Beiträge zur Algebra und Geometrie
18(1984), 41-48

LOKALE GEOMETRIE DES RADIUS IN RIEMANNSCHEN MANNIGFALTIGKEITEN I

Jürgen Eichhorn

1. Einleitung

In [1] untersuchen GRAY und VANHECKE, inwieweit die lokale Geometrie einer Riemannschen Mannigfaltigkeit durch das Volumen aller hinreichend kleinen geodätischen Bälle in der Umgebung eines jeden Punktes bestimmt ist. Sie fragen z.B., folgt aus der Tatsache, daß das Volumen aller hinreichend kleinen geodätischen Bälle das euklidische Volumen ist, die lokale Flachheit der Metrik? Die ebenen Räume sind hier also die Modellräume. Entsprechend kann man Räume konstanter Krümmung als Modellräume oder allgemeiner die symmetrischen Räume vom Rang 1 als Modellräume benutzen. Das Volumen ist eine Größe der Integralgeometrie, dasjenige kleiner geodätischer Bälle eine Größe der lokalen Integralgeometrie. Statt des Volumens bieten sich auch andere Größen der lokalen Integralgeometrie an, z.B. die integrierte mittlere Krümmung kleiner geodätischer Sphären, deren integrierte Skalarkrümmung oder die integrierte Norm der 2. Fundamentalform.

Wir betrachten in dieser Arbeit und weiteren die in gewisser Hinsicht fundamentalste Größe der lokalen Integralgeometrie, den Riemannschen Abstand bzw. Radius innerhalb hinreichend kleiner Umgebungen von Punkten. Auf Grund des Gaußlemmas ist die Exponentialabbildung eine radiale Isometrie. Man hat also nach anderen Bedingungen an den Radius als die Analoga zu den obigen und deren Implikationen an die lokale Geometrie zu fragen. Als solche natürlichen Bedingungen kann man die Existenz von Fundamentallösungen für den Wärmeleitungs- oder Laplaceoperator, die nur vom Radius abhängen, formulieren.

Wir formulieren deshalb folgende Aufgabe: Seien k,l ganze Zahlen > 0. Man bestimme alle lokalen Geometrien, für die gilt

$$\Delta^k r^l = 0.$$

Von einer vollständigen Lösung ist man noch sehr weit entfernt. In dieser ersten Arbeit werden einige Teilantworten vorgestellt, und es wird eine gewisse methodische Einführung in die Behandlung dieser Frage gegeben.
A. GRAY sei für die Anregung zu dieser Fragestellung gedankt.

2. Der Fall k = 1, l beliebig

I.f. werden ein beliebig gewählter Punkt x einer C^{ω}-Riemannschen Mannigfaltigkeit M^n und eine Umgebung U innerhalb eines geodätischen Balles betrachtet. $r = \rho(x,y)$ bezeichne den Riemannschen Abstand der Punkte $y \in U$ von x, Δ sei der auf Funktionen wirkende Laplaceoperator. Mit $\omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$ werde das Volumen der n-dimensionalen euklidischen Einheitsvollkugel bezeichnet. Für die Vollkugel vom Radius r gilt dann $\mathrm{vol}(V_r(0)) = r^n \cdot \omega_n$.
Wir führen in U geodätische Polarkoordinaten $(r,u_1,\dots,u_{n-1})$ ein.
Satz 2.1. Folgende Bedingungen sind gleichwertig.
a. $\Delta r^l = 0$.
b. $l = -(n-2) \neq 1$ und M^n eben.
Beweis. Sei $\Delta r^l = 0$. M^n ist dann harmonisch und $(\det(g_{ij}))^{1/2} = r^{n-1} \cdot \Theta$ eine Funktion von r allein. In geodätischen Polarkoordinaten schreibt sich obige Gleichung als

$$\Delta r^l = -(r^l)'' - (r^l)'((n-1)/r + \Theta'/\Theta) = 0,$$

also

$$l(l-1)r^{l-2} + lr^{l-1}((n-1)/r + \Theta'/\Theta) = 0,$$

d.h.

$$r \cdot \Theta'/\Theta + n+l-2 = 0$$

oder

$$\Theta = c \cdot r^{-(n+l-2)}, \quad (\det(g_{ij}))^{1/2} = c \cdot r^{-l+1}. \tag{2.1}$$

