr$. Es existiere also der zu L inverse Operator $G = L^{-1}$ auf $L\mathfrak{d}$. Er ist ebenfalls linear und er sei beschränkt. M sei ein im allgemeinen nichtlinearer Operator. Er sei auf $\mathfrak{d}$ definiert und bilde $\mathfrak{d}$ auf $M\mathfrak{d}$ ab. Es sei $M\mathfrak{d} \subseteq$ $\subseteq L\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{d}$. Die Gleichung (6) läßt sich jetzt schreiben

$$x = L^{-1}Mx = GMx = Tx, \tag{7}$$

wobei $T = L^{-1}M$ gesetzt wurde. T ist also im allgemeinen ein nichtlinearer Operator, der auf $\mathfrak{d}$ definiert ist. Jede Menge $T\mathfrak{d}$ sei kompakt in sich, d. h. jede unendliche Teilmenge dieser Menge enthält eine konvergente Folge und die Grenzwerte gehören zu $\mathfrak{d}$. Die vorgelegte Gleichung (6) wird in den meisten Fällen nicht geschlossen lösbar sein. Wir verwenden zu ihrer näherungsweisen Lösung ein verallgemeinertes Iterationsverfahren

$$L_{n+1}x_{n+1} = M_n x_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Dabei seien die L_n $(n = 1, 2, \ldots)$ lineare Operatoren, die auf $\mathfrak{d}$ definiert sind. Sie sollen $\mathfrak{d}$ auf $L_n\mathfrak{d} \subset \mathfrak{d}$ abbilden. Die Aufgaben $L_n x = r$ $(n = 1, 2, \ldots)$ seien für beliebiges $r \in L_n\mathfrak{d}$ eindeutig lösbar und die Lösungen in der Form $x = G_n r$ darstellbar, d. h. alle Operatoren L_n sollen inverse Operatoren $L_n^{-1} = G_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ auf $L_n\mathfrak{d}$ besitzen. Die M_n seien im allgemeinen nichtlineare Operatoren, die auf $\mathfrak{d}$ definiert sind und $\mathfrak{d}$ auf $M_n\mathfrak{d}$ abbilden. Es sei $M_n\mathfrak{d} \subseteq L_{n+1}\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{d}$. Für alle $x \in \mathfrak{d}$ sei $M_n x - Mx \in L\mathfrak{d}$. Das Iterationsverfahren läßt sich jetzt in der Form

$$x_{n+1} = G_{n+1}M_n x_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

schreiben. Oder wenn wir den auf $\mathfrak{d}$ definierten Operator $T_n = G_{n+1}M_n$ einführen, erhalten wir aus der Gleichung (8)

$$x_{n+1} = T_n x_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Die Operatoren T_n seien beschränkt, d. h. für beliebige $x \in \mathfrak{d}$, $y \in \mathfrak{d}$, sei

(10) $$\| T_n x - T_n y \| \leqq \beta_n \| x - y \|, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Die β_n seien die kleinsten Zahlen, für die die Ungleichungen (10) noch gelten. Sie werden als Normen oder Lipschitzkonstanten der Operatoren T_n bezeichnet. Es wird vorausgesetzt, daß $\beta = \sup_n \beta_n$ existiere, und es sei $\beta < 1$.

Geben wir also Folgen von Operatoren L_{n+1}, M_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ und eine beliebige Ausgangsnäherung $x_0 \in \mathfrak{d}$ vor, so erhalten wir durch das Iterationsverfahren (8) eine Folge $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$. Es soll untersucht werden, ob es möglich ist, für diese Folge Einschließungsaussagen der Form

(11) $$x_0 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{2n} \leqq \ldots \leqq x^* \leqq \ldots \leqq x_{2n+1} \leqq \ldots \leqq x_1$$

oder

(12) $$x_1 \leqq x_3 \leqq \ldots \leqq x_{2n+1} \leqq \ldots \leqq x^* \leqq \ldots \leqq x_{2n} \leqq \ldots \leqq x_0$$

zu erhalten. Diese hätten den Vorteil, daß sofort Fehlerabschätzungen für die Näherungslösungen der vorgelegten Gleichung (6) angegeben werden können, da aus den Ungleichungen (11) oder (12) $x_{2n+1} - x_{2n} \geqq \geqq x_{2n+1} - x^*$ oder $x_{2n} - x_{2n+1} \geqq x^* - x_{2n+1}$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ folgt. Damit wäre dann nach Bedingung (3)

(13) $$\| x^* - x_{2n+1} \| \leqq \| x_{2n+1} - x_{2n} \|, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Der in jedem Iterationsschritt in der Norm maximal noch vorhandene Fehler könnte also sofort abgelesen werden. Außer den Einschließungsaussagen wäre es wünschenswert, die Konvergenz der Näherungsfolge gegen die Lösung der vorgelegten Gleichung zu zeigen. Dabei ist von vornherein klar, daß diese Aussagen nur zu erwarten sind, wenn die Operatoren L_n und M_n noch gewisse Voraussetzungen unterworfen werden.

1. Der Operator L sei von monoton nichtfallender bzw. von monoton nichtwachsender Art, d. h. aus $Lx \leqq Ly$ folge $x \leqq y$ bzw. $y \leqq x$. Diese Voraussetzung kann auch so formuliert werden, daß der zu L inverse Operator G isoton bzw. antiton ist. Dabei heißt ein Operator G isiton, wenn aus $x \leqq y$ folgt $Gx \leqq Gy$ und antiton, wenn aus $x \leqq y$ folgt $Gx \geqq Gy$ (nach [7]).

2. Für den Operator M existiere eine Zahl $\varkappa \geqq 0$, so daß $M + \varkappa E$ isoton bzw. $M - \varkappa E$ antiton wird. E bedeute den Einheitsoperator.

