Beiträge zur Algebra und Geometrie
18(1984), 5-21

ÜBER EINE KLASSE VON INHALTSTREUEN ABBILDUNGEN

Bernulf Weißbach, Michael Gebel und Peter Stricker

1. Die Abbildungen

Bei ihren Untersuchungen über Vierecke kleinsten Inhalts, die zwei einander berührende Kreise enthalten, haben O. Krötenheerdt und P. Richter [2] eine eineindeutige Abbildung der Ebene auf sich genutzt, die wie folgt beschrieben werden kann: Es sei K eine abgeschlossene Kreisscheibe im R^2. Auf ihrem Rand ∂K sei ein Umlaufsinn beliebig vorgegeben, und damit in üblicher Weise für jede Tangente von K eine Orientierung festgelegt.

Ist x^* ein beliebiger Punkt aus $\bar{K} := R^2 \setminus K$, so gibt es genau einen Punkt $x^{**} \neq x^*$ aus $\bar{K}$, für den gilt:

1. Die x^* und x^{**} verbindende Gerade ist Tangente an K.
2. Der Mittelpunkt x des Punktepaares (x^*, x^{**}) liegt auf ∂K.
3. Bei der vorgegebenen Orientierung der Tangenten von K ist x^* Vorgänger von x^{**}.

Man zeigt leicht, daß die durch $x^* \longrightarrow x^{**}$ vermittelte eineindeutige Abbildung von K auf sich inhaltstreu ist.

Es genügt festzuhalten, daß der Rand jedes zu K konzentrischen Kreises $\tilde{K} \supset K$ längentreu auf sich abgebildet wird. Weist man noch die Punkte von K sich selbst zu, so gelangt man zu einer Abbildung, die in sinnvoller Weise die Spiegelung an einem Punkt verallgemeinert.

Es scheint bemerkenswert, daß man auf die gleiche Weise zu einer inhaltstreuen Abbildung der Ebene auf sich gelangt, sobald man unter K irgend eine kompakte konvexe Menge versteht, deren Rand ∂K genügend glatt ist und keine Flachpunkte aufweist.

Zum Nachweis darf angenommen werden, daß ein beliebiger Punkt

x aus ∂K durch

$$x = x(u) \; , \; u_1 \leqq u \leqq u_2 \; , \; x(u_1) = x(u_2) \; , \; \dot{x}(u) \neq 0$$

zu erfassen ist. (Hier und weiterhin wird durch Punkte stets Ableitung nach dem Parameter u angezeigt.)

Die Orientierung von ∂K möge im Sinne wachsender Werte von u erfolgen. Jedem Punkt x^* aus $\bar{K}$ entspricht dann eineindeutig ein Punkt des Gebietes

$$H = \left\{ [u, v]^T : u_1 \leqq u < u_2 \; ; \; 0 < v < \infty \right\} ,$$

so daß mit einem bestimmten Punkt $x(u) \in \partial K$

$$x^* = x(u) - v \, \dot{x}(u) \tag{1}$$

gilt. Der zugeordnete Punkt x^{**} ist durch

$$x^{**} = x(u) + v \, \dot{x}(u) \tag{2}$$

zu erfassen (Abb. 1).

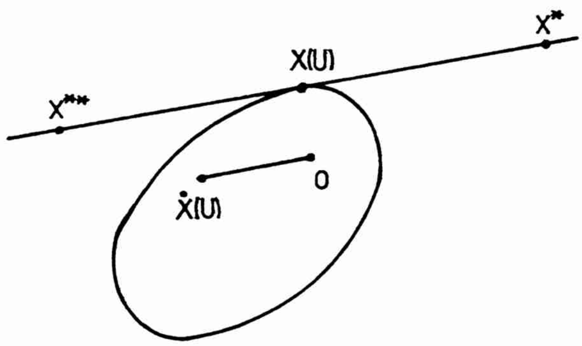


Abb. 1

Um zu zeigen, daß die durch $x^* \longrightarrow x^{**}$ festgelegte Abbildung von $\bar{K}$ auf sich inhaltstreu ist, genügt es nachzuweisen, daß die beiden durch (1) bzw.(2) gegebenen Abbildungen von H auf $\bar{K}$ in den Punkten von H die gleiche sich stetig ändernde lokale Verzerrung hervorrufen. Das heißt, ist

$$x^* = [x_1^*, x_2^*]^T \quad \text{und} \quad x^{**} = [x_1^{**}, x_2^{**}]^T ,$$

so braucht nur gezeigt zu werden, daß in allen Punkten von H

$$\frac{\partial(x_1^*, x_2^*)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(x_1^{**}, x_2^{**})}{\partial(u, v)} \quad (\neq 0)$$

gilt, da Stetigkeit von vornherein gefordert wird.

Weil sich

$$\frac{\partial(x_1^*, x_2^*)}{\partial(u, v)} = v\,(\ddot{x}_1\,\dot{x}_2 - \dot{x}_1\,\ddot{x}_2) = \frac{\partial(x_1^{**}, x_2^{**})}{\partial(u, v)}$$

ergibt, sichern die Voraussetzungen, daß die erklärte Abbildung von $\bar{K}$ auf sich inhaltstreu ist.