Seien $e_1,\dots,e_n$ eine Orthonormalbasis in T_xM und u S^{n-1} T_xM. Dann ist in x R_{uaub} wohldefiniert, $1 \leq a,b \leq n$. Gemäß [2], Korollar 2.4, gilt an der Stelle $\exp_x(ru)$

$$\Theta(\exp_x(ru)) = 1 - \frac{r^2}{6}\ \rho_{uu}(x) - \frac{r^3}{12}\ (\nabla_u \rho_{uu})(x) +$$
$$+ \frac{r^4}{24}\left(-\frac{3}{5}\nabla^2_{uu}\rho_{uu} + \frac{1}{3}\ \rho^2_{uu} - \frac{2}{15}\sum_{a,b=1}^{n} R^2_{uaub}\right)(x) + O(r^5). \qquad (2.2)$$

Hierbei bezeichne ρ_{uu} die Ricci-Krümmung. Koeffizientenvergleich von (2.1) und (2.2) ergibt

$$l = -(n-2),\ \rho_{uu} = 0,\ \nabla_u \rho_{uu} = 0,\ \nabla^2_{uu}\rho_{uu} = 0,$$
$$H := \sum_{a,b=1}^{n} R^2_{uaub} = 0. \qquad (2.3)$$

x war fest, aber beliebig gewählt, (2.3) gilt also in jedem $x \in M$. M^n ist somit ein Einstein-Raum mit der skalaren Krümmung $\tau = 0$. Gemäß [3], Satz 6.57, gilt für das Normquadrat $\|R\|^2 = \sum R^2_{ijkl}$ des Krümmungstensors

$$\|R\|^2 = \frac{2}{3}\ n\left[\ (n+2)H - \tau^2\right]. \qquad (2.4)$$

Also ist $\|R\|^2 = 0$, M^n eben.
Umgekehrt folgt aus M^n eben die Unabhängigkeit von Θ von r und damit

$$\Delta r^{-(n-2)} = -(n-1)(n-2)r^{-n} + (n-2)r^{-(n-1)}(n-1)/r = 0.$$

3. Der Fall $\Delta^2 r^l = 0$, $l = 1,2$, für harmonische Räume

Ein Raum, in dem $\Delta r^l = 0$ gilt ($l \neq 0$), ist notwendig harmonisch. Wir ermittelten im 2. Abschnitt auf sehr einfache Weise genau diejenigen harmonischen Räume, die die Gleichung $\Delta r^l = 0$ wirklich erfüllen. Beim Übergang zur Gleichung $\Delta^2 r^l = 0$ kann sich die lösende Raumklasse beträchtlich vergrößern, wie wir gleich sehen werden. Ob man hierbei jedoch über die Klasse der harmonischen Räume hinauskommt, wissen wir z.Z. noch nicht. Diese Frage führt auf ein schwieriges Problem, an dessen Lösung gearbeitet wird. Deshalb stellen wir die Frage nach den $\Delta^2 r^l = 0$ lösenden Räumen nur innerhalb der Klasse der harmonischen Räume, u.z. für $l = 1$ und 2.

Wohlbekannt ist die Formel

$$h = \frac{\partial}{\partial r} (\det(g_{ij}))^{1/2} / (\det(g_{ij}))^{1/2} = \frac{n-1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \Theta \;/\Theta$$

für die mittlere Krümmung h einer geodätischen Sphäre Σ_r^{n-1}, die wir jetzt verwenden ([2]).

Die Formel

$$\Delta f = - \frac{\partial^2}{\partial r^2} f - \frac{\partial}{\partial r} f \cdot h + \Delta_{\Sigma_r^{n-1}} f, \qquad (3.1)$$

wobei $\Delta_{\Sigma_r^{n-1}}$ der Laplaceoperator auf der geodätischen Sphä- Σ_r^{n-1} vom Radius r sei, führt für eine Funktion f(r) von r allein auf

$$\Delta^2 f = f^{(4)} + 2f'''\cdot h + 2f''\cdot h' + f'\cdot h'' +$$
$$+ f''\cdot h^2 + f'\cdot hh' - f'\Delta_{\Sigma_r^{n-1}} h. \qquad (3.2)$$

Der Strich bezeichne wieder die Ableitung nach dem Radius.