3. Zwischen den Operatoren G und G_n und M und M_n soll folgender Zusammenhang bestehen. Es existiere ein gemeinsamer Definitionsbe-

reich von G und G_n $L\mathfrak{d} = \bigcap_{n} L_n\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{d}$ und ebenso von M und M_n. Es sei $M\mathfrak{d} = \bigcap_{n} M_n\mathfrak{d}$ und $M\mathfrak{d} \subseteq L\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{d}$. Für alle $x \in L\mathfrak{d}$ gelte

$$(14) \qquad \| Gx - G_n x \| \leqq a_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

und für alle $x \in \mathfrak{d}$

$$(15) \qquad \| Mx - M_n x \| \leqq b_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei die a_n und b_n unabhängig von x seien. Ferner gelte

$$(16) \qquad a_{n+2} \leqq a_{n+1}, b_{n+1} \leqq b_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

d. h. bei jedem Iterationsschritt sollen keine schlechteren Näherungen für die Operatoren G und M verwendet werden als beim vorhergehenden Schritt. Außerdem sei $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Um Einschließungsaussagen zu erwarten, müssen an die Konstanten a_n und b_n weitere Forderungen gestellt werden. Es sei

$$(17) \qquad a_{n-1} \leqq \frac{1}{4} \mathrm{F}(x_n - x_{n-1}), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$(18) \qquad a_{n-2} \leqq \frac{1}{4} \mathrm{F}(x_n - x_{n-2}), \qquad n = 2, 3, 4, \ldots,$$

$$(19) \qquad b_{n-1} \leqq \frac{1}{4} \mathrm{F}(M_n x_n - M_{n-1} x_{n-1}), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$(20) \qquad b_{n-2} \leqq \frac{1}{4} \mathrm{F}(M_n x_n - M_{n-2} x_{n-2}), \qquad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Diese Voraussetzungen sind einleuchtend, da die Unterschiede zwischen den exakten Operatoren G, M und den entsprechenden Näherungsoperatoren in einem der Halbordnung angepaßten Sinne kleiner sein müssen als die Unterschiede zwischen zwei entsprechenden Näherungsschritten des Iterationsverfahrens, wenn Einschließungsaussagen erwartet sollen. Bei zahlreichen Anwendungen sind diese Voraussetzungen erfüllt und auch relativ leicht nachprüfbar, da die rechts stehenden Größen z. B. $M_n x_n - M_{n-1} x_{n-1}$ bei der Rechnung mit anfallen.

Die Forderungen $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ bedeuten, daß die Operatoren G_n gegen G und M_n gegen M konvergieren, wobei unter $\lim_{n\to\infty} G_n = G$ verstanden werden soll $\lim_{n\to\infty} \| G_n x - Gx \| = 0$ für alle $x \in L\mathfrak{d}$ und unter $\lim_{n\to\infty} M_n = M$ $\lim_{n\to\infty} \| M_n x - Mx \| = 0$ für alle $x \in \mathfrak{d}$. Die Operatoren $T_n = G_{n+1} M_n$ konvergieren damit im gleichen Sinne gegen $T = GM$. Dieser Grenzoperator T ist beschränkt mit der vorn eingeführten Konstanten $\beta = \sup \beta_n$, da alle Operatoren T mit der Lipschitzkonstanten β gleichmäßig beschränkt sind.

In den Voraussetzungen 1 und 2 werden Forderungen an die Operatoren G, L, M gestellt. Bei vielen vorkommenden Problemen werden nur die Näherungsoperatoren G_n, L_n und M_n bekannt sein, so daß es Schwierigkeiten bereiten kann, diese Voraussetzungen nachzuweisen. Man kann an ihrer Stelle auch folgende Voraussetzungen benutzen.

1′. Alle Operatoren G_n seien in $L\mathfrak{d}$ isoton oder antiton.

2′. Für die Operatoren M_n lassen sich Zahlen $\varkappa_n \geqq 0$ angeben, so daß $M_n + \varkappa_n E$ isoton oder $M_n - \varkappa_n E$ antiton wird für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$. Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} \varkappa_n = \varkappa$.

Aus den Voraussetzungen 1′ und 2′ folgen die vorn angegebenen Voraussetzungen 1 und 2, wie leicht einzusehen ist.

4. DIE EINSCHLIESSUNGSSÄTZE

Unter den angegebenen Voraussetzungen gelten in einem vorn definierten Raum $\mathfrak{R}$ für die durch das Iterationsverfahren (8) definierte Näherungsfolge die folgenden beiden Sätze.

Satz 1. Ist der Operator G isoton und benutzt man eine Ausgangsnäherung x_0 mit $x_0 \leqq x_1$, $x_0 \leqq x_2$, so ist

$$x_0 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{2n} \leqq \ldots \leqq x^* \leqq \ldots \leqq x_{2n+1} \leqq \ldots \leqq x_1 \tag{21}$$

und benutzt man x_0 mit $x_0 \geqq x_1$, $x_0 \geqq x_2$, so gilt

$$x_1 \leqq x_3 \leqq \ldots \leqq x_{2n+1} \leqq \ldots \leqq x^* \leqq \ldots \leqq x_{2n} \leqq \ldots \leqq x_0. \tag{22}$$

In beiden Fällen konvergiert die Folge x_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ gegen die einzige Lösung x^* der vorgelegten Gleichung (6) im Intervall $\mathfrak{d} = \langle x_0, x_1\rangle$ bzw. $\mathfrak{d} = \langle x_1, x_0\rangle$.

Satz 2. Ist der Operator G antiton, so gilt für die Näherungsfolge x_n des Iterationsverfahrens (8) die Aussage (21) oder (22), je nachdem ob von x_0 mit $x_0 \leqq x_1$, $x_0 \leqq x_2$ oder von x_0 mit $x_0 \geqq x_1$, $x_0 \geqq x_2$ ausgegangen wird. Auch in diesem Fall konvergiert die Folge x_n gegen die einzige Lösung x^* der vorgelegten Gleichung (6) in $\mathfrak{d} = \langle x_0, x_1\rangle$ bzw. $\mathfrak{d} = \langle x_1, x_0\rangle$.

Zusatz. Verwendet man als Ausgangsnäherung x_0 die Lösung der Gleichung $L_0 x_0 = M_0 \Theta$, so gelten die Ungleichungen $x_0 \geqq x_1$ und $x_0 \geqq x_2$, wenn $\| M\Theta - M_0\Theta \| \leqq \tilde{b}_0$ ist und die Beziehungen $b_0 \leqq \leqq \frac{1}{4} F(M_0\Theta - M_0 x_0)$, $\tilde{b}_0 \leqq \frac{1}{4} F(M_0\Theta - M_0 x_0)$, $\tilde{b}_0 \leqq \frac{1}{4} F(M_1 x_1 -$

$- M_0\Theta)$, $b_1 \leqq \frac{1}{4} \mathrm{F}(M_1x_1 - M_0\Theta)$ erfüllt sind. b_0 und b_1 haben dabei die Bedeutung, die in der Formel (15) angegeben wurde.

Bei dieser Ausgangsnäherung x_0 hat man für die Näherungsfolge x_n also immer die Aussage (22), wenn G isoton oder antiton ist.