Man bemerkt, daß es keinesfalls erforderlich ist, nur kompakte konvexe Mengen zu betrachten. Lassen sich bei einer unbeschränkten, abgeschlossenen und konvexen Menge K aus jedem Punkt von $\bar{K}$ zwei Tangenten an den Rand ∂K legen, wobei wieder vorausgesetzt werde, daß dieser Rand genügend glatt - im genutzten Sinne - sei, so gelangt man ebenfalls zu einer inhaltstreuen Abbildung von $\bar{K}$ auf sich. Ersichtlich genügt es auch vorauszusetzen, daß $\ddot{x}_1\,\dot{x}_2 - \dot{x}_1\,\ddot{x}_2$ auf ∂K nur stückweise stetig sei, sein Vorzeichen jedoch nicht ändere. Es kann also zugelassen werden, daß K eine endliche Anzahl von Ecken besitzt. Gewisse Teile von $\bar{K}$ sind dann durch Spiegelungen an diesen Ecken aufeinander bezogen. Da aber die einander zugeordnete Punkte verbindende Gerade stets Stützgerade der konvexen Menge K ist, sollen die hier betrachteten inhaltstreuen Abbildungen von $\bar{K}$ auf sich Stützspiegelungen an K genannt werden. Dieser Name soll auch gewählt werden, wenn es sich um Einschränkungen derartiger globaler Abbildungen handelt. Das heißt, eine inhaltstreue Abbildung zwischen zwei ebenen Punktmengen M^* und M^{**} wird Stützspiegelung an einem Kurvenstück M genannt, wenn M stetige nirgens verschwindende Krümmung besitzt, M mit der Menge der Mittelpunkte einander zugeordneter Punkte übereinstimmt und wenn die Geraden, die verschiedene, einander entsprechende, Punkte verbinden, Tangenten von M sind.

2. Einordnung der Stützspiegelungen

Bei der Kennzeichnung der inhaltstreuen Abbildungen zwischen zwei ebenen Punktmengen M^* und M^{**} gleichen Maßes ist lokal zu unterscheiden, ob die Menge M der Mittelpunkte einander zugeordneter Punkte nur aus einem Punkt besteht, ob sie ein Stück einer Kurve bildet, oder ob sie ein Gebiet erfüllt. Diese Einteilung hat G. Scheffers [3] schon 1918 benutzt, um die Struktur der inhaltstreuen Abbildungen in der Ebene zu beschreiben. Die stärkste Beachtung hat bisher stets der Fall gefunden, daß M ein umkehrbar eindeutig auf M^* und M^{**} abbildbares Gebiet ist, da dann die Abbildung zwischen M^* und M^{**} mittelbar über die Punkte dieses Gebietes beschrieben werden kann. Man vergleiche hierzu auch die unlängst erschienene bemerkenswerte Arbeit von K. Strubecker [4] , in der Bezüge zwischen inhaltstreuen Abbildungen in der Ebene und der Differentialgeometrie des isotropen Raumes hergestellt werden. Da die Stützspiegelungen besonders übersichtliche Beispiele für die stets nur am Rande behandelten inhaltstreuen Abbildungen liefern, bei denen M ein Kurvenstück ist, mag kurz aufgezeigt werden, wie sie sich in diese übergreifende Gesamtheit einordnen. In den gegebenen inhaltsgleichen - etwa offenen - Mengen M^* und M^{**} seien Netze $x^*(u,v)$ und $x^{**}(u,v)$ über ein und demselben Rechteck H derart eingeführt, daß $x^*(u,v)$ und $x^{**}(u,v)$ einander bei der ebenfalls vorgegebenen Abbildung zwischen M^* und M^{**} zugeordnet sind. Ist x Mittelpunkt von x^* und x^{**} , so gibt es einen wohlbestimmten Punkt $\bar{x}$, der die Bedingung

$$x^* = x - \bar{x} \; ; \; x^{**} = x + \bar{x} \qquad (3)$$

erfüllt. Da M, die Menge der Mittelpunkte, ein Kurvenstück bilden soll, ist es sicher möglich, die Netze derart zu wählen, daß

$$x = \frac{1}{2}\,(x^*(u,v) + x^{**}(u,v))$$

allein von der Veränderlichen u abhängt. Die Kennzeichnung der inhaltstreuen Abbildungen durch

$$\frac{\partial(x_1^*,\, x_2^*)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(x_1^{**},\, x_2^{**})}{\partial(u,v)}$$

führt dann über

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 - \frac{\partial}{\partial u}\bar{x}_1 & \dot{x}_2 - \frac{\partial}{\partial u}\bar{x}_2 \\ -\frac{\partial}{\partial v}\bar{x}_1 & -\frac{\partial}{\partial v}\bar{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x}_1 + \frac{\partial}{\partial u}\bar{x}_1 & \dot{x}_2 + \frac{\partial}{\partial u}\bar{x}_2 \\ \frac{\partial}{\partial v}\bar{x}_1 & \frac{\partial}{\partial v}\bar{x}_2 \end{vmatrix}$$

zu

$$\dot{x}_1 \frac{\partial}{\partial v}\bar{x}_2 - \dot{x}_2 \frac{\partial}{\partial v}\bar{x}_1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \dot{x} \times \frac{\partial}{\partial v}\bar{x} = 0\,. \tag{4}$$