Setzt man $f(r) = r^l$, so wird die Gleichung $\Delta^2 r^l = 0$ gleichwertig zu

$$r^3 h'' + r^3 hh' + (l-1)r^2 h^2 + 2(l-1)r^2 h' +$$
$$+ 2(l-1)(l-2)r\, h + (l-1)(l-2)(l-3) - r^3 \Delta_{\Sigma_r^{n-1}} h = 0. \quad (3.3)$$

Für harmonische Räume ist h eine Funktion von r allein, und es gilt $\Delta_{\Sigma_r^{n-1}} h = 0$.

Satz 3.1. Für einen harmonischen Raum M^n gilt $\Delta^2 r = 0$ genau dann, wenn M^n ein 3-dimensionaler Raum konstanter Krümmung ist.

Beweis. Gemäß (3.3) gilt unter unserer Voraussetzung $\Delta^2 r = 0$

genau dann, wenn

$$h'' + hh' = 0,$$

also

$$(h' + \frac{1}{2}h^2)' = 0,\ h' + \frac{1}{2}h^2 = 2c \tag{3.4}$$

ist. Dies ist die Riccatische Differentialgleichung der Gestalt $y' + \frac{1}{2}y^2 = 2c$. Die Lösung von (3.4) erhält man zu

$$h = \begin{cases} \frac{2}{r}, & c = 0 \\ 2c^{1/2} \operatorname{ctgh}(c^{1/2}r), & c > 0 \\ 2(-c)^{1/2}\operatorname{ctg}(-c)^{1/2}r, & c < 0, \end{cases}$$

bzw. für $g = \det(g_{ij})$

$$g^{1/2} = \begin{cases} r^2, & c=0 \\ \sinh^2 c^{1/2}r, & c > 0 \\ \sin^2(-c)^{1/2}r, & c < 0, \end{cases}$$

wenn man $\lim\limits_{r \to 0} h = \infty$, $\lim\limits_{r \to 0} g^{1/2} = 0$ berücksichtigt.

Aus der Volumenentwicklung

$$\operatorname{vol}(\Sigma_r^{n-1}) = c_{n-1}r^{n-1}(1 + A_n r^2 + B_n r^4 + O(r^6))$$

mit $c_{n-1} = n\pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$, der Gleichung

$$\operatorname{vol}(\Sigma_r^{n-1}) = \int_{S_1^{n-1}} g(r,u)^{1/2}\, d\sigma$$

und den Reihenentwicklungen für r^2, $\sinh^2 c^{1/2}r$, $\sin^2(-c)^{1/2}r$ folgt unmittelbar $n-1 = 2$, $n = 3$. Umgekehrt verifiziert man für einen Raum M^3 konstanter Krümmung sofort $\Delta^2\ r = 0$.

Bemerkung. Der Durchschnitt der Raumklassen aus den Sätzen 2.1 und 3.1 sind genau die 3-dimensionalen ebenen Räume.

Satz 3.2. Sei M^n harmonisch. Dann sind die folgenden Bedingungen gleichwertig.

a. $\Delta^2 r^2 = 0$.

b. M^n eben, n eine bliebige positive ganze Zahl.

Beweis. Gemäß (3.3) sind für harmonische Räume die Gleichungen $\Delta^2 r^2 = 0$ und

$$r^3 h'' + r^3 hh' + 2r^2 h' + r^2 h^2 = 0$$

gleichwertig, letztere Gleichung wiederum zu

$$r(h' + \frac{1}{2} h^2)' + 2(h' + \frac{1}{2} h^2) = 0. \qquad (3.5)$$

(3.5) ist vom Typ $r \cdot y' + 2y = 0$ mit $h' + \frac{1}{2} h^2 = y(r)$, woraus $y = c \cdot r^{-2}$ folgt. Es gilt somit

$$h' + \frac{1}{2} h^2 - \frac{c}{r^2} = 0. \qquad (3.6)$$

Die Substitution $h = 2\frac{u'}{u}$ überführt (3.6) in

$$u'' - \frac{c}{2}\frac{1}{r^2} u = 0, \qquad (3.7)$$

also in eine Differentialgleichung vom Typ

$$u'' + \frac{\mu}{r^2} u = 0 \qquad (3.8)$$

mit $\mu = -\frac{c}{2}$. Deren Lösung ist

$$u = \begin{cases} c_1 r^{1/2+s} + c_2 r^{1/2-s}, & -4\mu + 1 > 0 \\ c_1 r^{1/2} + c_2 r^{1/2} \log r, & -4\mu + 1 = 0 \\ c_1 r^{1/2} \cos(s \cdot \log r) + c_2 r^{1/2} \sin(s \cdot \log r), & -4\mu + 1 < 0, \end{cases}$$

wobei $s = (|-4\mu+1|)^{1/2} = (|2c+1|)^{1/2}$.