Beweis des Satzes 1. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, daß der Operator M antiton ist. Ist diese Bedingung nicht von vornherein erfüllt, so formen wir die Ausgangsgleichung (6) um in

$$Lx - \varkappa x = Mx - \varkappa x \tag{23}$$

und erreichen auf Grund der Voraussetzung 2, daß der Operator $\overline{M} = M - \varkappa E$ antiton wird. Als Iterationsverfahren zur näherungsweisen Lösung der Gleichung (23) benutzen wir

$$L_{n+1}x_{n+1} - \varkappa_{n+1}x_{n+1} = M_nx_n - \varkappa_nx_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{24}$$

Alle über L, L_n, M und M_n getroffenen Voraussetzungen sind jetzt lediglich auf $\overline{L} = L - \varkappa E$, $\overline{L}_n = L_n - \varkappa_n E$, $\overline{M} = M - \varkappa E$ und $\overline{M}_n = M_n - \varkappa_n E$ zu beziehen.

Es wird zunächst der Teil des Satzes 1 bewiesen, der zur Aussage (21) führt.

Nach Voraussetzung ist $x_0 \leqq x_1$. Da M antiton ist, folgt daraus $Mx_0 \geqq Mx_1$. Nun ist $\| Mx_0 - M_0x_0 \| \leqq b_0$, $\| Mx_1 - M_1x_1 \| \leqq b_1$, $b_0 \leqq \frac{1}{4} \mathrm{F}(M_1x_1 - M_0x_0)$, $b_1 \leqq b_0 \leqq \frac{1}{4} \mathrm{F}(M_1x_1 - M_0x_0)$. Nach dem angegebenen Hilfssatz ist damit $M_0x_0 \geqq M_1x_1$. Da G isoton ist, folgt ferner $GM_0x_0 \geqq GM_1x_1$. Weiter ist

$$\| GM_0x_0 - G_1M_0x_0 \| \leqq a_1, \qquad \| GM_1x_1 - G_2M_1x_1 \| \leqq a_2$$

und

$$a_1 \leqq \frac{1}{4} \mathrm{F}(x_2 - x_1) = \frac{1}{4} \mathrm{F}(G_2M_1x_1 - G_1M_0x_0),$$

$a_2 \leqq a_1 \leqq \frac{1}{4} \mathrm{F}(x_2 - x_1)$. Daraus folgt nach dem gleichen Hilfssatz $G_1M_0x_0 \geqq G_2M_1x_1$, d. h. $x_1 \geqq x_2$.

Ferner ist nach Voraussetzung $x_0 \leqq x_2$. Da M antiton ist, folgt $Mx_0 \geqq Mx_2$ und hieraus folgt mit $\| Mx_0 - M_0x_0 \| \leqq b_0$, $\| Mx_2 - M_2x_2 \| \leqq b_2$, $b_0 \leqq \frac{1}{4} F(M_2x_2 - M_0x_0)$, $b_2 \leqq b_0 \leqq \frac{1}{4} F(M_2x_2 - M_0x_0)$ die Beziehung $M_0x_0 \geqq M_2x_2$. Aus der Isotonie von G ergibt sich weiter

$GM_0x_0 \geqq GM_2x_2$ und damit $G_1M_0x_0 \geqq G_3M_2x_2$, da $\| GM_0x_0 - G_1M_0x_0 \| \leqq$ $\leqq a_1$, $\| GM_2x_2 - G_3M_2x_2 \| \leqq a_3$ und

$$a_1 \leqq \frac{1}{4} F(x_3 - x_1) = \frac{1}{4} F(G_3M_2x_2 - G_1M_0x_0),$$

$a_3 \leqq a_1 \leqq \frac{1}{4} F(x_3 - x_1)$ ist. Somit ist also $x_1 \geqq x_3$. Auf analoge Weise kann aus $x_2 \leqq x_1$ gezeigt werden $x_2 \leqq x_3$, so daß jetzt die folgende Beziehung besteht $x_0 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq x_1$. Wir wiederholen diese Betrachtungen und nehmen an, daß die Rechnungen bis

$$x_0 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{2n} \leqq x_{2n+1} \leqq \ldots \leqq x_3 \leqq x_1 \tag{25}$$

durchgeführt sind. Können wir daraus

$$x_0 \leqq \ldots \leqq x_{2n} \leqq x_{2n+2} \leqq x_{2n+3} \leqq x_{2n+1} \leqq \ldots \leqq x_1 \tag{26}$$

zeigen, so gelten die Ungleichungen (25) für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$. Um von den Ungleichungen (25) auf die Ungleichungen (26) schließen zu können, muß noch $x_{2n} \leqq x_{2n+2}$, $x_{2n+2} \leqq x_{2n+3}$ und $x_{2n+3} \leqq x_{2n+1}$ gezeigt werden. Die Betrachtungen gehen prinzipiell so wie am Induktionsanfang.

Es ist jetzt weiter aus der Beziehung (25) zu zeigen, daß die Folge x_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ gegen die einzige Lösung der vorgelegten Gleichung (6) konvergiert. Dazu zerlegen wir die Näherungsfolge x_n in eine monoton nichtwachsende Teilfolge x_{2n+1} und eine monoton nichtfallende Teilfolge x_{2n}. Beide Teilfolgen liegen ganz in der Menge $T\langle x_0, x_1\rangle$. Die Menge $T\langle x_0, x_1\rangle$ ist nach Voraussetzung kompakt in sich. Bei Collatz und Schöder [1] wurde gezeigt, daß monoton nichtfallende bzw. monoton nichtwachsende Folgen, die ganz in einer in sich kompakten Menge liegen, konvergieren. In unserem Falle konvergieren also beide Teilfolgen x_{2n+1} und x_{2n} je gegen ein Grenzelement $\bar{x}$ bzw. $\bar{\bar{x}}$. Es ist also

$$\bar{\bar{x}} = \lim_{n \to \infty} x_{2n} = \lim_{n \to \infty} G_{2n}M_{2n-1}x_{2n-1},$$

$$\bar{x} = \lim_{n \to \infty} x_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} G_{2n+1}M_{2n}x_{2n}.$$

Weiter ist nachzuweisen, daß beide Grenzelemente übereinstimmen. Mit der vorn eingeführten Bezeichnung $G_{n+1}M_n = T_n$ haben wir jetzt

$$\begin{aligned} \| G_{2n+1}M_{2n}x_{2n} - G_{2n}M_{2n-1}x_{2n-1} \| &= \| T_{2n}x_{2n} - T_{2n-1}x_{2n-1} \| \\ &\leqq \| T_{2n}x_{2n} - T_{2n}x_{2n-1} \| + \| T_{2n}x_{2n-1} - T_{2n-1}x_{2n-1} \| \\ &\leqq \beta \| x_{2n} - x_{2n-1} \| + \| T_{2n}x_{2n-1} - T_{2n-1}x_{2n-1} \|, \end{aligned}$$

worin sich der zweite Summand folgendermaßen abschätzen läßt.

$$\begin{aligned} \| T_{2n}x_{2n-1} - T_{2n-1}x_{2n-1} \| &= \| G_{2n+1}M_{2n}x_{2n-1} - G_{2n}M_{2n-1}x_{2n-1} \| \\ \leqq \| G_{2n+1}M_{2n}x_{2n-1} - GM_{2n}x_{2n-1} \| &+ \| GM_{2n}x_{2n-1} - GM_{2n-1}x_{2n-1} \| \\ &+ \| GM_{2n-1}x_{2n-1} - G_{2n}M_{2n-1}x_{2n-1} \| \\ &\leqq a_{2n+1} + \| G \| \, \| M_{2n}x_{2n-1} - M_{2n-1}x_{2n-1} \| + a_{2n}. \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir noch

$$\begin{aligned} &\| M_{2n}x_{2n-1} - M_{2n-1}x_{2n-1} \| \\ &\leqq \| M_{2n}x_{2n-1} - Mx_{2n-1} \| + \| Mx_{2n-1} - M_{2n-1}x_{2n-1} \| \\ &\leqq b_{2n} + b_{2n-1}, \end{aligned}$$

$a_{2n+1} \leqq a_{2n}, b_{2n} \leqq b_{2n-1}$ und setzen $\| G \| = \gamma$, so erhalten wir $\| T_{2n}x_{2n-1} - T_{2n-1}x_{2n-1} \| \leqq 2(a_{2n} + \gamma b_{2n-1})$. Setzen wir die Betrachtungen analog fort, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \| T_{2n}x_{2n} - T_{2n-1}x_{2n-1} \| &\leqq \beta \| x_{2n} - x_{2n-1} \| + 2(a_{2n} + \gamma b_{2n-1}) \\ \| x_{2n} - x_{2n-1} \| &= \| T_{2n-1}x_{2n-1} - T_{2n-2}x_{2n-2} \| \\ &\leqq \beta \| x_{2n-1} - x_{2n-2} \| + 2(a_{2n-1} + \gamma b_{2n-2}) \\ \| x_{2n-1} - x_{2n-2} \| &= \| T_{2n-2}x_{2n-2} - T_{2n-3}x_{2n-3} \| \\ &\leqq \beta \| x_{2n-2} - x_{2n-3} \| + 2(a_{2n-2} + \gamma b_{2n-3}) \end{aligned}$$

und schließlich

$$\| x_2 - x_1 \| = \| T_1x_1 - T_0x_0 \| \leqq \beta \| x_1 - x_0 \| + 2(a_1 + \gamma b_0).$$

Werden diese Gleichungen ineinander eingesetzt, so ergibt sich folgende Beziehung

$$\begin{aligned} &\| T_{2n}x_{2n} - T_{2n-1}x_{2n-1} \| \leqq \\ &\leqq \beta^{2n} \| x_1 - x_0 \| + 2\beta^{2n-1}(a_1 + \gamma b_0) + 2\beta^{2n-2}(a_2 + \gamma b_1) + \\ &+ \ldots + 2\beta(a_{2n-1} + \gamma b_{2n-2}) + 2(a_{2n} + \gamma b_{2n-1}). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir noch $\| x_1 - x_0 \| = d$, so erhalten wir

$$\| T_{2n}x_{2n} - T_{2n-1}x_{2n-1} \| \leqq S_{2n-1} + \beta^{2n}d \tag{27}$$

mit

$$S_{2n-1} = 2 \sum_{\nu=1}^{2n} \beta^{2n-\nu} (a_\nu + \gamma b_{\nu-1}).$$

Ein gemeinsames Grenzelement $\bar{x} = \bar{\bar{x}}$ existiert sicher dann, wenn die rechte Seite der Ungleichung (27) für $n \to \infty$ gegen Null strebt. Da nach Voraussetzung $\beta < 1$ ist, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \beta^{2n} d = 0$. Weiter ist zu zeigen $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = 0$. Nach Voraussetzung ist $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + \gamma b_{n-1}) = 0$. Bei Vorgabe einer beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$ existiert also ein Index N, so daß für alle $n > N$ gilt $a_n + \gamma b_{n-1} < \varepsilon$. Damit ist

$$S_{2n-1} = 2 \sum_{\nu=1}^{N} \beta^{2n-\nu}(a_\nu + \gamma b_{\nu-1}) + 2 \sum_{\nu=N+1}^{2n} \beta^{2n-\nu}(a_\nu + \gamma b_{\nu-1}),$$

$$S_{2n-1} \leqq 2 \sum_{\nu=1}^{N} \beta^{2n-\nu}(a_\nu + \gamma\, b_{\nu-1}) + 2\varepsilon \frac{1 - \beta^{2n-N}}{1 - \beta} .$$

Für $n \to \infty$ geht in $\sum\limits_{\nu=1}^{N} \beta^{2n-\nu}(a_\nu + \gamma b_{\nu-1})$ jeder einzelne Summand gegen Null wegen $\beta < 1$. Wir erhalten also

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} \leqq \frac{\varepsilon}{1 - \beta} .$$

Da ε beliebig war, folgt daraus $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = 0$.

Damit haben wir

$$\lim_{n\to\infty} T_{2n} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} T_{2n-1} x_{2n-1},$$

also beide Teilfolgen konvergieren gegen das gemeinsame Grenzelement $\bar{x} = \bar{\bar{x}} = x^*$.

Es ist jetzt weiter zu zeigen, daß das gemeinsame Grenzelement x^* mit der Lösung der vorgelegten Gleichung (6) übereinstimmt. Es gilt

$$\| T_n x_n - T x^* \| \leqq \| T_n x_n - T_n x^* \| + \| T_n x^* - T x^* \|,$$

$$\| T_n x_n - T x^* \| \leqq \beta \| x_n - x^* \| + \| T_n x^* - T x^* \|,$$

d.h. wenn x_n gegen x^* und die Operatorfolge T_n gegen T konvergiert' konvergiert auch $T_n x_n$ gegen Tx^*. Also hat man

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T_n x_n = T x^*,$$

d. h. aber x^* ist Lösung der vorgelegten Gleichung (6). Diese Lösung x^* ist auch die einzige Lösung der vorliegenden Gleichung in $\mathfrak{b}$. Angenommen es gäbe noch eine zweite Lösung x^{**}, die von der ersten verschieden ist, so müßte $\| x^* - x^{**} \| \neq 0$ sein. Es ist aber

$$\| x^* - x^{**} \| = \| T x^* - T x^{**} \| \leqq \beta \| x^* - x^{**} \|$$

und das ist wegen $0 < \beta < 1$ nur für $\| x^* - x^{**} \| = 0$ erfüllt.

Der Fall des Satzes 1, der zur Aussage (22) führt, kann völlig analog bewiesen werden. Beim Induktionsbeweis am Anfang ist lediglich mit den anderen Anfangswerten zu beginnen.

Beweis des Satzes 2· Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird hier angenommen, daß der Operator M isoton ist. Ist dies nicht von vornherein der Fall, so formen wir die Ausgangsgleichnung (6) um in

$$Lx + \varkappa x = Mx + \varkappa x \tag{28}$$

und erreichen auf Grund der Voraussetzung 2, daß der Operator $M + \varkappa E$ isoton wird. Die Gleichung (28) lösen wir dann näherungsweise durch das Iterationsverfahren

$$L_{n+1}x_{n+1} + \varkappa_{n+1}x_{n+1} = M_n x_n + \varkappa_n x_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{29}$$

Alle anfangs für L, L_n, M und M_n getroffenen Voraussetzungen sind jetzt für die überstrichenen Operatoren $\bar{L} = L + \varkappa E$, $\bar{L}_n = L_n + \varkappa_n E$, $\bar{M} = M + \varkappa E$ und $\bar{M}_n = M_n + \varkappa_n E$ festzulegen. Unter der Annahme, daß $\bar{M}$ isoton ist, können jetzt auf die gleiche Weise wie bei Satz 1 zunächst die Ungleichungen (25) gezeigt werden und daraus die Konvergenz der Näherungsfolge gegen die einzige Lösung der vorgelegten Gleichung (6) in $\mathfrak{d}$.

Der Beweis des Zusatzes geht analog.

LITERATUR

[1] Collatz, L. und Schröder, J., *Einschließen der Lösungen von Randwertaufgaben*, Num. Math. 1, 1959, S. 61—72.

[2] Jäckel, H., *Nichtlineare Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern*, Wiss. Zeitschr. d. Hochsch. f. Maschinenbau KMSt. 3, H. 2, 1961, S. 23—40.

[3] Schneider, M., *Eine Methode zur näherungsweisen Lösung von Rand- und Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Wiss. Zeitschr. d. TH KMSt. 6, H. 2, 1964, S. 89—108.

[4] Schneider, M., *Das Einschließen der Lösungen von Gleichungen im Banachraum*, Archivum Mathematicum, Tom 3, Fasc. 2, Brno, 1967.

[5] Schmidt, J. W., *Konvergenzuntersuchungen und Fehlerabschätzungen für ein verallgemeinertes Iterationsverfahren*, Arch. Rat. Mech. Anal. 6, 1960, S. 261—276.

[6] Ehrmann, H., *Iterationsverfahren mit veränderlichen Operatoren*, Arch. Rat. Mech. Anal. 4, 1959, S. 45—64.

[7] Collatz, L., *Funktionalanalysis und numerische Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1964.

Institut für Mathematik,
Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt
901 Karl-Marx-Stadt, Straße der Nationen 62, DDR

MEDIANS AND PERIPHERIANS OF TREES

Bohdan Zelinka, Liberec

Received October 11, 1967

In [1], page 30, the concepts of the vertex median, the edge median and the center of gravity are introduced. On the page 66 the problem is posed, to study the properties of these concepts in the case of trees. Here some results concerning the vertex median and the edge median are given. Further, the concept of the peripherian is defined and some of its properties are studied.

Let G be a graph with the vertex set V and edge set E, let ν_v be its number of vertices, ν_e its number of edges. By the symbol $d(a, x)$ the distance of two vertices is denoted. If we have a subgraph G' of G, we shall denote the vertex set of G' by $V(G')$, its cardinality by $\nu_v(G')$.

The *vertex deviation* of a vertex a is by definition the number

$$m_1(a) = \frac{1}{\nu_v} \sum_{x \in V} (a, x).$$

A vertex a_1 with the minimal vertex deviation is called the *vertex median* of the graph G, its vertex deviation is called the *mean vertex deviation* of G and denoted by $m_1(G)$.

Analogously to the concept of the vertex median we can define also the edge median. If h is an edge joining the vertices x and y, and u a vertex, we define the distance

$$d(u, h) = \frac{1}{2} [d(u, x) + d(u, y)].$$

Then we define the edge median as the vertex b_1, for which the sum

$$M_1(b) = \frac{1}{\nu_e} \sum_{h \in E} d(b, h),$$

called the edge deviation of b, is minimal. The value of this sum for $b = b_1$ is called the mean edge deviation of G and denoted by $M_1(G)$.

Now let G be a finite tree. Study the properties of the above defined concepts. We consider always only finite trees.

Theorem 1. *Between the vertex deviation and the edge deviation of a vertex a of a tree G the following relation holds:*

$$M_1(a) = \frac{\nu_e + 1}{\nu_e} m_1(a) - \frac{1}{2}$$

Proof. Let a be a vertex of a tree G. For every non-negative integer n let $\Delta_a(n)$ be the set of exactly all vertices of the tree G whose distance from a is equal to n. As G is a tree, these sets have following properties:

a) The set $\Delta_a(0) = \{a\}$ and all edges incident with a join a with vertices of $\Delta_a(1)$.

b) For $n \geqq 1$ let $v \in \Delta_a(n)$. Then there exists exactly one edge joining v with a vertex of $\Delta_a(n - 1)$ and all other edges incident with v join v with vertices of $\Delta_a(n + 1)$.

Let $\varrho(v)$ be the degree of a vertex v. From the properties a) and b) it follows that

$$\text{card}\ \Delta_a(n + 1) = \sum_{v \in \Delta_a(u)} [\varrho(v) - 1]. \tag{1}$$

for every positive integer n and

$$\text{card}\ \Delta_a(1) = \varrho(a).$$

Now the vertex deviation of a can be expressed as follows:

$$m_1(a) = \frac{1}{\nu_v} \sum_{n=1}^{\infty} n\ \text{card}\ \Delta_a(n) \tag{2}$$

We can use formally the infinite sum, because only for finitely many numbers n the set $\Delta_a(n)$ is non-empty.

For the edge deviation of a, following [1], page 30, we have

$$M_1(a) = \frac{1}{2\nu_e} \sum_{v \in V} \varrho(v)\ d(a, v)$$

Analogously we may use the decomposition into the sets $\Delta_a(n)$ and write the equality

$$M_1(a) = \frac{1}{2\nu_e} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sum_{v \in \Delta_a(n)} \varrho(v) \right)$$

If $\Delta_a(n) \neq 0$, all sums taken over $v \in \Delta_a(n)$ will be assumed to be zero.
We shall adapt the expression on the right-hand side.

$$M_1(a) = \frac{1}{2\nu_e} \sum_{n=1}^{\infty} \left[n \left(\sum_{v \in \Delta_a(n)} [\varrho(v) - 1] + \text{card}\ \Delta_a(n) \right) \right]$$

Applying (1), we get

$$M_1(a) = \frac{1}{2\nu_e} \sum_{n=1}^{\infty} n\ [\text{card}\ \Delta_a(n + 1) + \text{card}\ \Delta_a(n)].$$

We can write this so:

$$M_1(a) = \frac{1}{2\nu_e} \sum_{n=1}^{\infty} n\ \text{card}\ \Delta_a(n + 1) + \frac{1}{2\nu_e} \sum_{n=1}^{\infty} n\ \text{card}\ \Delta_a(n).$$

The first term on the right-hand side we adapt as follows:

$$\frac{1}{2\nu_e}\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{card} \Delta_a(n+1) =$$
$$= \frac{1}{2\nu_e}\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \operatorname{card} \Delta_a(n+1) - \frac{1}{2\nu_e}\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{card} \Delta_a(n+1)$$

Evidently

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{card} \Delta_a(n+1) = \nu_v - 1 - \operatorname{card} \Delta_a(1) = \nu_e - \operatorname{card} \Delta_a(1)$$

Using (2), the first term on the right-hand side can be adapted:

$$\frac{1}{2\nu_e}\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \operatorname{card} \Delta_a(n+1) = \frac{1}{2\nu_e}\sum_{n=2}^{\infty} n \operatorname{card} \Delta_a(n) =$$
$$= \frac{1}{2\nu_e}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{card} \Delta_a(n) - \operatorname{card} \Delta_a(1)\right) = \frac{\nu_v}{2\nu_e} m_1(a) - \frac{1}{2\nu_e} \operatorname{card} \Delta_a(1)$$

Thus we have

$$M_1(a) = \frac{\nu_v}{\nu_e} m_1(a) - \frac{1}{2\nu_e} \operatorname{card} \Delta_a(1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\nu_e} \operatorname{card} \Delta_a(1) =$$
$$= \frac{\nu_e + 1}{\nu_e} m_1(a) - \frac{1}{2},$$

which was to be proved.

Corollary 1. *For the mean vertex deviation $m_1(G)$ and the mean edge deviation $M_1(G)$ of a tree G the equality*

$$M_1(G) = \frac{\nu_e + 1}{\nu_e} m_1(G) - \frac{1}{2}$$

holds.

Corollary 2. *The vertex median and the edge median of a tree coincide with one another.*

Evidently, between vertex and edge deviations there is a linear dependence with the positive coefficient, so they must attain their minima in the same vertex.

Before expressing another theorem, we shall prove a lemma. According to Corollary 2 we can omit the epitheta "vertex" and "edge" and speak only about medians.

Lemma 1. *Let a_1 be the median of the tree G. Let $B_1(a_1), \ldots, B_l(a_1)$ be the branches of G from a_1* (see [1], page 64). *Then for each i, $1 \leqq i \leqq l$, the inequality*

$$\nu_v[B_i(a_1)] \leqq \nu_v/2 + 1 \tag{3}$$

holds.

Proof. Let $1 \leqq i \leqq l$, let u_i be the vertex of the branch $B_i(a_1)$ which is joined by an edge with a_1. As a_1 is the median of G, there must be $m_1(a_1) \leqq m_1(u_i)$. Now if x is a vertex of the branch $B_i(a_1)$ different from a_1, the equality

$$d(u_i, x) = d(a_1, x) - 1$$

holds. If y is a vertex of G not belonging to $B_i(a_1)$ or equal to a_1, the equality

$$d(u_i, y) = d(a_1, y) + 1$$

holds. We have

$$m_1(u_i) = \frac{1}{\nu_v} \sum_{z \in V} d(u_i, z) = \frac{1}{\nu_v}\left(\sum_{x \in V(B_i) - \{a_1\}} d(u_i, x) + \sum_{y \in [V \dot{-} V(B_i)] \cup \{a_1\}} d(u_i, y)\right) =$$

$$= \frac{1}{\nu_v}\left(\sum_{x \in V(B_i) - \{a_1\}} (d(a_1, x) - 1) + \sum_{y \in [V - V(B_i)] \cup \{a_1\}} (d(a_1, y) + 1)\right) =$$

$$= \frac{1}{\nu_v}\left(\sum_{y \in V(B_i) - \{a_1\}} d(a_1, x) + \sum_{y \in [V \dot{-} V(B_i)] \cup \{a_1\}} d(a_1, y) -\right.$$

$$\left. - \nu_v(B_i) + 1 + \nu_v - \nu_v(B_i) + 1\right) = \frac{1}{\nu_v}\left(\sum_{z \in V} d(a_1, z) + \nu_v - 2\nu_v(B_i) + 2\right) =$$

$$= m_1(a_1) + \frac{1}{\nu_v}[\nu_v - 2\nu_v(B_i) + 2].$$

Thus from $m_1(a_1) \leqq m_1(u_i)$ we get

$$0 \leqq \frac{1}{\nu_v}[\nu - 2\nu(B_i) + 2].$$

from which it follows that

$$\nu_v(B_i) \leqq \nu_v/2 + 1$$

for all i, $1 \leqq i \leqq l$.

Now we can prove a theorem.

Theorem 2. *A tree has either exactly one median, or exactly two medians joined by an edge.*

Proof. Assume that there exists a tree G which has two medians $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}$ such that $d(a_1^{(1)}, a_1^{(2)}) \geqq 2$. Let $B_1(a_1^{(1)}), \ldots, B_p(a_1^{(1)})$ be the branches of G from $a_1^{(1)}$ and $B_1(a_1^{(2)}), \ldots, B_2(a_1^{(2)})$ be the branches of G from $a_1^{(2)}$. Assume without the loss of generality that $a_1^{(1)}$ belongs to $B_1(a_1^{(2)})$ and $a_1^{(2)}$ belongs to $B_1(a_1^{(1)})$. Evidently all the branches $B_2(a_1^{(1)}), \ldots, B_p(a)_1^{(1)}$ are subgraphs of the branch $B_1(a_1^{(2)})$ and all the branches $B_2(a_1^{(2)}), \ldots, B_2(a_1^{(2)})$ are subgraphs of the branch $B_1(a_1^{(1)})$. According to Lemma 1 we have

$$\nu_v(B_1(a_1^{(1)}) \leqq \nu_v/2 + 1.$$

Thus the sum

$$\sum_{i=2}^{p} [\nu_v(B_i(a_1^{(1)}))-1] = \nu_v - \nu_v(B_1(a_1^{(1)}) \geqq \nu_v/2 - 1.$$

This is the number of all vertices belonging to any of the branches $B_2(a_1^{(1)})$, ..., $B_p(a_1^{(1)})$ except $a_1^{(1)}$. As written above, all these vertices belong to $B_1(a_1^{(2)})$ .Beside them whole the path P from $a_1^{(1)}$ to $a_1^{(2)}$ belongs to $B_1(a_1^{(2)})$. The vertices of the path P belong to the branch $B_1(a_1^{(1)})$, so except $a_1^{(1)}$ they do not belong to any of the branches $B_2(a_1^{(1)}), \ldots, B_p(a_1^{(1)})$. The number of vertices of the path P is at least three, because the distance between $a_1^{(1)}$ and $a_1^{(2)}$ is greater than or equal to two. The branch $B_1(a_1^{(1)})$ must therefore contain at least $\nu_v/2+2$ vertices, which leads to a contradiction.

Thus the distance between two medians of a tree is at most one, this means that those medians are joined by an edge. Therefore there cannot exist three different medians. (If they existed, they would form a triangle, which is impossible in a tree.)

On Fig. 1a we see a tree with one median, on Fig. 1b a tree with two medians.

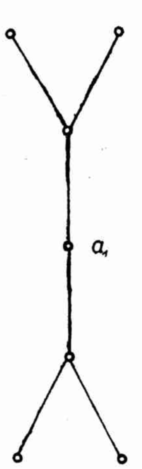

Fig. 1a.

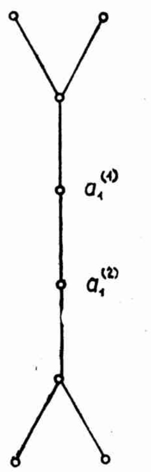

Fig. 1b.

Further in [1] the concept of the mass center of a tree is defined. If v is a vertex of the tree G, the maximal number of vertices of a branch of G from v is called the weight at v. The vertex of G with the minimal weight is called the mass center of G and its weight is called the weight of G.

Theorem 3. *The median of a tree coincides with its mass center.*

Proof. We have shown that for the median a_1 the inequality (3) holds and that it holds only for the median. Thus for each other vertex there exists some branch of G from that vertex such that its number of vertices is greater than $\nu_v/2+1$. From that it follows that every mass center of a tree must be its median. It remains to prove that every median of a tree is its mass center. For that it suffices to consider only the case of a tree with two medians (if there is only one median, the mass center must be identical with it as above proved). Let the tree G have two medians $a_1^{(1)}$ and $a_1^{(2)}$. Let $B_1(a_1^{(1)}), \ldots, B_p(a_1^{(1)})$ be the branches of G from $a_1^{(1)}$ and $B_1(a_1^{(2)}), \ldots, B_q(a_1^{(2)})$ the branches of G from $a_1^{(2)}$. We may assume without the loss of generality that $a_1^{(1)}$ belongs to $B_1(a_1^{(2)})$ and $a_1^{(1)}$ belongs to $B_1(a_1^{(2)})$. The branch $B_1(a_1^{(1)})$ contains therefore all branches $B_2(a_1^{(2)}), \ldots, B_q(a_1^{(2)})$ and the branch $B_1(a_1^{(2)})$ contains all branches $B_2(a_1^{(1)}), \ldots, B_p(a_1^{(1)})$ as its subgraphs. So if there were

$$\nu_v[B_1(a_1^{(1)})] < \nu_v/2 + 1,$$

the total number of vertices of the branches $B_2(a_1^{(2)}), \ldots, B\ (a_1^{(2)})$ would be less than $\nu_v/2$ because the branch $B_1(a_1^{(1)})$contains except these branches also the vertex $a_1^{(1)}$ which does not belong to any of them. The union of the branches $B_2(a_1^{(2)}), \ldots, B_q(a_1^{(2)})$ has a unique common vertex $a_1^{(2)}$ with the branch $B_1(a_1^{(2)})$. Thus the number of vertices of $B_1(a_1^{(2)})$ would be greater than $\nu_v/2 + 1$, which would be a contradiction. So if the tree G has two medians $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}$, the branches $B_1(a_1^{(1)}), B_1(a_1^{(2)})$ have the same number of vertices equal to $\nu_v/2 + 1$. This is evidently the weight of the tree G, so both the medians of G are also its mass centers.

From Theorem 3 it follows that in the case of a tree it suffices to use only one of the terms "median" and "mass center". According to my personal opinion it is better to use the term "median" for avoiding misunderstandings due to the similarity of the terms "mass center" and "gravity center".

Theorem 4. *For a tree G with ν_v vertices the mean vertex deviation $m_1(G)$ satisfies the inequalities*

$$1 - \frac{1}{\nu_v} \leqq m_1(G) \leqq \frac{\nu_v}{4} - \frac{1}{4\nu_v}$$

in the case when ν_v is odd and

$$1 - \frac{1}{\nu_v} \leqq m_1(G) \leqq \frac{\nu_v}{4}$$

in the case when ν_v is even. The equality $m_1(G) = 1 - \dfrac{1}{\nu_v}$ occurs in the case of a star graph, the equality $m_1(G) = \dfrac{\nu_v}{4} - \dfrac{1}{4\nu_v}$ or $m_1(G) = \dfrac{\nu_v}{4}$ in the case of a path.

Proof. Let a_1 be the median of the tree G. The distance between a_1 and an arbitrary vertex different from a_1 is at least one. As the tree G has ν_v vertices, the sum of these distances is at least $\nu_v - 1$. Now we see that the distance between the median and an arbitrary vertex of G is at most $\nu_v/2$, as the path connecting these two vertices must be contained in one of the branches of G from a_1. Assume at first that ν_v

is odd. In every branch B of G from a_1 there can be at most n vertices with the distance greater than or equal to $\nu_v/2 - n$ because to each of those vertices a path from a_1 to it must exist in G containing $\nu_v/2 - n + 1$ vertices (including a_1). These paths together must contain at least $\nu_v/2 - n$ vertices with the distance from a_1 less than $\nu_v/2 - n$ (the case of exactly $\nu_v/2 - n$ vertices occurs if for all those paths such vertices are common). Thus the branch B contains at least $\nu_v/2 - n$ vertices with the distance from a_1 less than $\nu_v/2 - n$ and the number of the remaining vertices must be at most n. So the maximal mean vertex deviation can occur, if the number of vertices in each branch of G from a_1 with the distance greater than or equal to $\nu_v/2 - n$ is equal to n for every n. Such a case occurs, if G is a path with n vertices and a_1 is its center. Then G has two branches from a_1, each of them is a path with $(\nu_v + 1)/2$ vertices (evidently there cannot be more than two branches of G from a_1 containing such a number of vertices). Then using the well-known formula for the sum of a finite arithmetic sequence we obtain the upper bound for $m_1(G)$.

For ν_v even the proof is analogous.

Corollary 3. *For a tree G with ν_e edges the mean edge deviation satisfies the inequalities.*

$$\frac{1}{2} \leqq M_1(G) \leqq \frac{\nu_e}{4} + \frac{1}{2}$$

in the case when ν_e is odd and

$$\frac{1}{2} \leqq M_1(G) \leqq \frac{\nu_e}{4} + \frac{1}{4\nu_e}$$

in the case when ν_e is even. The equality $M_1(G) = \frac{1}{2}$ occurs in the case of a star graph, the equality $M_1(G) = \frac{\nu_e}{4} + \frac{1}{2}$ or $M_1(G) = \frac{\nu_e}{4} + \frac{1}{4\nu_e}$ in the case of a path.

This follows immediately from Theorem 4 using the equality from Theorem 1.

So as the minimal value of the vertex deviation, also its maximal value may be studied. We shall call it the periphery vertex deviation and the vertex in which this value is attained will be called the vertex peripherian. Analogously we may define the periphery edge deviation and the edge peripherian. The periphery vertex deviation will be denoted by $\overline{m}_1(G)$, the periphery edge deviation will be denoted by $\overline{M}_1(G)$.

Corollary 4. *The vertex peripherian and the edge peripherian of a tree coincide with one another.*

This follows from Theorem 1.

In the following we shall speak only about a "peripherian", omitting the epitheta "vertex" and "edge".

Theorem 5. *The peripherians of a tree are always its end vertices.*

Proof. We shall make analogous considerations to the proof of the Lemma 1. Let $\bar{a}_1$ be the peripherian of the tree G, let $B_1(\bar{a}_1), \ldots, B_l(\bar{a}_1)$ be the branches of G from $\bar{a}_1$. For $1 \leqq i \leqq l$, let u_i be the vertex of the branch $B_i(\bar{a}_1)$, which is joined by an edge with $\bar{a}_1$. As $\bar{a}_1$ is the peripherian of G, there must be $m_1(\bar{a}_1) \geqq m_1(u_i)$. Now

$$m_1(u_i) = m_1(\bar{a}_1) + \frac{1}{\nu_v}[\nu_v - 2\nu_v(B_i(\bar{a}_1)) + 2]$$

holds (see the proof of Lemma 1). Thus from $m_1(\bar{a}_1) \geqq m_1(u_i)$ we get

$$0 \geqq \frac{1}{\nu_v}(\nu_v - 2\nu_v(B_i(\bar{a}_1)) + 2),$$

from which it follows that

$$v_v[B_i(\bar{a}_1)] \geqq \mathrm{v}_v/2 + 1.$$

So each branch of G from $\bar{a}_1$ must have at least $\nu_v/2 + 1$ vertices. Two different branches from $\bar{a}_1$ could have exactly one common vertex, so if there existed any two ones, the total number of their vertices would be at least $\nu_v + 1$, which is impossible, because G has only ν_v vertices. Therefore there exists only one branch of G from $\bar{a}_1$, which means that $\bar{a}_1$ is an end vertex of G.

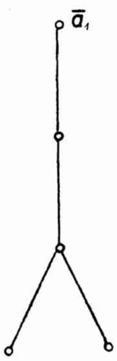

Fig. 2.

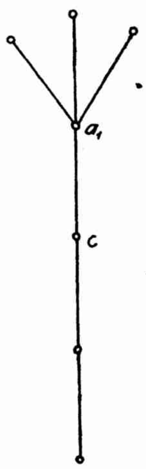

Fig. 3.

The number of peripherians of a tree is not so bounded as the number of medians.

Theorem 6. *For each positive integer n there exists a tree with exactly n peripherians.*

Proof. For $n = 1$ such a tree is on Fig. 2. This example shows us also that an end vertex of a tree need not be its peripherian. For $n = 2$ it is an arbitrary path, because it contains two end vertices and one of them can be mapped on the other by an automorphism. For $n \geqq 3$ it is the star graph with n edges.

Evidently every tree must have at least one peripherian.

Theorem 7. *The peripherian of a tree never coincides with its median,* *with the exception of the trivial cases of a tree consisting of one isolated vertex and of a tree consisting of one edge with its end vertices.*

Proof follows immediately from Lemma 1 and Theorem 5.

Theorem 8. *For the periphery vertex deviation of a tree G the inequalities*

$$2 - \frac{3}{\nu_v} \leqq \bar{m}_1(G) \leqq \frac{\nu_v - 1}{2}$$

hold. The equality $\bar{m}_1(G) = 2 - \frac{3}{\nu_v}$ *occurs in the case of a star graph, the equality* $m_1(G) = \frac{\nu_v - 1}{2}$ *occurs in the case of a path.*

Proof is analogous to the proof of Theorem 4.

Corollary 5. *For the periphery edge deviation of a tree G the inequalities*

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{\nu_e} \leqq \overline{M}_1(G) \leqq \frac{\nu_e}{2}$$

hold. The equality $\overline{M}_1(G) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\nu_e}$ *occurs in the case of a star graph, the equality* $M_1(G) = \frac{\nu_e}{2}$ *occurs in the case of a path.*

Proof follows immediately from Theorem 8 and Theorem 1. We see that upper bounds are the same in Theorem 8 and in this corollary. Applying Theorem 1 we may easily show that the vertex deviation in a vertex of a tree can be equal to the edge deviation if and only if it is equal to $\nu_e/2$.

At the end we note that the median of a tree need not coincide with its center. It is shown on Fig. 3, where a_1 is the median and c is the center of the tree.

REFERENCE

[1] Ore O., *Theory of Graphs*, Providence 1962.

Katedra matematiky
Vysoká škola strojní a textilní, Liberec
Czechoslovakia

Department of Mathematics