Da man als allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$\bar{x}(u,v) = \lambda(u,v)\,\dot{x} + c(u)$$

erhält, kann jeder inhaltstreuen Abbildung, bei der M ein Kurvenstück x(u) bildet, die Form

$$\begin{aligned} x^*(u,v) &= x(u) - \lambda(u,v)\,\dot{x}(u) - c(u) \\ x^{**}(u,v) &= x(u) + \lambda(u,v)\,\dot{x}(u) + c(u) \end{aligned} \tag{5}$$

gegeben werden. Die Stützspiegelungen erhält man gerade dann, wenn

$$c(u) = \tilde{\lambda}(u)\,\dot{x}(u)$$

gilt.

3. Stützspiegelungen an Kurven zweiter Ordnung

Ist $\partial K =: M$ eine Kurve zweiter Ordnung, so kann man aus den Abbildungsgleichungen der Stützspiegelungen, wie sie in (1) und (2) vorliegen, ohne allzugroßen Aufwand die Parameter u und v ausscheiden. Man gewinnt dann eine Beschreibung der Abbildungen, mit deren Hilfe man - leichter als dies in der mittelbaren Form möglich ist- die Bilder vorgegebener Mengen bestimmen kann.

Es mag genügen, hier die Stützspiegelungen an Ellipsen zu betrachten. (Bei Parabeln und Hyperbeln kann man im wesentlichen auf die gleiche Art vorgehen, hat aber in letzterem Fall zu beachten, daß nicht aus jedem Punkt von $\bar{K}$ zwei Tangenten an einen Hyperbelast ∂K gelegt werden können.) Ist K eine Ellipse, so wird man rechtwinklige Koordinaten derart wählen, daß der Ursprung mit dem Mittelpunkt dieser Ellipse zusammenfällt und ihre Achsen die Grundrichtung festlegen.

Nutzt man für $x \in \partial K$ die Darstellung

$$x^T = \left[a_1 \cos u\ ,\ a_2 \sin u\right] \quad ;\ 0 \leqq u < 2\pi\ ,$$

so ergibt sich

$$\dot{x} = S\,x \quad \text{mit} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_1}{a_2} \\ \dfrac{a_1}{a_2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Andererseits kann man für $x \in \partial K$ die Bedingung

$$x^T G\, x = 1 \quad \text{mit} \quad G = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_1^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a_2^2} \end{bmatrix}$$

verwenden. Die Matrizen G und S sind durch die Beziehungen

$$S^T G + G\,S = 0\ ;\quad S^T G\,S = G \tag{7}$$

miteinander verbunden, ferner gilt

$$S^2 = -E. \tag{8}$$

Mit (6) und (8) erhält man aus (1) bzw. (2) zunächst

$$\begin{aligned} (E + vS)x^* &= (E + vS)(x - v\dot{x}) = (E + vS)(E - vS)x = (1 + v^2)x \\ (E - vS)x^{**} &= (E - vS)(x + v\dot{x}) = (E - vS)(E + vS)x = (1 + v^2)x \end{aligned} \tag{9}$$

und weiter ergibt sich, gestützt auf (7),

$$1 = x^T G\, x = \frac{1}{(1 + v^2)^2}\, x^{*T}(E + vS^T)G(E + vS)x^* = \frac{1}{1 + v^2}\, x^{*T} G\, x^*$$

nebst

$$1 = x^T G\, x = \frac{1}{(1 + v^2)^2}\, x^{**T}(E - vS^T)G(E - vS)x^{**} = \frac{1}{1 + v^2}\, x^{**T} G x^{**}.$$

Hieraus kann man einmal

$$x^{**T} G\, x^{**} = x^{*T} G\, x^* \qquad (10)$$

entnehmen und festhalten, daß x^* und x^{**} bezüglich der durch die Ellipse K als Eichfläche festgelegten Metrik gleiche Norm besitzen, oder, was auf dasselbe hinaus kommt, daß die Ränder der Ellipsen $x^T G\, x \leq \lambda$, $\lambda \geq 1$ in sich abgebildet werden.

Zum anderen kann der Parameter v in Abhängigkeit von x^* angegeben werden

$$1 + v^2 = x^{*T} G\, x^* ,$$

und man erhält aus (9) über

$$(E - vS)x^{**} = (E + vS)x^*$$

$$(E + vS)(E - vS)x^{**} = (1 + v^2)x^{**} = (E + vS)^2 x^* = (2vS + (1 - v^2)E)x^*$$

die Abbildungsgleichungen für die Stützspiegelung an der positiv umlaufenen Ellipse

$$x^{**} = \frac{1}{x^{*T} G x^*}\left(2\sqrt{x^{*T} G x^* - 1}\; S + (2 - x^{*T} G x^*)E\right)x^* . \qquad (11)$$

Für die Stützspiegelung am positiv umlaufenen Einheitskreis, d.h. für G = E, ergibt sich also

$$x_1^{**} = \frac{1}{x_1^{*2} + x_2^{*2}} \left(-2\sqrt{x_1^{*2} + x_2^{*2} - 1}\, x_2 + (2 - x_1^{*2} - x_2^{*2}) x_1\right)$$

$$x_2^{**} = \frac{1}{x_1^{*2} + x_2^{*2}} \left(2\sqrt{x_1^{*2} + x_2^{*2} - 1}\, x_1 + (2 - x_1^{*2} - x_2^{*2}) x_2\right). \tag{12}$$

Besonders übersichtlich lassen sich diese Abbildungsgleichungen in komplexer Form zusammenfassen. Wird - bequemer Schreibweise halber - z für das Original und $\tilde{z}$ für das Bild gesetzt, so ist (12) durch

$$\tilde{z} = \frac{1}{|z|^2} \left(2 - |z|^2 + 2i\sqrt{|z|^2 - 1}\right) z \tag{13}$$

wiederzugeben. Um einen Einblick in die Struktur dieser Abbildung zu vermitteln, sind in den Abb. 2 und 3 die Bilder einiger einfach gestalteter Mengen aufgezeigt. Sollen Geraden abgebildet werden, so ist zu unterscheiden, ob sie den Kreis K treffen oder ob dies nicht der Fall ist. Ohne Verlust an Allgemeinheit genügt es, zur imaginären Achse parallele Geraden zu betrachten. Mit $z = a + it$, $t^2 \geq 1 - a^2$ wird

$$\tilde{z} = \frac{a(2-a^2-t^2)-2t\sqrt{a^2+t^2-1}}{a^2 + t^2} + i\,\frac{t(2-a^2-t^2)+2a\sqrt{a^2+t^2-1}}{a^2 + t^2} .$$

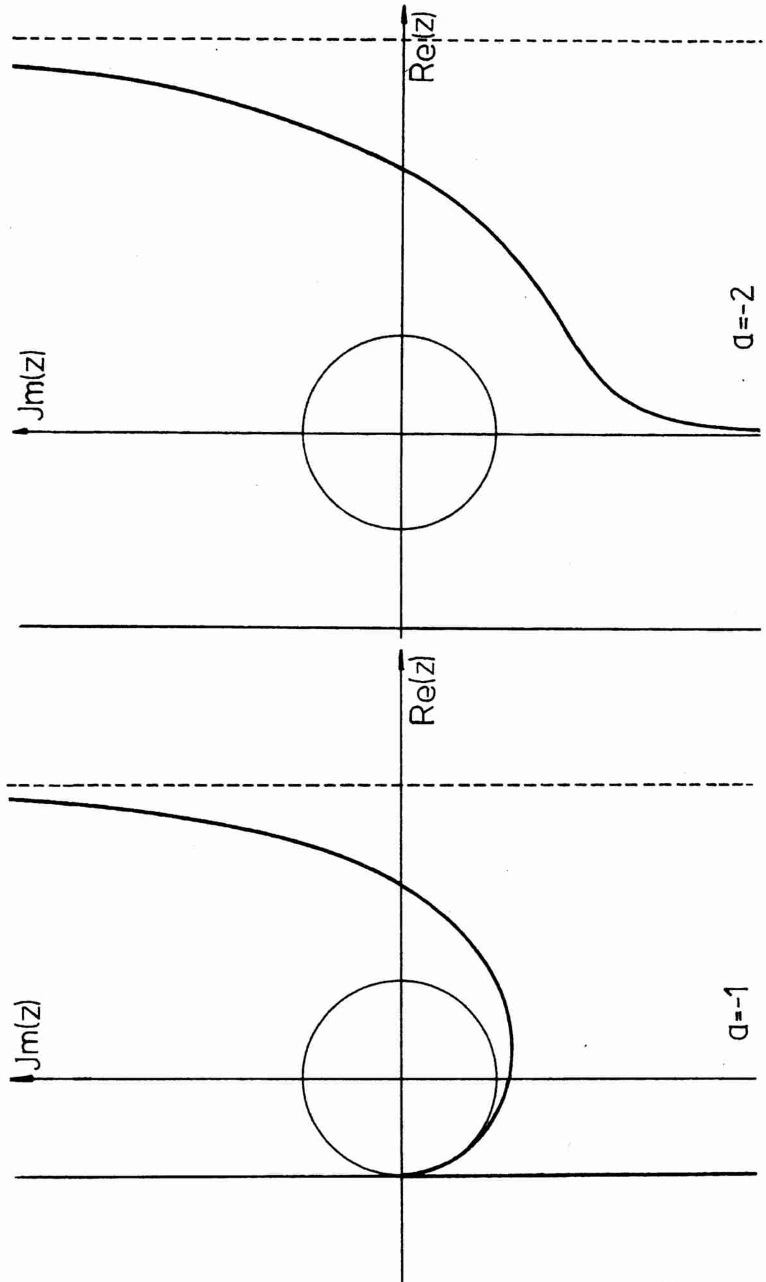
Demnach ist

$$\lim_{t \to \pm\infty} \operatorname{Im}(\tilde{z}) = \mp\infty \; ; \quad \lim_{t \to \pm\infty} \operatorname{Re}(\tilde{z}) = \mp 2 - a .$$

Unabhängig von a verlaufen die Bildkurven also in einem Streifen der Breite 4, dessen begrenzenden Geraden sie sich asymptotisch nähern. In Abb. 2 sind die Fälle $a = -2, -1, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0$ dargestellt.

(Angemerkt sei, daß das Bild des Strahls $z = t$, $t > 1$ der Polargleichung $r^2 = 2(1 + \sin\varphi)^{-1}$ genügt.)

Will man Kurven zweiter Ordnung abbilden, so wächst der zu be-


Re(z)
Jm(z)
a=-2
Re(z)
Jm(z)
a=-1

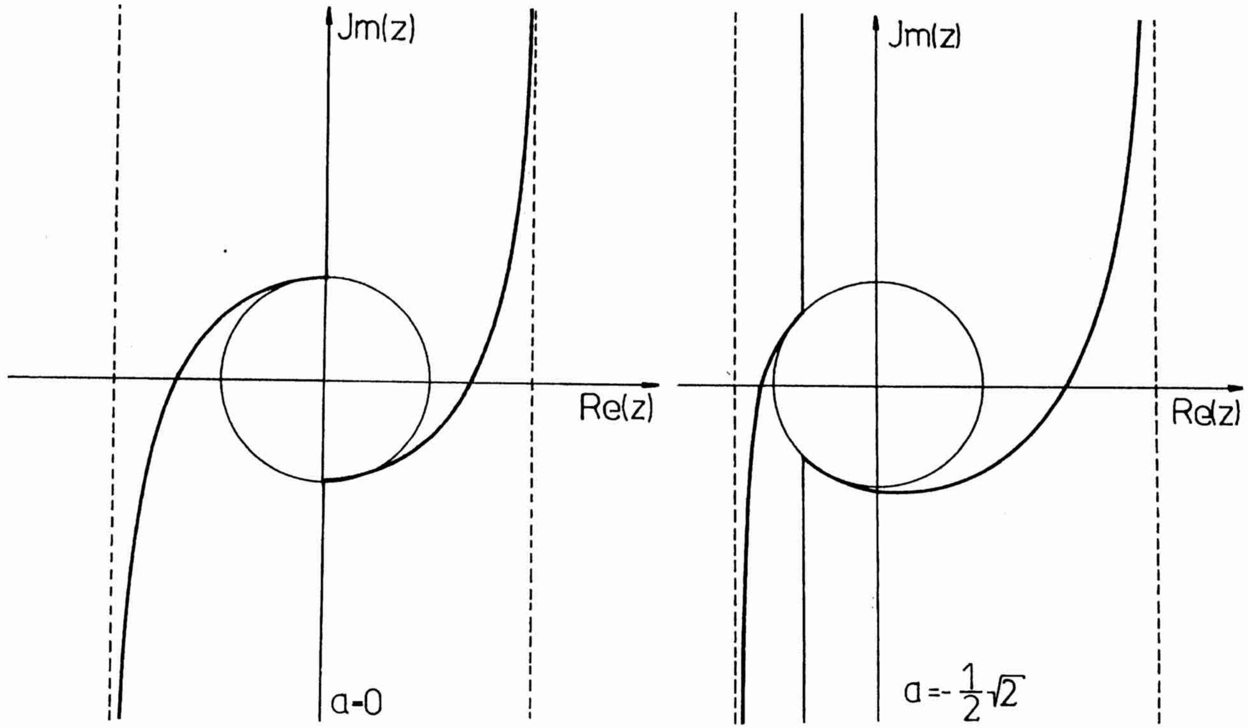


Abb. 2

treibende Aufwand sofort beträchtlich.

Abbildung 3 versucht einen Eindruck davon zu vermitteln, wie stark die Bilder der Kurven einer stetigen Schar in ihrer Gestalt voneinander abweichen können. Dargestellt sind die Bilder der Kreise $|z - t|^2 = 1$ für $t = 1, 2, 3$ und -ebenfalls für diese Werte - die Bilder der Ellipsen $t^2(x_1^2 - 4) + 16\,x_2^2 = 0$.

Letztlich sei noch darauf hingewiesen, daß man mit der in (13) angegebenen Darstellung der Stützspiegelung φ am positiv umlaufenen Einheitskreis auch sofort deren Wiederholungen angeben kann. Wegen $|\tilde{z}| = |z|$ wird z.B. $\varphi^3 = \varphi\cdot\varphi\cdot\varphi$ durch

$$\tilde{z} = \frac{1}{|z|^6}\,(2 - |z|^2 + 2i\sqrt{|z|^2 - 1})^3\, z$$

beschrieben. Diese Abbildung bildet das Ringgebiet $1 \leq |z| \leq 2$ inhaltstreu so auf sich ab, daß gerade die Randpunkte fest bleiben.

4. Stützspiegelungen an beliebigen Kurven

Will man Stützspiegelungen an beliebig vorgegebenen Kurvenstükken behandeln, so wird man zumeist nicht zu geschlossenen Abbildungsgleichungen, die die Parameter aus H nicht enthalten, gelangen können. Man ist dann auf geeignete numerische Verfahren angewiesen, wenn man die Bilder gewisser Punktmengen bestimmen will. Hierzu wurde am Mathematischen Institut der Universität Charkow ein Programm bereitgestellt. Es gestattet weitgehend beliebige Vorgabe des Kurvenstückes, an dem die Stützspiegelung vorgenommen werden soll. Die Bilder gegebener Kurven können sofort über Plotter oder auch am Bildschirm verfolgt werden.
Im wesentlichen beruht das Verfahren darauf, daß die Kurve, an der die Stützspiegelung vorgenommen werden soll, nach Vorgabe einer geeigneten Schrittweite in einzelne Punkte aufgelöst wird, die dann wieder durch einen Spline verbunden werden. Vorliegende überprüfbare Beispiele bestätigen die Brauchbarkeit des Programms.

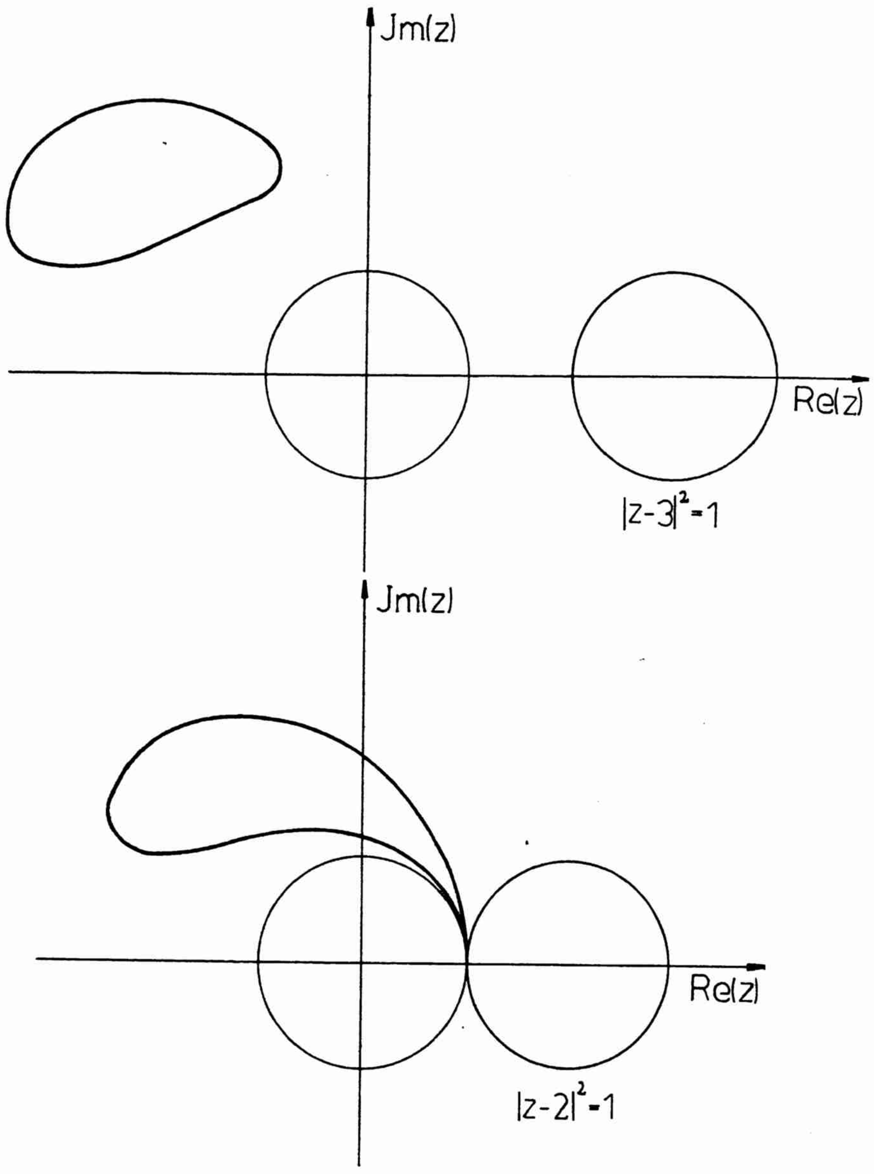
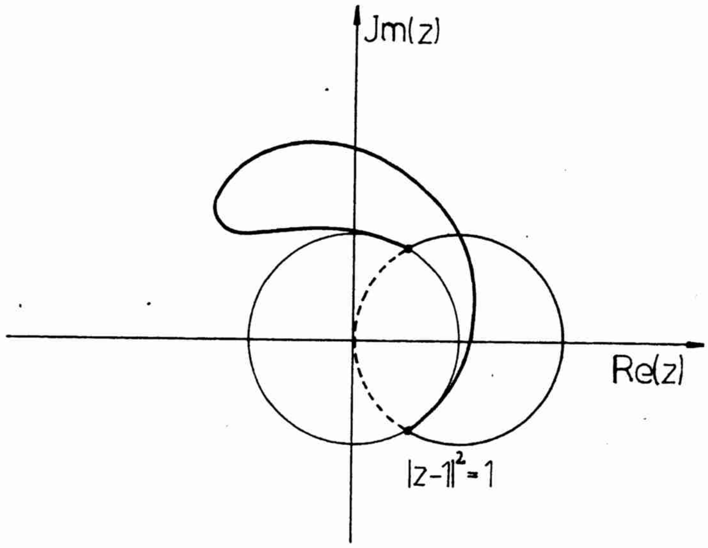
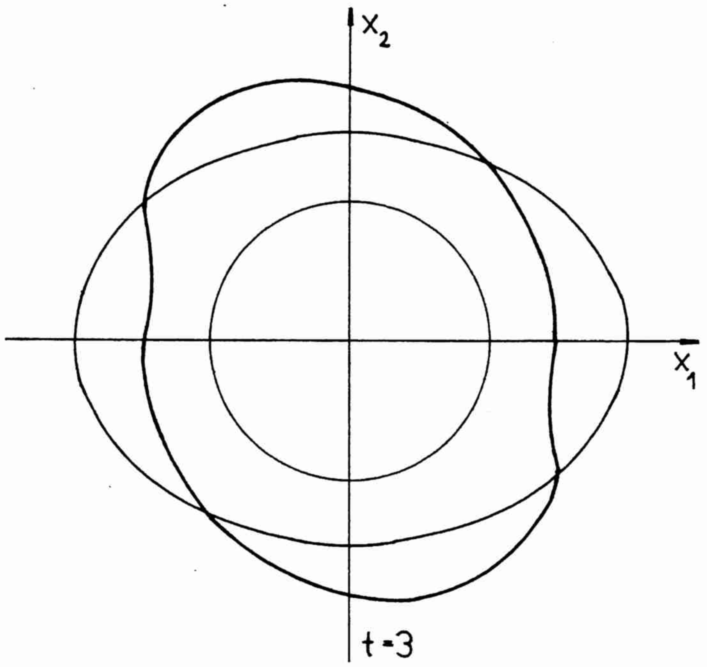
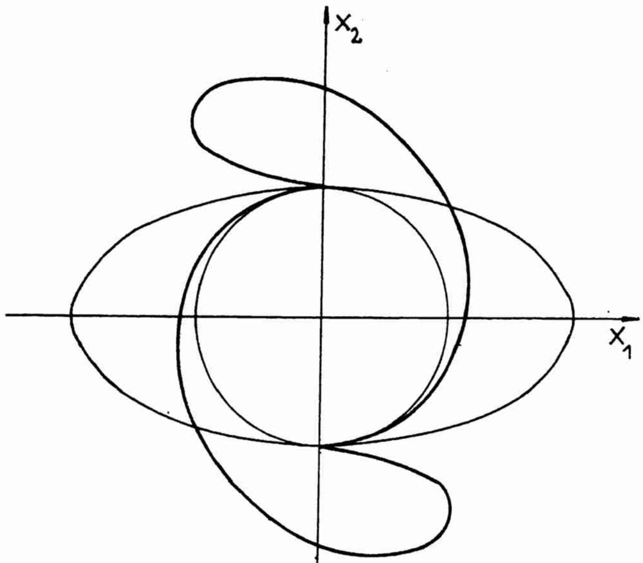


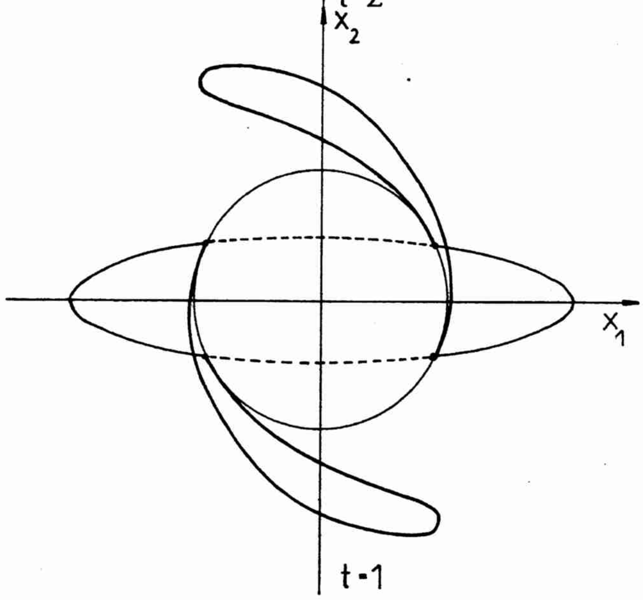
Abb. 3


Jm(z)
Re(z)
|z-1|² = 1


x₂
x₁
t = 3



$t=2$



$t=1$

5. Verallgemeinerungen

Abschließend soll der Frage nachgegangen werden, ob es auch in Räumen höherer Dimension globale Abbildungen des Äußeren einer kompakten konvexen Menge auf sich gibt, die alle wesentlichen Eigenschaften der Stützspiegelungen besitzen. Was erreicht werden kann, wird bereits deutlich, wenn man eine abgeschlossene Kugel $K \subset R^n$, $n > 2$, betrachtet. Man hätte dann eine Abbildung φ zu bestimmen, die zumindest den folgenden Bedingungen genügt:

1. Die Abbildung φ ist eine eineindeutige und stetige Abbildung von $\bar{K} = R^n \setminus K$ auf sich, die keinen Punkt fest läßt.
2. Der Abstand eines Punktes vom Mittelpunkt der Kugel K bleibt bei der Abbildung erhalten.
3. Ist $\partial \tilde{K}$ der Rand einer zu K konzentrischen Kugel mit $\tilde{K} \supset K$, so berühren die Geraden, die die Punkte von $\partial \tilde{K}$ mit ihren Bildpunkten verbinden, die Kugel K. Dabei wird jeder Randpunkt von K genau einmal erfaßt.

Es zeigt sich, daß diesen Forderungen nur in Räumen gerader Dimension n entsprochen werden kann. Liegt nämlich eine derartige Abbildung vor, so läßt sich auch jedem Punkt x auf der Sphäre ∂K eindeutig und stetig ein Tangentialvektor von festem Betrag zuordnen. (Man hat nur x mit dem ihm -gemäß der dritten Forderung - eindeutig zugewiesenen Bild x^{**} eines Punktes x^* aus $\partial \tilde{K}$ zu verbinden.)

Stetige singularitätenfreie Felder von Tangentialvektoren lassen sich nach einem Satz von Poincaré und Brouwer (man vergleiche etwa [1], p. 481) jedoch nur auf Sphären ungerader Dimension angeben.

Ist n gerade, so kann man Abbildungen mit den geforderten Eigenschaften - sie sind dann, wie man auch auf lokalem Wege zeigen kann, stets inhaltstreu - leicht auf folgendem Wege gewinnen:

Man wählt zunächst eine schiefsymmetrische orthogonale Matrix S. Es gibt stets derartige Matrizen mit einer geraden Anzahl von Reihen, z.B. kann man für $S = [s_{hk}]$, $h,k \in \{1,\dots,2m\}$ die Matrix mit den einzig von Null verschiedenen Elementen

$s_{i,m+i} = -1$; $s_{m+i,i} = +1$, $i = 1,\dots,m$

verwenden. Für jeden Punkt x des R^{2m} gilt dann

$$x^T S\, x = x^T S^T x = \frac{1}{2}\,(x^T S\, x + x^T S^T x) = 0.$$

Ist also x ein Punkt aus $\partial K = \{x \in R^{2m} : \|x\| = 1\}$ und wird

$$x^* = (E - tS)x\ ,\ x^{**} = (E + tS)x\ ,\ t > 0 \qquad (14)$$

gesetzt, so ist

$$\|x^*\|^2 = \|x^{**}\|^2 = (1 + t^2)\,\|x\|^2 = (1 + t^2) \qquad (15)$$

und die x^* und x^{**} verbindende Gerade berührt die Kugel K. Umgekehrt gibt es zu einem vorgegebenen Punkt x^* aus K aber genau einen Punkt $x \in \partial K$ und eine reelle Zahl $t > 0$, so daß (14) erfüllt wird. Die Zahl t ist bereits durch (15) bestimmt, und wegen $S^2 = -SS^T = -E$ wird

$$(E + tS)(E - tS)x = (1 + t^2)x = (E + tS)x^*,$$

also

$$x = \frac{1}{\|x^*\|^2}\,(E + \sqrt{\|x^*\|^2 - 1}\,S)x^*.$$

Aus (14) erhält man dann auch sofort die Abbildungsgleichung

$$x^{**} = \frac{1}{\|x^*\|^2}\,(2\sqrt{\|x^*\|^2 - 1}\,S + (2 - \|x^*\|^2)E)x^*. \qquad (16)$$

LITERATUR

[1] ALEXANDROFF, P. - H. HOPF: Topologie, Berlin 1935.

[2] KRÖTENHEERDT, O. und P. RICHTER: Bemerkungen über "deltoidnahe" und "trapeznahe" asymmetrische Vierecke mit zwei einbeschriebenen Kreisen. Beitr. Alg. Geom. 6(1977), 19 - 26.

[3] SCHEFFERS, G.: Flächentreue Abbildungen in der Ebene. Mathematische Zeitschrift 2(1918), 180 - 186.

[4] STRUBECKER, K.: Theorie der flächentreuen Abbildungen der Ebene. Contributions to Geometry; Proceedings of the Geometry Symposium Siegen 1978. Ed. by J. Tölke and J.M. Wills, Basel - Boston - Stuttgart 1979, 313 - 329.

Manuskripteingang: 26.3.1983

VERFASSER:
Michael Gebel, Mathematisches Institut der Universität Charkow (UdSSR).
Peter Stricker, Sektion Mathematik der Martin - Luther - Universität Halle - Wittenberg.
Bernulf Weißbach, Sektion Mathematik/Physik der Technischen Hochschule "Otto von Guericke" Magdeburg.