Das ergibt schließlich

$$u = \begin{cases} c_1\, r^{1/2+s} + c_2\, r^{1/2-s}, & \frac{c}{2} > -\frac{1}{4} \\ c_1\, r^{1/2} + c_2\, r^{1/2} \log r, & \frac{c}{2} = -\frac{1}{4} \\ c_1\, r^{1/2} \cos(s\cdot\log r) + c_2\, r^{1/2} \sin(s\cdot\log r), & \frac{c}{2} < -\frac{1}{4} \end{cases}$$

und wegen $\frac{\partial}{\partial r}\, g^{1/2} / g^{1/2} = h = 2\,\frac{u'}{u}$, $g^{1/2} = D\cdot u^2$, mit neuen Konstanten

$$g^{1/2} = \begin{cases} r\,(C_1\, r^s + C_2\, r^{-s})^2, & \frac{c}{2} > -\frac{1}{4} \\ r\,(C_1 + C_2 \log r)^2, & \frac{c}{2} = -\frac{1}{4} \\ r\,(C_1 \cos(s\cdot\log r) + C_2 \sin(s\cdot\log r))^2, & \frac{c}{2} < -\frac{1}{4}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Im ersten Fall muß wegen der Entwicklung

$$g^{1/2} = r^{n-1}\,(1 + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r^3 + \cdots)$$

und $s > 0$ s die Gestalt $s = \frac{k}{2}$, k positiv und ganz, haben. Für $n \geq 2$ muß folglich $C_2 = 0$ sein, für $n = 1$ $C_1 = 0$ und $s = \frac{1}{2}$. Im zweiten Fall muß wegen der Analytizität $C_2 = 0$ sein. Der dritte Fall scheidet wegen der Analytizität völlig aus. Es verbleiben also genau die Fälle $g^{1/2} = C$, $g^{1/2} = C\,r$, $g^{1/2} = C\,r^{1+\sqrt{2s+1}}$, $c > -\frac{1}{2}$, d.h. $n = 1,2,3,\ldots$ und $g^{1/2} = C\cdot r^{n-1}$. Hieraus schließt man analog zum Beweis von Satz 2.1 M^n eben.

Umgekehrt prüft man hierfür sofort die Beziehung $\Delta^2\, r^2 = 0$ nach.

Bemerkung. Der Vergleich der Sätze 2.1 und 3.3 zeigt, daß für fixiertes k und wachsendes l die Klasse der Mannigfaltigkeiten, die $\Delta^l\, r^k = 0$ erfüllen, sich mit l beträchtlich vergrößern kann. Im zweiten Teil der Arbeit werden unter zusätzlicher Benutzung der Resultate aus [4] die l und k in weitere Abhängigkeit gebracht, und es wird auf Harmonizität untersucht. Für $n = 3$ erhält man z.B. das abgeschlossene Resultat M^3 ist ein Raum konstanter Krümmung.

LITERATUR

[1] GRAY, A. und VANHECKE, L.: Riemannian geometry as determined by the volumes of small geodesic balls. Acta mathematica 142 (1979), 157-198.

[2] CHEN, B.-Y. und VANHECKE, L.: Differential geometry of geodesic spheres. Journal für die reine und angewandte Mathematik 325 (1981), 28-67.

[3] BESSE, A.L.: Manifolds all of whose Geodesics are Closed, Springer-Verlag, Berlin 1978.

[4] RUSE, H.S., WALKER, A.G. und WILLMORE, T.J.: Harmonic Spaces, Edizioni Cremonese, Roma 1961.

Manuskripteingang: 23.4.1983

VERFASSER: JÜRGEN EICHHORN, Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald